MAT

PRÉ-VESTIBULAR

MATEMÁTICA

3

Sumário

Frente 1

Frente 2

Frente 3

FRENTE 1

CAPÍTULO

9

Funções circulares

O ramo da Matemática que estuda relações entre lados e ângulos de um triângulo é conhecida como trigonometria (do grego *trigonos*, que quer dizer triângulos, e *metria*, que significa medir).

A origem da Trigonometria é obscura, mas sabemos que matemáticos e astrônomos babilônicos e gregos já faziam cálculos notáveis de valores que hoje são conhecidos como seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.

Função tangente

Considere o ciclo trigonométrico centrado em O, o ponto A é a origem dos arcos e B a extremidade do arco. O eixo x é conhecido como eixo dos cossenos, enquanto o eixo y é conhecido como eixo dos senos. Observe a figura 1.

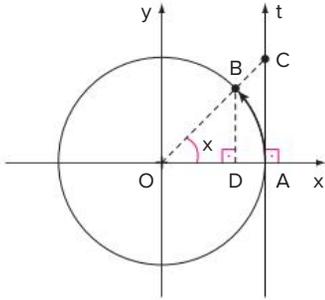



Fig. 1 Função tangente.

Pelo ponto A, traçamos uma reta t tangente ao ciclo, obviamente teremos $\vec{OY} // t$

Temos OD = cos x e BD = sen x.

O △BOD ~ △COA, assim:

$$\frac{BD}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{AC}{1}$$

$\overline{AC}$ depende do seno e cosseno do arco x. Vamos definir AC como a função tangente de x, pois para cada arco x existirá um único segmento $\overline{AC}$, e o eixo t como eixo das tangentes. Portanto:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}; \cos x \neq 0$$

Vamos fazer um treino de como obter geometricamente a tangente de um arco x

Observe as construções seguintes

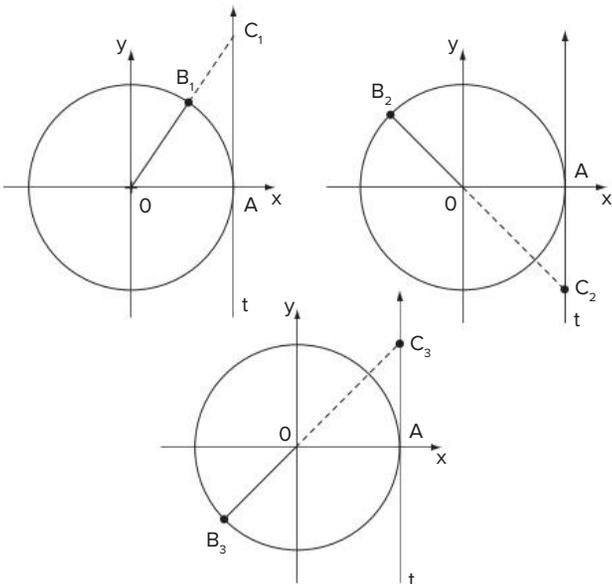



Fig. 2 Construção geométrica da tangente.

A tangente de um arco é medida no eixo t, pelo prolongamento da extremidade do arco na direção do raio. Na figura 2, os prolongamentos são $\overline{B_1C_1}$, $\overline{OC_2}$ e $\overline{OC_3}$. Assim, as tangentes são as medidas dos segmentos $\overline{C_1A}$, $\overline{AC_2}$ e $\overline{AC_3}$, respectivamente, com os devidos sinais.

Sinal da tangente

Utilizando a construção geométrica da tangente, montamos o seguinte quadro de sinais:

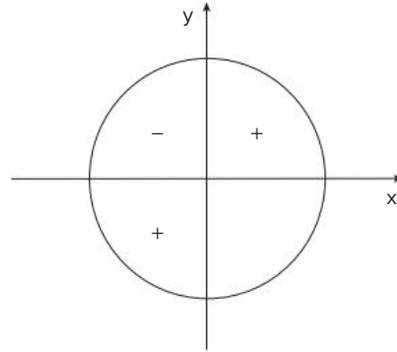



Fig. 3 Quadro de sinais.

Domínio da função tangente

Existem dois pontos críticos no ciclo trigonométrico que não possuem tangente, observe:

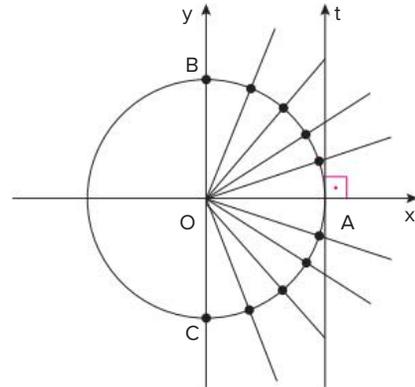



Fig. 4 Pontos críticos.

À medida que os arcos vão tendendo a B e também a C, os prolongamentos vão cortando o eixo t, até que exatamente em B e C os prolongamentos são paralelos a t

Portanto, não existe tangente na família $\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

! Atenção

O domínio da função tangente é:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Imagem da função tangente

Na figura dos pontos críticos, percebemos que aumentando o arco no 1º quadrante, a tangente também aumenta tendendo a $+\infty$. Tomando na expressão $90° - \varepsilon$, na qual ε assume valores tão pequenos quanto se queira, teremos valores maiores da tangente.

Se $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ tg 90° não existe.

Isso também ocorre no 4º quadrante. Valores pequenos de ε fazem a tangente do arco $-90° + \varepsilon$ tender a $-\infty$.

Se $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ tg(–90°) = tg(270°) $\Rightarrow$ não existe.

Logo, a função tangente possui imagem para todos os reais.

! Atenção

O conjunto imagem da função tangente é: $I_m = \mathbb{R}$.

Período da função tangente

Observe a figura 5, na qual temos dois arcos medindo x e $x + \pi$. As extremidades desses arcos são B e D respectivamente opostos e possuem a mesma tangente.

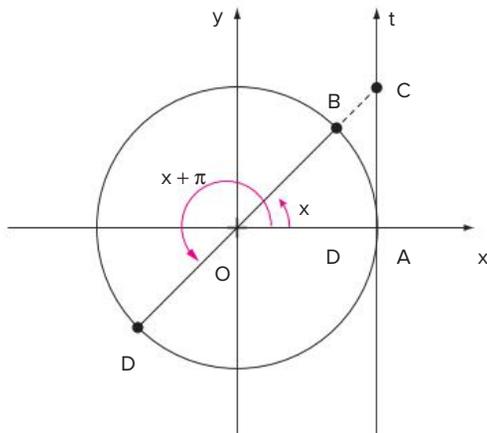



Fig. 5 Período da função tangente.

Comparando os arcos x e $x + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, no ciclo trigonométrico temos casos a analisar:

- **se k é ímpar**, os arcos são diametralmente opostos;
- **se k é par**, os arcos são coincidentes

Então, concluímos que $\text{tg } x = \text{tg}(x + k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, ou seja, π.

! Atenção

O período da função f(x) = tg x é π.

Gráfico da função tangente

Acoplando um sistema cartesiano no ciclo trigonométrico, podemos esboçar a função tangente Observe a figura 6.

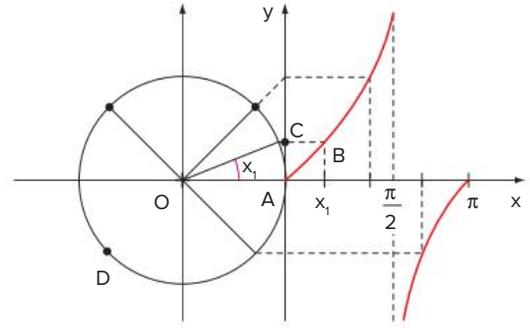



Fig. 6 Gráfico da função tangente

Marcamos no ciclo trigonométrico o arco x_1, e o segmento $\overline{AC}$ representa a tg x_1. O ponto B representa a ordenada no gráfico da tangente. Observe agora o gráfico.

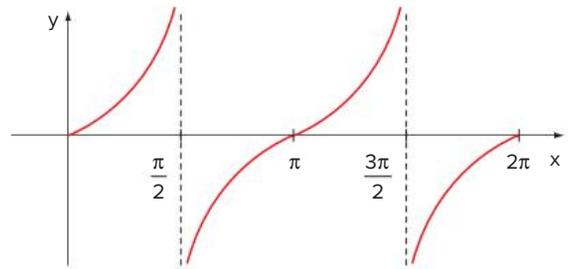



Fig. 7 Gráfico da função tangente.

! Atenção

Na função f(x) = tg(cx + d), o período da função é: $P = \frac{\pi}{|c|}$.

Observe: os valores notáveis das tangentes que você deve memorizar:

arco	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$

Exemplos de aplicação da função tangente.

Exercícios resolvidos

1 Determine o período e o domínio da função

$$f(x) = \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Resolução:

Seguindo o mesmo raciocínio das funções seno e cosseno, em que o período era $P = \frac{2\pi}{|c|}$, o período da função tangente é $P = \frac{\pi}{|c|}$.

Portanto, no exemplo temos: $P = \frac{\pi}{2}$.

Para obtermos o domínio, sabemos que:

$\exists \text{tg}\,\alpha \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$, logo:

$$\exists \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq \pi + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$$

Portanto: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2 Se $\text{sen}\,x = \frac{2}{3}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, calcule tg x.

Resolução:

Pela RFT, temos: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

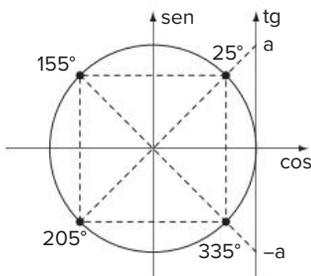
$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\pm\sqrt{5}}{3}$; como $x \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, $\cos x < 0$;

logo, $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, e como $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$

$$\text{tg}\,x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \quad \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

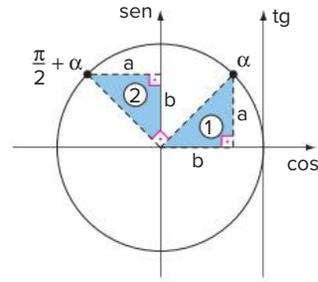
3 Sabendo que $\text{tg}\,25° = a$ e que $m = \frac{\text{tg}\,205° \quad °\,\text{tg}\,115}{\text{tg}\,245° + \text{tg}\,335°}$, encontre o valor de *m* em função de *a*.

Resolução:

Sem recorrer a fórmulas, observe o arco de 25° e seus simétricos:

tg 155° = a; tg 205° = a e tg 335° = –a

E a tg 115°?

Observe que 115° = 25° + 90°

Vamos generalizar para um arco α:

Os triângulos coloridos são congruentes.

No △①, temos que:

$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ e no △②, temos que $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{b}{a}$ Logo:

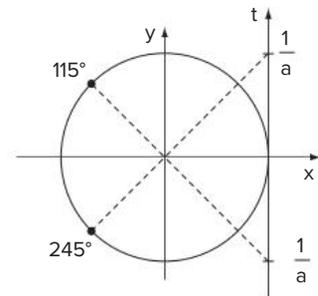
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

Assim: $\text{tg}\,115° = -\frac{1}{a}$

Do exemplo 3, tiramos resultados importantes:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \alpha\text{sen}$$

E a tg 245°? Observe o ciclo trigonométrico.

Pela figura anterior, percebemos que:

$$\text{tg}\,245° = -\text{tg}\,115° = -\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

Substituindo os valores obtidos para *m*, temos:

$$m = \frac{a \quad \left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a} + (-a)} = \frac{a + \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} \quad a} = \frac{\frac{a^2 + 1}{a}}{\frac{1 - a^2}{a}} = \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}$$

4 Calcule o valor da expressão:

$$\frac{\text{sen}\,2460° \cdot \cos\,1110°}{\text{tg}\,2205°}$$

Resolução:

Obviamente os arcos deram várias voltas no ciclo trigonométrico. Vamos obter a 1ª determinação positiva deles:

$$2460° = 300° + 6 \cdot (360°)$$

sen 2460° = sen 300° = –sen 60°

$$1110° = 30° + 3 \cdot (360°)$$

cos 1110° = cos 30°

$$2205° = 45° + 6 \cdot (360°)$$

cos 2205° = tg 45°

$$\frac{\text{sen } 2460° \cdot \cos 1110°}{\text{tg } 2205°} = \frac{(-\text{sen } 60°) \cdot (\cos 30°)}{\text{tg } 45°} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{3}{4}$$

Funções circulares secundárias

Já estudamos as funções circulares básicas, que são sen x e cos x A própria função tg x, que acabamos de estudar, deriva do sen x e cos x, mas também é de suma importância.

Agora vamos fazer uma análise simplificada das demais funções, mostrando sempre que recaímos nas funções básicas.

Função cotangente

Observe o ciclo trigonométrico da figura seguinte.

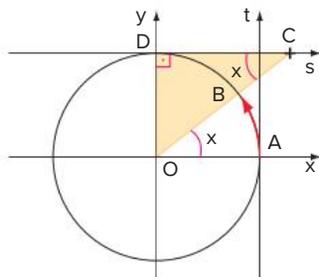



Fig. 8 Função cotangente.

A reta $s // \overline{Ox}$ e C é o ponto de cruzamento do prolongamento do raio $\overline{OB}$ na reta s; no $\triangle OCD$, retângulo em D, $O\hat{C}D = x$ e $\text{tg } x = \frac{OD}{CD} \Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{1}{CD}$, logo: $CD = \frac{1}{\text{tg } x}$; tg x ≠ 0.

O segmento $\overline{CD}$ será definido como a função cotangente.

$$\text{cotg}x = \frac{1}{\text{tg}x} = \frac{\cos x}{\text{sen}x};\ x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Função secante

Observe o ciclo trigonométrico da figura 9.

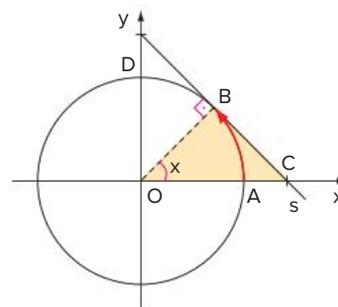



Fig. 9 Função secante.

A reta s é tangente ao ciclo trigonométrico no ponto B, que é a extremidade do arco de medida *x*.

O ponto C é o cruzamento de s com o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.

No $\triangle OBC$, retângulo em B, temos:

$$\cos x = \frac{OB}{OC} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{OC}, \text{ portanto, } OC = \frac{1}{\cos x};$$

cos x ≠ 0.

A medida do segmento $\overline{OC}$ é a função secante:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Função cossecante

Observe ainda o ciclo trigonométrico da figura a seguir. Vamos analisar o $\triangle OBD$:

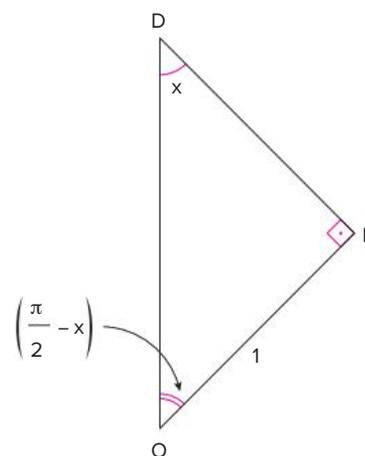



Fig 10 $\triangle OBD$ extraído da figura 9

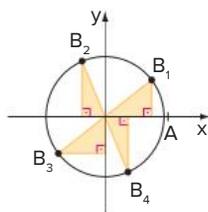
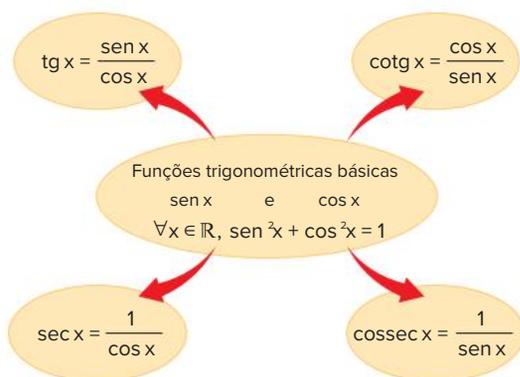
$$\text{sen}x = \frac{OB}{OD} \Leftrightarrow \text{sen}x = \frac{1}{OD} \Rightarrow OD = \frac{1}{\text{sen}x}$$

para sen x ≠ 0.

O segmento $\overline{OD}$ é a função cossecante:

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen}x};\ x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

! Atenção

No ciclo trigonométrico, temos um triângulo retângulo girando em torno da origem. Observe:

Resumo das funções circulares

No capítulo 8, demonstramos que para todo arco x temos:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1 \text{ (RFT)}$$

Conhecendo as demais funções circulares, podemos apresentar a RFT de outra forma:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{sen^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{sen^2 x}{cos^2 x} + \frac{cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{sen\,x}{cos\,x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{cos\,x}\right)^2 \Rightarrow \boxed{tg^2 x + 1 = sec^2 x}$$

Em vez de dividir a RFT por $cos^2 x$, vamos dividi-la agora por $sen^2 x$, assim:

$$\frac{sen^2 x + cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{sen^2 x}{sen^2 x} + \frac{cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{cos\,x}{sen\,x}\right)^2 = \left(\frac{1}{sen\,x}\right)^2 \Rightarrow \boxed{1 + cotg^2 x = cossec^2 x}$$

Observe os exemplos de aplicação das funções circulares

Exercícios resolvidos

5 Sabendo que $sen\,x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule todas as outras funções trigonométricas.

Resolução:

Pela RFT, $sen^2 x + cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \pm cos\,x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

como $x \in$ 2º quadrante ($cos\,x < 0$), temos:

$$cos\,x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cossec\,x = \frac{1}{sen\,x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3$$

6 Sabendo que $sec\,x = 4$, calcular o valor da expressão $y = sen^2 x + 3 \cdot tg^2 x$.

Resolução:

$sec\,x = \frac{1}{cos\,x} = 4 \Rightarrow cos\,x = \frac{1}{4}$

(RFT) $sen^2 x + cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen^2 x \Leftrightarrow = 1 \quad cos^2 x = 1 \quad \frac{1}{16} \quad sen^2 x = \frac{15}{16}$

E também: $tg^2 x + 1 = sec^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg^2 x = sec^2 x - 1 = (4)^2 - 1 = 15$

$$y = \frac{15}{16} + 3 \cdot 15 = \frac{15}{16} + 45 = \frac{735}{16}$$

7 Sabendo que $cos\,x = \frac{2}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obter o valor de $y = (1 + tg^2 x)^2 + (1 \quad tg^2 x)^2$

Resolução:

$sec\,x = \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}$ e $tg^2 x + 1 = sec^2 x$

Logo:

$$tg^2 x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

Assim:

$$y = \left(1 + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{81}{16} + \frac{1}{16} = \frac{82}{16} = \frac{41}{8}$$

8 Sabe-se que sen x = a e cos x = b (com $a \cdot b \neq 0$). Calcule o valor da expressão: tg x + cotg x.

Resolução:

$$\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}\,x \cos x}$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} = \frac{1}{a \cdot b}$$

9 Sabendo que $\text{cotg}\,x = \alpha$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor da expressão: $y = \frac{\text{tg}\,x \cdot \cos x}{(1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x)}$.

Resolução:

Vamos primeiramente simplificar a expressão y:

$$y = \frac{\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

Assim, y = cossec x

Mas, $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \Rightarrow$

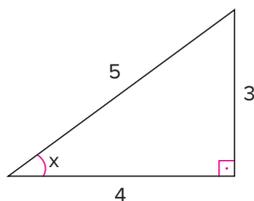
$$\Rightarrow \text{cossec}\,x = \pm\sqrt{1 + \text{cotg}^2 x} = \pm\sqrt{1 + \alpha^2}$$

como $x \in 3^{\underline{o}}$ quadrante, então sen x < 0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ cossec x < 0, logo: $\text{cossec}\,x = +\sqrt{1\alpha}\;^2$

10 Se $\text{tg}\,x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de y = cos x – sen x.

Resolução:

Vamos resolver este problema de uma maneira bem prática Construa um △ retângulo de ângulo agudo *x*:

Se $\text{tg}\,x = \frac{3}{4}$, é porque 3 é o cateto oposto, e 4 é o cateto adjacente.

Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa é 5. Assim, podemos calcular qualquer função trigonométrica (não se esqueça de fazer o acerto do sinal da função dependendo do quadrante).

Do triângulo tiramos $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$ e $\cos x = \frac{4}{5}$, logo:

$$y = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4 \quad 3}{5} = \frac{1}{5}$$

Simplificando expressões trigonométricas

Além do conhecimento das relações da Trigonometria, para simplificarmos uma expressão trigonométrica, temos de conhecer os principais casos de fatoração e produtos notáveis. Observe a tabela 1.

Fator comum	$ax + bx = x \cdot (a + b)$
Diferença de quadrados	$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$
Quadrado perfeito da soma	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Quadrado perfeito da diferença	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Cubo perfeito da soma	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Cubo perfeito da diferença	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Soma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
Diferença de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
Trinômio do 2º grau	$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ x_1 e x_2 são raízes do trinômio

Tab. 1 Fatoração algébrica e produtos notáveis

A fatoração algébrica foi estudada na frente 2, no capítulo 2. Na essência, os exercícios são os mesmos, vamos somente trocar as letras da tabela anterior por funções trigonométricas.

! Atenção

Cuidado!

Equação e identidade são conceitos diferentes

Uma equação é satisfeita somente pela raiz, enquanto identidade é satisfeita para qualquer valor de suas variáveis.

Observe os exemplos a seguir.

Exercícios resolvidos

11 Simplifique a expressão:

$$\frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} + \frac{1}{\text{cossec}\,x} \quad \frac{1}{\sec^2 x}$$

Resolução:

$$\frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\text{sen}\,x}\right)} = \frac{1}{\sec^2 x} \quad \text{sen}\,x$$

FRENTE 1

12 Simplifique a expressão:

$$\frac{\text{sen}^3 x \quad \text{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\text{cotg} x} + \frac{\text{cotg} x}{\text{cotg}^2 x + 1}$$

Resolução:

$$\frac{\text{sen} x}{\cos x} \cdot \left[\text{sen}^2 x \quad 1\right] + \text{tg} x + \frac{\cos x}{\text{sen} x \cdot \text{cossec}^2 x} =$$

$$= \frac{\text{sen} x}{\cos x} \cdot \left[-\cos^2 x\right] + \text{tg} x + \frac{\cos x}{\text{sen} x \cdot \left(\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)} =$$

$$= \cdot \text{sen} x \ + \cos x + \text{tg} x \quad \cdot \text{sen} x \ = \cos x \quad \text{tg} x$$

13 Verifique a identidade:

$$\frac{\text{sen}^3 x \quad \cos^3 x}{\text{sen} x - \cos x} = 1 + \text{sen} x \cdot \cos x$$

Resolução:

Uma maneira de verificar uma identidade é escolher um membro e por meio de simplificações chegar ao outro. Assim:

$$\frac{\text{sen}^3 x \quad \cos^3 x}{\text{sen} x - \cos x} =$$

$$= \frac{(\text{sen} x \cdot \cos x)\ (+\text{sen}^2 x \cdot \text{sen} x + \cos x \quad \cos^2 x)}{(\text{sen} x - \cos x)} =$$

$$= \text{sen}^2 x + \text{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x =$$

$= 1 + \text{sen}\, x \cdot \cos x = 2^{\text{o}}$ membro

A identidade está verificada!

14 Verificar a identidade:

$$\frac{1 + \text{sen} x \quad \text{sen}^2 x}{\text{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\text{tg} x} \quad \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x \quad 1}$$

Resolução:

$$2^{\text{o}} \text{ membro} = \frac{\cos x}{\text{sen} x} - \frac{\cos x}{\left(\cos^2 x\right)} =$$

$$= \frac{\cos x}{\text{sen} x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen} x}{(\text{sen} x)(\cos x)} = \frac{1 - \text{sen}^2 x + \text{sen} x}{\text{sen} x \cdot \cos x} =$$

$= 1^{\text{o}}$ membro.

A identidade está verificada!

15 Verificar a identidade

$$\frac{1 \quad \cos x}{\text{sen} x} \quad \frac{1}{\text{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\text{sen} x} \quad \frac{\cos^2 x + 1}{\text{sen} x \cdot \cos x}$$

Resolução:

Neste exercício, podemos ir simplificando os membros separadamente e provar a igualdade após algumas passagens.

$$1^{\text{o}} \text{ membro} = \frac{\cos x(1 \quad \cos x) \quad 1}{\text{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\cos x - \cos^2 x - 1}{\text{sen} x \cdot \cos x}$$

$$2^{\text{o}} \text{ membro} = \frac{\cos x \quad \cos^2 x \quad 1}{\text{sen} x \cdot \cos x}$$

Logo, 1^{o} membro = 2^{o} membro.

A identidade está verificada!

16 Verificar a identidade.

$$\frac{(1 \cdot \cos x)\ (+\cos^2 x + \cos x \quad 1)}{\cos x} = \sec x - \frac{\text{sen}^4 x \quad +2\text{sen}^2 x \quad 1}{\cos^2 x}$$

Resolução:

Neste exercício, vamos subtrair os membros, pois se 1^{o} membro $\quad 2^{\text{o}}$ membro = 0, podemos afirmar que 1^{o} membro = 2^{o} membro. Então:

$$\frac{(1 \quad +\cos x)(\cos^2 x \quad \cos x \quad 1)}{\cos x} \quad \sec x +$$

$$+ \frac{\text{sen}^4 x - 2\text{sen}^2 x + 1}{\cos^2 x} = A$$

$$\frac{1 - \cos^3 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \quad \frac{\left(\text{sen}^2 x \quad 1\right)^2}{\cos^2 x} = A$$

$$\frac{1 - \cos^3 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \quad \frac{\left(\ \cos^2 x\right)^2}{\cos^2 x} = A$$

$$\frac{\cos^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^4 x}{\cos^2 x} = A$$

$$-\cos^2 x + \cos^2 x = A = 0$$

Provamos que os membros são iguais.

Estudo completo das reduções de quadrantes

As funções básicas, como sabemos, são o seno e o cosseno, todas as outras são derivadas de seus valores. Normalmente, sabemos os valores notáveis do seno e cosseno do 1^{o} quadrante, como 30°, 45° e 60°.

! Atenção

Quando um arco varia de 0° até 360° (0 até 2π rad), as 6 funções trigonométricas se repetirão, em valor absoluto, nos arcos superiores a 90°.

O nosso problema então é calcular o arco do 1^{o} quadrante para o qual as 6 funções trigonométricas são as mesmas, salvo o sinal

I. Redução do 2º ao 1º quadrante

Dado um número real x, tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, e B é a sua imagem no ciclo. Observe a figura 11:

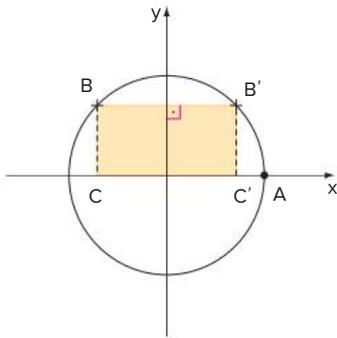



Fig 11 Demonstração de redução do 2º ao 1º quadrante

$\overline{BB'}$ é paralelo ao eixo dos cossenos e $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB'} = \pi$. Podemos ver também pelo retângulo BCB'C' que $\text{sen}\,\overset{\frown}{AB'} = \text{sen}\,\overset{\frown}{AB}$ e $\cos\overset{\frown}{AB'} = \quad \cos\overset{\frown}{AB}$. Como $\overset{\frown}{AB} = x$, temos $\overset{\frown}{AB'} = \pi \quad x$.

Conclusão:

$$\text{sen}\,(\pi \quad x) = \text{sen}\,x$$
$$\cos\,(\pi \quad x) = -\cos x$$

Mais conclusões:

I. $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{\text{sen}(\pi - x)}{-\cos(\pi - x)} = \quad \text{tg}(\pi \quad x)$

II. $\text{cotg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x} = \frac{1}{\text{tg}(\pi \quad x)} = \quad \text{cotg}(\pi \quad x)$

III. $\text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{\text{sen}(\pi - x)} = \text{cossec}(\pi \quad x)$

IV. $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\cos(\pi - x)} = \quad \sec(\pi \quad x)$

II. Redução do 3º ao 1º quadrante

Seja $x \in \mathbb{R}$, tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, e B é a sua imagem no ciclo trigonométrico. Observe a figura 12.

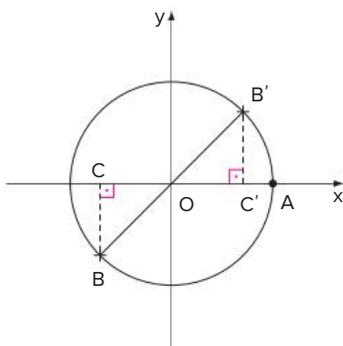



Fig. 12 Demonstração de redução do 3º ao 1º quadrante.

A reta que passa por B e O corta o ciclo em B', assim: $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AB'} = \pi$. Os triângulos retângulos B'C'O e BCO são congruentes, então: $\text{sen}\,\overset{\frown}{AB'} = \quad \text{sen}\,\overset{\frown}{AB}$ e $\cos\overset{\frown}{AB'} = \quad \cos\overset{\frown}{AB}$.

Como $\overset{\frown}{AB} = x$, temos $\overset{\frown}{AB'} = x \quad \pi$.

Conclusão:

$$\text{sen}\,(x \quad \pi) = \quad \text{sen}\,x$$
$$\cos\,(x - \pi) = -\cos x$$

Mais conclusões:

I. $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{-\text{sen}\,(x - \pi)}{-\cos\,(x - \pi)} = \text{tg}\,(x \quad \pi)$

II. $\text{cotg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x} = \frac{1}{\text{tg}\,(x \quad \pi)} = \text{cotg}\,(x \quad \pi)$

III $\text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{-\text{sen}\,(x - \pi)} =$
$= \quad \text{cossec}\,(x \quad \pi)$

IV. $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\cos\,(x - \pi)} = \quad \sec\,(x \quad \pi)$

III. Redução do 4º ao 1º quadrante

Seja $x \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, e B é a sua imagem no ciclo trigonométrico. Observe a figura 13.

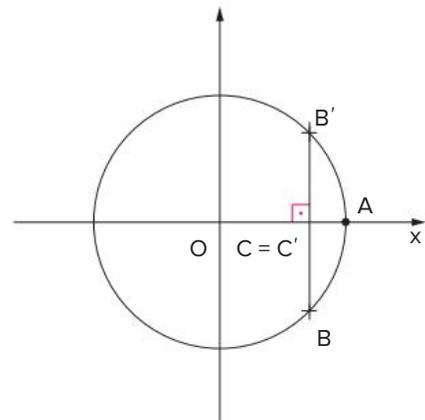



Fig 13 Demonstração de redução do 4º ao 1º quadrante.

Traçamos a reta perpendicular ao eixo das abscissas por B e encontramos B' no 1º quadrante. Assim, $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB'} = 2\pi$.

De imediato, tiramos que $\cos\overset{\frown}{AB} = \cos\overset{\frown}{AB'}$ (pois as projeções C e C' são coincidentes) e $\text{sen}\,\overset{\frown}{AB} = \quad \text{sen}\,\overset{\frown}{AB'}$.

Como $\overset{\frown}{AB} = x$, temos $\overset{\frown}{AB'} = 2\pi - x$.

Conclusão:

$$\text{sen}\,x = \quad \text{sen}\,(2\pi \quad x)$$
$$\cos x = \cos\,(2\pi \quad x)$$

FRENTE 1

IV. Arcos cuja diferença é de 1 reto

x e $\frac{\pi}{2} + x$ são os arcos cuja diferença vale $\frac{\pi}{2}$ rad, (1 reto).

Observe o ciclo trigonométrico:

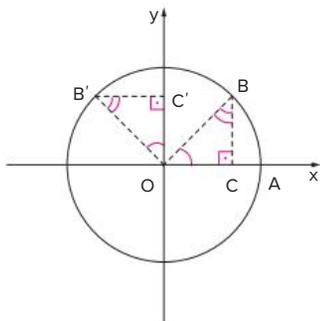



Fig. 14 Demonstração de redução de 90°.

Os triângulos BOC e B'OC' são congruentes e $\overline{BO} \perp \overline{B'O}$, assim $\widehat{AB'} = \widehat{AB} + \frac{\pi}{2}$, $\widehat{AB} = x$, então $\widehat{AB'} = \frac{\pi}{2} + x$ Observe os resultados da congruência:

OC = OC' e BC = B'C'.

Conclusão:

$$\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\text{sen}\, x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Mais conclusões:

I. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos x}{-\text{sen}\, x} = \text{cotg}\, x$

II. $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\text{cotg}\, x} = -\text{tg}\, x$

III. $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

IV. $\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} =$

$= \frac{1}{-\text{sen}\, x} = \text{cossec}\, x$

V. Arcos cuja diferença é de 3 retos

x e $\frac{3\pi}{2} + x$ são os arcos cuja diferença vale $\frac{3\pi}{2}$ rad (3 retos)

Observe o ciclo trigonométrico:

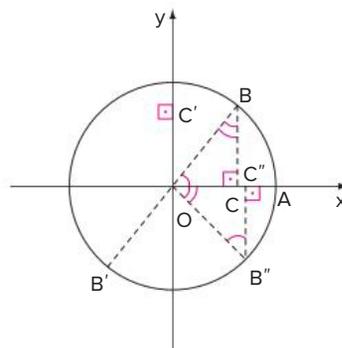



Fig 15 Demonstração de redução de 270°

$\overline{BB'}$ é um diâmetro e $\overline{B''O}$ é perpendicular a $\overline{BB'}$, caracterizando assim a diferença de $\frac{3\pi}{2}$ rad. Os triângulos BOC e B"OC" são congruentes, assim:

B"C" = OC e BC = C"O. $\widehat{AB} = x$ e $\widehat{AB''} = \frac{3\pi}{2} + x$

Conclusão:

$$\cos x = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$\text{sen}\, x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

Mais conclusões:

I. $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \frac{-\cos x}{\text{sen}\, x} = \text{cotg}\, x$

II. $\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \frac{\text{sen}\, x}{-\cos x} = \text{tg}\, x$

III. $\text{cossec}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{-\cos x} = \sec x$

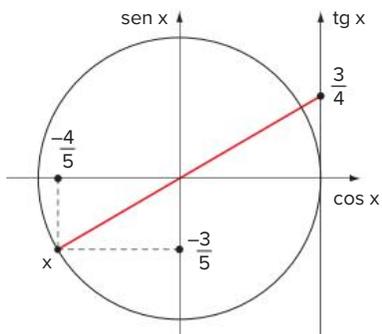
IV. $\sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\text{sen}\, x} = \text{cossec}\, x$

Exercícios resolvidos

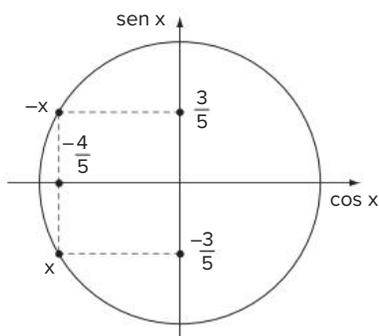
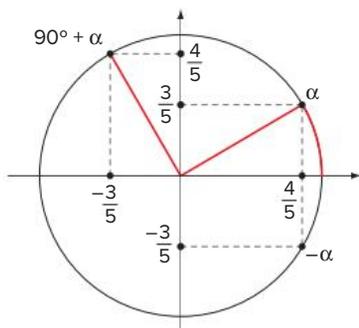
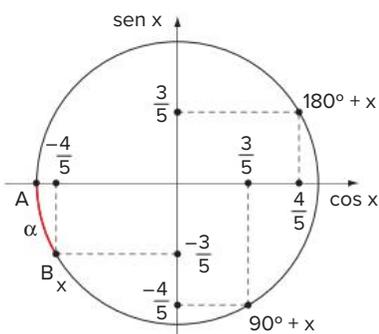
17 Sabendo que x é um arco do 3º quadrante e que $\text{tg}\, x = \frac{3}{4}$, calcule o valor da expressão:

$$\frac{\text{sen}(\ x)\ ^{\circ}\text{co+ssec}^2(180\ \ x)}{\sec^2(90° + x)} - \frac{\text{cotg}(270° + x)}{\text{tg}(180° - x)}$$

Resolução:

Para o assunto não ficar enfadonho com “decorebas” de fórmulas, vamos analisar cuidadosamente os arcos no ciclo trigonométrico e obter todos os resultados através de simetrias

Sabendo que $\text{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, temos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{4}{5} \text{ e } \text{sen}\, x = -\frac{3}{5}$$

sen (– x) = – sen x = $\frac{3}{5}$

Chamando $\overset{\frown}{AB} = \alpha$, temos: $180° + x = 180° + (180° + \alpha) =$ $= 360° + \alpha$.

Assim: $90° + x = 90° + 180° + \alpha = 270° + \alpha$.

Assim: $270° + x = 270° + 180° + \alpha = 360° + (90° + \alpha) =$ $= 90° + \alpha$.

Logo: $180° - x = 180° \quad (180° + \alpha) = -\alpha$.

$$\text{cossec}\left(180° + x\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(180° + x\right)} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{3}$$

$$\sec\left(90° + x\right) = \frac{1}{\cos\left(90° + x\right)} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{3}$$

$$\text{cotg}\left(270° + x\right) = \frac{1}{\text{tg}\left(270° + x\right)} = \frac{1}{\text{tg}\left(90° + \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(90° + \alpha\right)}{\text{sen}\left(90° + \alpha\right)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

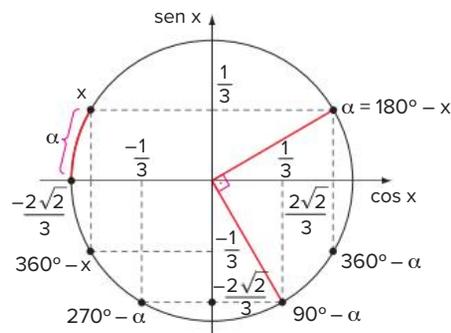
$$\text{tg}\left(180° - x\right) = \text{tg}\left(-\alpha\right) = \frac{\text{sen}\left(-\alpha\right)}{\cos\left(-\alpha\right)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Vamos agora calcular o valor da expressão:

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} \quad \frac{\left(\frac{-3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{5} = 1 \quad \frac{-2}{5}$$

18 Sabendo que x é um arco do 2º quadrante, tal que $\text{sen}\, x = \frac{1}{3}$, calcule o valor da expressão:

$$\frac{\text{sen}\left(180° \cdot x\right) \quad \text{cotg}\left(90° \quad x\right) \quad \cos\left(360 \quad x\right)}{\text{tg}\left(180° + x\right) \cdot \text{tg}\left(90° + x\right) \cdot \text{sen}\left(\quad x\right)}$$

Resolução:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \;= \frac{1}{9} \quad \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Fazendo x = 180° α, temos:

- $\text{sen}\left(180° \quad x\right) = \text{sen}\left(180° \quad 180° + \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$
- cos (360° – x) = cos (360° – 180° + α) =

  $= \text{sen}\left(180° + \alpha\right) \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}$

- $\text{sen}\left(\quad x\right) \quad \frac{1}{3}$
- $\text{cotg}\left(90° \quad x\right) \quad \frac{\cos\left(90° \quad x\right)}{\text{sen}\left(90° - x\right)} =$

  $= \frac{\cos\left(90° \quad 180° + \alpha\right)}{\text{sen}\left(90° - 180° + \alpha\right)} = \frac{\cos\left(\alpha \quad 90°\right)}{\text{sen}\left(\alpha - 90°\right)} =$

  $= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

- tg (180° + x) = tg (180° + 180° α) = tg (360° α) =

  $= \frac{\text{sen}\left(360° \quad \alpha\right)}{\cos\left(360° \quad \alpha\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

- tg (90° + x) = tg (90° + 180° α) = tg (270° α) =

  $= \frac{\text{sen}\left(270° \quad \alpha\right)}{\cos\left(270° - \alpha\right)} = \frac{\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

Substituindo os resultados na expressão, temos:

$$E(x) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{-1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Revisando

1 Considere o arco $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, tal que $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ Determine o valor da tg x.

2 Considere $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ e tg x = 3 Determine os valores de sen x e cos x

3 Conhecendo o arco x do 2º quadrante, tal que $\cos x = \frac{1}{3}$, determine as demais funções circulares trigonométricas conhecidas

4 Simplificar as seguintes expressões:

a) $\frac{\cos^3 x}{\text{sen}\,x \quad \text{sen}^3 x}$

b) $\frac{\text{sen}\,x \quad 2\text{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x}$

c) $\frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{cossec}^2 x}$

5 Sendo x + y = 90°, prove que:

$(\text{sen}\,x - \text{sen}\,y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = 2.$

Exercícios propostos

1 **PUC-SP** $\dfrac{\text{tg}x - \text{sen}x}{\text{sen}^3x}$ é igual a:

A $\dfrac{\sec x}{1 + \cos x}$

B $\dfrac{\sec x}{1 \quad \cos x}$

C $\dfrac{\text{sen}x}{1 + \cos x}$

D $\dfrac{\text{sen}x}{1 - \cos x}$

E $\dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$

2 **UEPG 2019** Considerando que

$A = 2\cos(4x) + \text{sen}(2x) + \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) \quad \sec(8x)$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$, $B = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + \text{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ e

$C = \text{tg}^2 x$, com $\text{sen}x = \dfrac{2}{3}$, assinale o que for correto.

01 A + B + C é um número positivo.
02 A e B são as raízes da equação $2x^2 \quad 3x \quad 2 = 0$.
04 A soma dos coeficientes do binômio $(A + 2Bx)^{10}$ é um
08 A área do retângulo com lados medindo A e C é um número primo

Soma:

3 **UFRGS** Se $\text{tg}a = \dfrac{1}{2}$ e $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, então cos a é igual a:

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

C $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

D $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

E $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4 **AFA** Se $\cos a = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ e cossec a < 0, então tg a + cotg a vale:

A $\dfrac{5}{2}$

B $\dfrac{-3}{2}$

C $\dfrac{3}{2}$

D $\dfrac{5}{2}$

E –1

5 **AFA** Se $\text{tg}\,x = \dfrac{1}{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, então (sen x) (cos x) é:

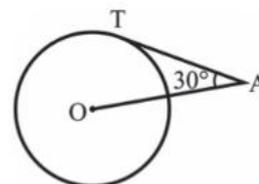
A $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

B $\dfrac{3}{10}$

C $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

D $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

E $\sqrt{10}$

6 **EEAR 2019** O segmento $\overline{AT}$ é tangente, em T, à circunferência de centro O e raio R = 8 cm. A potência de A em relação à circunferência é igual a   cm².

A 16
B 64
C 192
D 256

7 Verifique as identidades a seguir.

a) $\text{sen}\,x + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x} = \text{cossec}\,x$

b) $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 + (\text{sen}\,x \quad = \cos x)^2 \quad 2$

c) $1 + \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{1 \quad \text{sen}^2 x}$

d) $\dfrac{\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x}{\text{tg}\,x \quad \text{cotg}\,x} = \dfrac{\text{tg}^2 x + 1}{\text{tg}^2 x - 1}$

e) $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad = \text{cotg}^2 x \quad \dfrac{2\cos x - 1}{\cos^2 x \quad 1}$

f) $\dfrac{\cos x(\text{sen}\,x \quad 1)}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{\sec x} \quad \dfrac{1}{\text{tg}\,x}$

g) $\dfrac{\sec^2 x \quad 1}{\sec^2 x} + \dfrac{\text{sen}\,x\cos^2 x \quad \text{sen}\,x}{\text{sen}\,x} = 0$

h) $\sec x \quad \dfrac{\cos x}{1 + \text{sen}\,x} = \text{tg}\,x$

i) $(\sec x + \text{tg}\,x)^2 = \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{1 - \text{sen}\,x}$

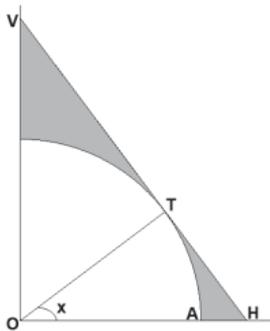
j) $(\text{cossec}\,x + \text{cotg}\,x)^2 = \dfrac{1 + \cos x}{1 \quad \cos x}$

k) $\sec^2 x + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x + \dfrac{1 + \text{tg}^2 x}{1 \quad + \text{cotg}^2 x}$

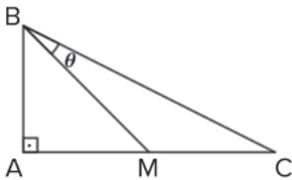
l) $(1 \quad \cdot \text{sen}\,x) \cdot (1 \quad \cdot \text{sen}\,x) \cdot (1 + \text{tg}^2 x) = 1$

m) $(1 \quad \cdot \cos x) \cdot (1 \quad \cdot \cos x) \cdot (1 + \text{cotg}^2 x) = 1$

n) $\dfrac{\cos x \quad \cos^3 x}{\text{sen}\,x - \text{sen}^3 x} = \dfrac{\text{sen}^3 x \quad \text{sen}^5 x}{\cos^3 x - \cos^5 x}$

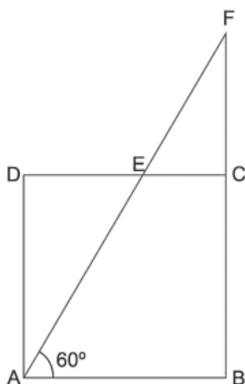
8 UFMS 2020 Um estudante de Arquitetura deseja fazer um projeto igual à área escura da figura a seguir:

Na figura, o arco $\overset{\frown}{AT}$ é igual a *x* e o segmento $\overline{HV}$ é perpendicular ao segmento $\overline{OT}$. Assim, o valor de $\overline{HV}$ é:

A sen x + tg x.
B cos x + tg x.
C cotg x + tg x.
D cotg x + sec x.
E cotg x + cossec x.

9 Unicamp 2020 A figura abaixo exibe o triângulo retângulo ABC, em que AB = AM = MC. Então, tg θ é igual a

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{5}$

10 Mackenzie 2018 Se $\cos x = \frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$, então o valor de tg x é igual a:

A $\frac{\sqrt{5}}{3}$
B $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
C $\frac{\sqrt{5}}{3}$
D $\frac{\sqrt{5}}{2}$
E $2\sqrt{5}$

11 Famema 2018 A figura mostra um quadrado ABCD, com 6 cm de lado, e um triângulo retângulo ABF de hipotenusa $\overline{AF}$, com o ponto F no prolongamento do lado $\overline{BC}$ e o ponto E sendo a interseção dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{AF}$.

fora de escala

Interbits®

Sabendo que o ângulo $F\hat{A}B$ mede 60°, a medida do segmento $\overline{CE}$ é

A $(\sqrt{3}+3)$ cm.
B $(2\sqrt{3}+3)$ cm.
C $2(3+\sqrt{3})$ cm.
D $2\sqrt{3}$ cm.
E $2(3-\sqrt{3})$ cm.

12 Fatec Se x e y são números reais, tais que:

$y = \frac{e^x - e^x \cdot tg^4 x}{\sec x - tg^2 x \cdot \sec x}$, então:

A $y = e^x$
B $y = e^x \ (1 + tg\ x)$
C $y = \frac{e^x}{\cos x}$
D $y = \frac{e^x}{\sec x}$
E $y = e^x \cdot tg\ x$

13 Udesc 2017 A expressão $\frac{\sec^2(x) \quad 1}{tg^2(x)+1} + \frac{cossec^2(x)+1}{cotg^2(x)+1}$ é igual a:

A $1 \quad 2\cos^2(x)$
B $3 + 2\cos^2(x)$
C $3 + 2\,sen^2(x)$
D 1
E $1 + 2\,sen^2(x)$

14 EEAR 2019 Simplificando a expressão sen (2π − x) + + sen (3π + x), obtém-se:

A sen x
B –sen x
C 2 sen x
D –2 sen x

15 UFPA Qual das expressões a seguir é idêntica a:

$\frac{1 \quad sen^2 x}{cotg\,x \cdot sen\,x}$?

A sen x
B cos x
C tg x
D cossec x
E cotg x

16 UFRN A expressão ($\sec^2 x \quad tg^2 x$) é equivalente a:

A 2
B 1
C zero.
D 1
E 2

17 **AFA** Simplifique a expressão:

$$\frac{\text{sen}x \cdot \cos^3 x + \text{sen}x}{\cos^2 x} \cdot \text{sen}x \ \ \cos^2 x \ \ \sec x \ \ \text{tg}x \ \ \sec x$$

encontra-se:

A zero.
B 1
C sen x
D cos x
E 1

18 **UFMS 2020** A expressão trigonométrica $\frac{\text{sen}^3 x \ \ \cos^3 x}{\text{sen}x \ \ \cos x}$ é equivalente a:

A $\text{sen}^2 x \ \ \cos^2 x$
B sen x + cos x.
C 1 – sen x · cos x.
D $\frac{\text{sen}x + \cos x}{\text{sen}x \ \ \cos x}$
E $\frac{\text{sen}\,2x}{2} + 1.$

19 Simplificando a expressão:

$$\text{sen}\frac{11\pi}{2} \ \frac{\cos(a+9\pi)\cdot \text{tg}\left(a+\frac{7\pi}{2}\right)}{\text{sen}(5\pi \ \ a)}$$, obtemos:

A $-\text{cossec}^2 a$
B $-\text{tg}^2 a$
C $\sec^2 a$
D $\text{cossec}^2 a$
E $\cos^2 a$

20 Se $\text{sen}x + \cos x = \frac{1}{2}$, calcule sen x · cos x.

21 Simplificar a expressão: $\frac{\log \text{sen}^4 x}{\log(1+\cos x)+\log(1 \ \ \cos x)}$

22 Determine θ, 0 ≤ θ < 2π, para que a equação na incógnita x, $x^2 \ \ (2\sec\theta)x + 1 = 0$, admita uma única raiz.

23 Para todo x real $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot \text{sen}(3\pi \ \ x)$ é igual a:

A sen x · cos x
B $2\text{sen}^2 x$
C $\text{sen}^2 x$
D sen x · cos x
E $\text{sen}^2 x$

24 **Faap** Sendo $\text{cossec}x = \sqrt{2}$ e x um arco do 1º quadrante, calcular tg x

25 **UFRJ** Achar os valores de x que verificam simultaneamente as igualdades: $\cos a = \frac{6x+2}{5}$ e $\text{cossec}\,a = \frac{5}{3x+2}$.

26 **Fatec** Se $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, x = tg t e y = cossec t.

Calcule y em função de x

27 **UFPR 2020** Seja x um arco no primeiro quadrante.

a) Encontre o valor de sen (x), sabendo que $\cos(x) = \frac{3}{8}$
b) Encontre o valor de sen (x), sabendo que 8tg (x) = = 3cos (x)

28 **UEMG 2018** Sobre trigonometria, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta as corretas.

I. $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \ \ 1.$
II. O valor de $(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x)$, para x ≠ kπ, com k inteiro, é igual a 1.
III. A medida do arco trigonométrico da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de medida −40°, é 40°.
IV. tg 50° · tg 310° < 0.

A Apenas I, II e IV
B Apenas I, II e III
C Apenas I e IV
D Apenas II e III

29 Sendo $\text{sen}x = \frac{1}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular o valor de:

$$y = \frac{1}{\text{cossec}x + \text{cotg}x} + \frac{1}{\text{cossec}x \ \ \text{cotg}x}$$

30 **UEM 2017** Sabendo-se que $\text{sen}x = \frac{3}{4}$ e que $\cos x > 0$, é correto afirmar que

01 *x* é um número real tal que $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi.$
02 $\cos^2 x = \frac{7}{8}.$
04 $\text{tg}x = -\frac{3\sqrt{7}}{7}.$
08 $\cos 2x = -\frac{1}{8}.$
16 sen (180° x) < 0.

Soma:

31 O dobro do seno de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é:

A $\frac{2}{3}$
B $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D $\frac{1}{2}$
E $\frac{\sqrt{3}}{3}$

32 **ITA** Se R denota o conjunto dos números reais e (a; b) o intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R} : a < \quad x \quad < b\}$, $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x}.$$

Se $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ é tal que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, então f(x) é igual a:

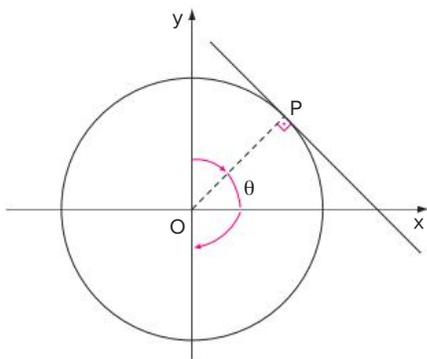
A $\frac{a+b}{2}$

B $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

C $\frac{a^2 \quad b^2}{ab}$

D $\frac{a^2 + b^2}{ab}$

E n.d.a.

33 **ITA** A equação da reta t, tangente à circunferência de raio r no ponto P, conforme figura a seguir, é dada por:

A $x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta = r$
B $x\operatorname{sen}\theta - y\cos\theta = -r$
C $x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta = -r$
D $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = r$
E $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = -r$

34 **ITA** Sejam a e b constantes reais e positivas. Considere $x = a^2 \cdot \operatorname{tg} t + 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t \quad b^2$, onde $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Então, uma relação entre x e y é dada por:

A $y = \frac{b}{a} \cdot (x-1)^2;\ x \ge a$

B $y = \frac{b^2}{a^4} \cdot (x-1)^2;\ x \ge 1$

C $y = \frac{b}{a^2} \cdot (x-1);\ \forall x \in \mathbb{R}$

D $y = \frac{-b}{a^2} \cdot (x-1);\ x \ge 1$

E $y = \frac{a^2}{b^4} \cdot (x-1);\ x \le 1$

35 **ITA** Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ fixado. Considere o conjunto

$$A = \left\{\frac{p}{q} : p,\ q \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 < q < n\right\}.$$

Definimos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = [\cos(n!\pi x)]^{2n}$.
Se f(A) denota a imagem do conjunto A pela função f, então:

A $f(A) =]\quad 1; 1[$
B $f(A) = [0; 1]$
C $f(A) = \{1\}$
D $f(A) = \{0\}$
E $f(A) = \{0; 1\}$

36 **Esc. Naval** Se $\cos x = \frac{3}{7}$ e x é tal que: $\frac{15\pi}{2} < x < \frac{31\pi}{4}$, logo o produto:
M = (sen x) · (tg x) · (cotg x) · (sec x) é igual a:

A $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

B $\frac{-2\sqrt{10}}{7}$

C $\frac{5}{3\sqrt{10}}$

D $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

E $\frac{\sqrt{10}}{4}$

37 Verificar que, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, se tem:

I. $\log \operatorname{tg} x + \log \operatorname{cotg} x = 0$

II. $2\log\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}x}{1 + \operatorname{sen}x}} + \log\cos^2 x = \log(1 - \operatorname{sen}x)^2$

38 **Fuvest** Dentre os números a seguir, o mais próximo de sen 50° é:

A 0,2
B 0,4
C 0,6
D 0,8
E 1,0

39 Sabendo-se que $\operatorname{tg}x = \frac{a}{b}$, calcular sen x, cos x e cotg x

40 O valor de $(\cos^2 1° + \cos^2 2° + \quad + \cos^2 89°) \quad (\operatorname{sen}^2 1° + \operatorname{sen}^2 2° + \quad + \operatorname{sen}^2 89°)$ é:

A 1
B 0
C 1
D 89
E impossível calcular sem uma tabela trigonométrica

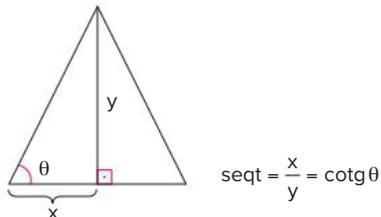
41 Dentre os valores a seguir, o que mais se aproxima do cos1 é:

A 0,80
B 1,15
C 0,90
D 0,45
E $\frac{\pi}{3}$

Texto complementar

Origens da Trigonometria

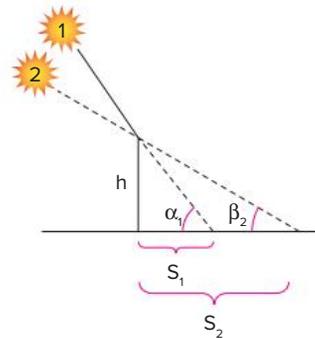
As funções trigonométricas tangente e cotangente surgiram das medições de alturas e distâncias Observe um exemplo extraído do papiro Rhind (1650 a.C.) que fornece as dimensões de uma pirâmide quadrada e pede o chamado *seqt*, que é o número obtido quando o *percurso* horizontal é dividido pela *elevação* vertical da face da pirâmide. Para os egípcios, o seqt era uma indicação da inclinação da face da pirâmide, o correspondente à cotangente Observe a figura abaixo

$$\text{seqt} = \frac{x}{y} = \text{cotg}\,\theta$$

Determinação do seqt.

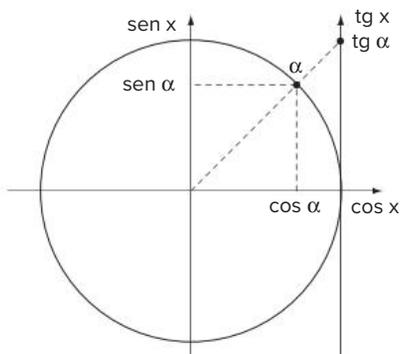
A ideia da tangente surgiu com o cálculo das sombras projetadas por uma vertical nos relógios de sol, usados no Egito já em 1500 a.C. Foi observado que elevações mais altas do Sol provocavam sombras menores.

De acordo com a figura abaixo: o tamanho da vara é constante (h), uma inclinação maior provoca uma sombra menor ($s_2 > s_1$).

Podemos relacionar o tamanho dessa sombra com a tangente dos ângulos Assim: $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{h}{s_1}$ e $\text{tg}\,\theta_2 = \frac{h}{s_2}$

Os egípcios tabelaram as sombras para uma determinada vara, o que era indiretamente uma tabela de valores da tangente para diversas inclinações (dependendo do horário).

Determinação da tangente

Resumindo

No ciclo trigonométrico, considere um arco α e observe a obtenção geométrica de seu seno, cosseno e sua tangente.

Todas as funções trigonométricas podem ser obtidas a partir do seno e do cosseno. Veja:

$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{cotg}x = \frac{\cos x}{\text{sen}x} \qquad \text{cossec}x = \frac{1}{\text{sen}x}$$

Relação fundamental da Trigonometria e suas variações:

$$\boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\boxed{1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x}$$

$$\boxed{\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x}$$

Quer saber mais?

Sites

- Clique em Trigonometria 1.1.
  Disponível em: <www.somatematica.com.br/softwares.php#>.
- Clique nas animações das funções seno e cosseno.
  Disponível em: <http://mat.ufpb.br/~lenimar/animacoes.htm>.

Exercícios complementares

1 Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e a, $b \in \mathbb{R}_+^*$, com a > b, calcule sen x, sabendo que $\text{cotg}x = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$.

2 **ITA** A expressão trigonométrica:

$$\frac{1}{\left(\cos^2 x \quad \text{sen}^2 x\right)^2} \qquad \frac{4\text{tg}^2 x}{\left(1 \quad \text{tg}^2 x\right)^2}$$

para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $x \neq \frac{\pi}{4}$, é igual a:

A $\text{sen}^2 x$ **B** $\cos^2 x$ **C** 1 **D** zero **E** sec x

3 Simplificar as expressões:

a) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} \quad x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} \quad x\right) \quad \cdot (\text{sen}x)\left[1 \quad \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} \quad x\right)\right]$

b) $1 \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \text{sen}x$

c) $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} \quad x\right) \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]^2 \cdot 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \quad x\right)$

d) $[\text{sen}(\pi - x) - \cos(\pi + x)]^2 \quad 2\text{sen}(2\pi \quad x) \cdot \cos(\pi + x)$

4 **UEM 2018** Sobre trigonometria, assinale o que for correto.

01 Se um mastro de navio está preso no seu topo, por um cabo de 10 m de comprimento, ao convés, a uma distância de 5 m, então o ângulo do cabo com o convés é de 60°.

02 $(1 + \text{tg}(x))(1 \quad \text{tg}(x)) \quad (\sqrt{2} \quad \sec(x))(\sqrt{2} \quad \sec(x))$, para todo *x* nos domínios das funções.

04 A função $f(x) = 3\,\text{sen}^2(x) + 2\cos^2(x)$ é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

08 A solução da equação $3\cos^2(2x)\text{sen}(2x) + 3\,\text{sen}^3(2x) = 3$ é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

16 Em uma pequena cidade há um aeroporto com uma pista de 1 km, ao final da qual há um prédio de 30 m de altura. Um monomotor precisa de 650 m para ganhar velocidade a fim de decolar, e a altura de segurança entre o avião e o prédio é de no mínimo 220 m. Assim, se o monomotor decolar a um ângulo de 30°, ele estará seguro

Soma:

5 Da relação $\left(\frac{\text{tg}a}{\text{sen}x} \quad \frac{\text{tg}b}{\text{tg}x}\right)^2 = \text{tg}^2 a \quad \text{tg}^2 b$, deduzir que $\cos x = \frac{\text{tg}b}{\text{tg}a}$

6 Simplificar a expressão: $\frac{2 \quad \text{sen}^2 x \quad \text{sen}^4 x}{3 \quad \cos^2 x}$.

7 **ITA** Eliminando θ nas equações:

$$\begin{cases} x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta = 2a\,\text{sen}\theta \\ x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\theta = a\cos\theta;\ a > 0, \text{ temos:} \end{cases}$$

A $(x + y)^{\frac{2}{3}} \quad (x \quad y)^{\frac{2}{3}} = 2a(x + y)^2$

B $(x + y)^2 + (x \quad y)^2 = (x + y)a$

C $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x \quad y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

D impossível eliminar θ.

E n.d.a.

8 Determinar $\cos^3 x + \text{sen}^3 x$, sabendo que:

$$\text{sen}\,x + \cos x = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

9 **AFA** Sabendo-se que $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, sen α = a e sen β = = b, então o valor da expressão sen $(\pi + \alpha) \quad \cos(2\pi - \beta)$ será igual a:

A $a + \sqrt{1 \quad b^2}$

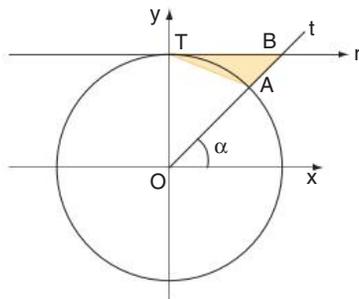
B $-a + \sqrt{1 - b^2}$

C $a - \sqrt{1 - b^2}$

D $a \quad \sqrt{1 \quad b^2}$

E $a\sqrt{1 - b^2}$

10 Se sen x + cos x = a, tal que sen x ≠ cos x, calcule o valor da expressão $\frac{\text{sen}^3 x - \cos^3 x}{\text{sen}\,x \quad \cos x}$ em função de a.

11 **Fuvest** Na figura, a reta r passa pelo ponto T = (0; 1) e é paralela ao eixo Ox. A semirreta Ot forma um ângulo α com o semieixo Ox (0° < a < 90°) e intercepta a circunferência trigonométrica e a reta r nos pontos A e B, respectivamente.

A área do △TAB, como função de α, é dada por:

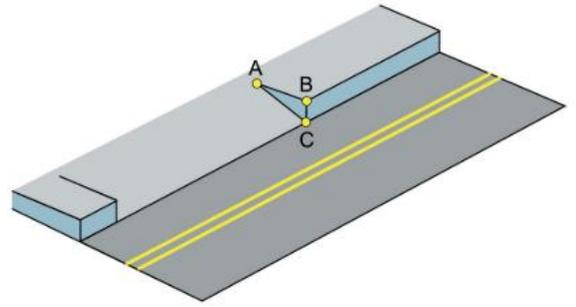
A $\frac{1 \quad \alpha\text{sen}}{2} \cdot \cos\alpha$

B $\frac{1 \quad \alpha\cos}{2} \cdot \text{sen}\,\alpha$

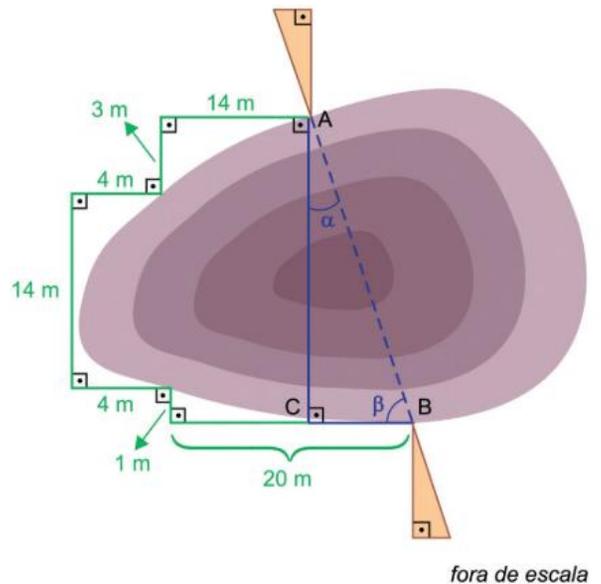
C $\frac{1 \quad \alpha\text{sen}}{2} \cdot \text{tg}\,\alpha$

D $\frac{1 - \text{sen}\,\alpha}{2} \cdot \text{cotg}\,\alpha$

E $\frac{1 \quad \alpha\text{sen}}{2} \cdot \text{sen}\,\alpha$

12 **Unifesp 2019** De acordo com a norma brasileira de regulamentação de acessibilidade, o rebaixamento de calçadas para travessia de pedestres deve ter inclina ção constante e não superior a 8,33% (1 : 12) em relação à horizontal. Observe o seguinte projeto de rebaixamento de uma calçada cuja guia tem altura BC = 10 cm

a) Calcule a medida de $\overline{AB}$ na situação limite da regulamentação.

b) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$ na situação em que a inclinação da rampa é de 5%. Deixe a resposta final com raiz quadrada

13 **Famerp 2019** Duas equipes de escavação vão perfurar um túnel $\overline{AB}$ em uma montanha, sendo que uma delas partirá de A e a outra de B, a fim de se encontrarem Para cavar nas direções corretas os engenheiros precisam determinar as medidas dos ângulos α e β, indicados na figura, que essa direção forma com as retas perpendiculares $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente.

Dados:

x	63,4°	68,2°	71,6°	74°	76°
tg x	2	2,5	3	3,5	4

De acordo com o projeto e com os dados fornecidos, α e β são, respectivamente, iguais a

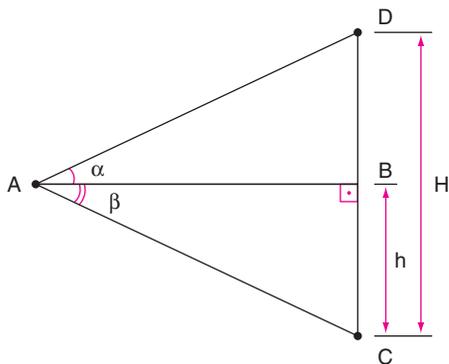
A 18,4° e 71,6°.

B 21,8° e 68,2°.

C 14° e 76°.

D 26,6° e 63,4°.

E 16° e 74°.

14 Para obter a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal AB e mediu os ângulos α e β, tendo a seguir medido $\overline{BC} = h$. Determinar a altura da chaminé

15 Determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo se os catetos são: $b = 2(1 + \text{sen}\,x) + \cos x$ e $c = 2(1 + \cos x) + {}$ $+ \text{sen}\,x$.

16 **ITA** Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), \text{ se } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \quad \dfrac{a}{x} \geq \text{sen}\,x, \text{ se } x \quad \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

onde $a > 0$ é uma constante.

Considere $K = \{y \in \mathbb{R};\ f(y) = 0\}$

Qual o valor de a, sabendo-se que $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \in K$?

A $\dfrac{\pi}{4}$

B $\dfrac{\pi}{2}$

C π

D $\dfrac{\pi^2}{2}$

E π^2

17 **ITA** Os valores de α; $0 < \alpha < \pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$, para os quais a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x^2 \quad 4x \quad tg^2\alpha$ assume seu valor mínimo igual a $\quad 4$ são:

A $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$

B $\dfrac{\pi}{5}$ e $\dfrac{2\pi}{5}$

C $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{2\pi}{3}$

D $\dfrac{\pi}{7}$ e $\dfrac{2\pi}{7}$

E $\dfrac{2\pi}{5}$ e $\dfrac{3\pi}{5}$

18 **UFSC 2019** É correto afirmar que:

01 A igualdade $tg^3x = tg\,x \cdot sec^2x - tg\,x$ é válida para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

02 Em maio de 2018, os jornais noticiaram uma forte manifestação dos caminhoneiros em todo o Brasil. Dias antes do início do movimento, os postos de combustíveis A e B vendiam o litro de gasolina a R$ 3,70 e R$ 4,00, respectivamente. Alguns dias depois do término da manifestação, esses preços alcançaram os valores, na devida ordem, de R$ 4,43 e R$ 4,80. Admitindo que o PROCON (Programa de Proteção e Defesa do Consumidor) considere que aumentos acima de 20% são abusivos, então os dois postos cometeram práticas abusivas

04 Um supermercado anuncia certo tipo de queijo em duas opções de preço. Na primeira, o pacote de 150 g custa R$ 3,00, enquanto que na segunda opção o pacote de 400 g custa R$ 7,20. Nessas condições, a segunda opção é mais vantajosa para o cliente

08 O valor numérico da expressão $\dfrac{a^2 - b^2}{\dfrac{a^2}{2} + ab + \dfrac{b^2}{2}}$ para $a = 5184$ e $b = 3888$ é $\dfrac{1}{14}$

Soma:

19 **ITA** Sejam a, b, $c \in \mathbb{R}^*$ com $a^2 = b^2 + c^2$ Se x, y e z satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} c \cdot \cos y + b \cdot \cos z = a \\ c \cdot \cos x + a \cdot \cos z = b \\ b \cdot \cos x + a \cdot \cos y = c \end{cases}$$

então $\cos x + \cos y + \cos z$ é igual a:

A $\dfrac{a \quad b}{c}$

B $\dfrac{a + b}{c}$

C $\dfrac{b + c}{a}$

D $\dfrac{c + a}{b}$

E $\dfrac{b^2 + c^2}{a}$

20 Sabendo que $\cos x = \dfrac{2m}{m^2 + 1}$, calcule tg x

21 Sabendo se que $\text{sen}\,x + \cos x = M$, calcule o valor das expressões a seguir

a) $\text{sen}\,x \quad \cos x$

b) $\text{sen}^3 x + \cos^3 x$

c) $\text{sen}^4 x + \cos^4 x$

d) $\text{sen}^5 x + \cos^5 x$

22 Demonstrar que, se $\dfrac{a}{\text{sen}\,x} = \dfrac{b}{\cos x} = \dfrac{c}{tg\,x}$, temos:

$$a^2(a^2 + b^2) = b^2c^2.$$

23 Verificar a identidade a seguir:

$$\frac{1}{3}\left(\text{sen}^6x + \cos^6x\right) - \frac{1}{4}\left(\cos^2x - \text{sen}^2x\right)^2 = \frac{1}{12}$$

24 Verificar a identidade a seguir:

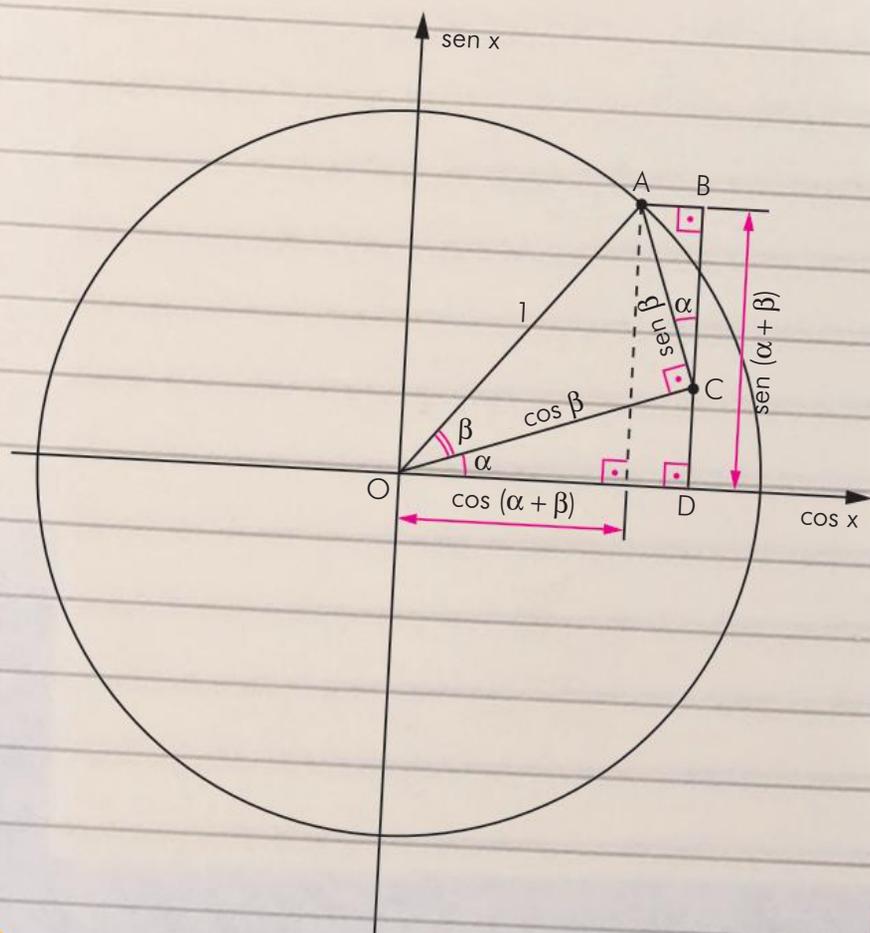
$$2\cos^8x \quad 2\text{sen}^8x + 3\text{sen}^6x \quad 5\cos^6x + 3\cos^4x = \text{sen}^2x$$

25 Verificar a identidade a seguir:

$$\left(\frac{1}{\cos x + tg^2x \cdot \text{sen}\,x} \quad \frac{1}{\cos x \cdot \cotg^2x + \text{sen}\,x}\right) \cdot \left(\frac{\sec x \quad \text{cossec}\,x \quad 1}{\text{cossec}\,x - \sec x}\right) = 1$$

26 Sendo $\text{sen}\,x = a$ e $tg\,x = b$, demonstre que: $(1 \quad a^2) \cdot (1 + b^2) = 1$.

27 Sabendo que x é um arco do 2º quadrante e que $\cos x = \dfrac{5}{13}$, demonstre que:

$$\frac{\text{sen}(180° - x)}{\sec(270° + x)} + \frac{\cos(360° - x)}{\text{cossec}(270° \quad x)} = \frac{119}{169}$$

FRENTE 1

CAPÍTULO

10

Adição e subtração de arcos

As fórmulas de soma e subtração de arcos podem ser utilizadas para produzir resultados importantes no relacionamento entre as funções trigonométricas de arcos do primeiro quadrante e, também, entre arcos do primeiro e do segundo quadrantes.

A partir das fórmulas da soma dos arcos, podemos deduzir relações importantes para seno, cosseno e tangente dos chamados arcos duplos.

Seno da soma

Não podemos dizer que sen (a + b) = sen a + sen b para quaisquer a e b reais. Vamos calcular geometricamente o valor de sen (a + b). Observe a figura.

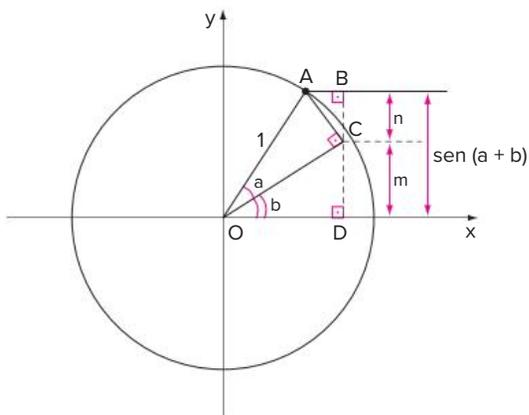



Fig. 1 Cálculo do sen (a + b).

Pela figura, percebemos que sen (a + b) = m + n Vamos ampliar a figura dos triângulos.

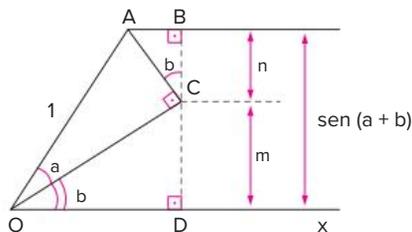



Fig. 2 Cálculo do sen (a + b).

No ΔAOC, temos $\cos a = \dfrac{OC}{1} \Rightarrow OC = \cos a$.

No ΔCOD, $\text{sen } b = \dfrac{m}{OC} \Rightarrow \text{sen } b = \dfrac{m}{\cos a} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \text{sen } b \cdot \cos a$

No ΔAOC, $\text{sen} a = \dfrac{AC}{1} \Rightarrow AC = \text{sen } a.$

No ΔABC, temos $\cos b = \dfrac{n}{AC}$;

Assim, n = sen a   cos b.

> sen (a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a

Exercício resolvido

1 Calcule sen (75°).

Resolução:

sen (75°) = sen (45° + 30°) =
sen 45°   cos 30° + sen 30°   cos 45° =

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

> **! Atenção**
>
> Para a continuidade das demonstrações, não se esqueça de que a **função seno é ímpar**, ou seja, sen (–x) = –sen x, e a **função cosseno é par**, ou seja, cos (–x) = cos x.
>
> Lembre-se:
>
> *f* é ímpar se, $\forall x \in R$, f(–x) = –f(x)
>
> *f* é par se, $\forall x \in R$, f(–x) = f(x)

Vamos calcular agora sen (a – b) a partir do resultado de sen (a + b). Observe.

sen (a   b) = sen [a +(–b)] = sen a · cos (–b) + sen (–b) · cos a
Mas: cos (b) = cos b e sen (b) = –sen b.
Assim: sen (a   b) = sen a · cos b   sen b · cos a.
Agora, o seno do arco dobro:
sen (2a) = sen (a + a) = sen a · cos a + sen a · cos a
Assim: sen (2a) = 2 sen a · cos a.

> sen (a   b) = sen a   cos b   sen b   cos a
> sen (2a) = 2sen a   cos a

Cosseno da soma

Utilizando a mesma ideia do seno, observe novamente esta figura

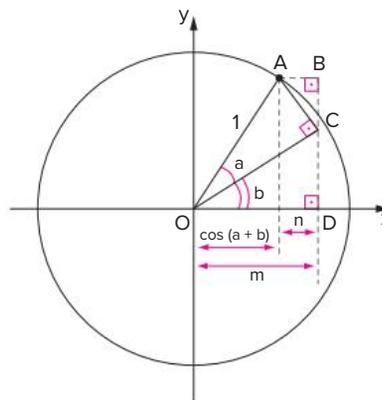
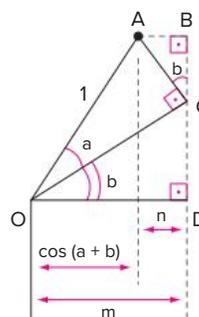



Fig. 3 Cálculo do cos (a + b).

Pela figura 3, concluímos que: cos (a + b) = m – n. Vamos detalhar os triângulos.

Fig 4 Cálculo do cos (a + b)

No ΔOAC, temos sen a = AC e cos a = OC.

No ΔOCD, temos: $\cos b = \dfrac{m}{OC}$.

$$\cos b = \frac{m}{\cos a} \Rightarrow m = \cos a \cdot \cos b$$

No ΔABC, temos:

$$\text{sen} b = \frac{n}{AC} \Rightarrow \text{sen} b = \frac{n}{\text{sen} a} \Rightarrow n = \text{sen} a \cdot \text{sen} b$$

cos (a + b) = cos a · cos b   sen a · sen b

Exercício resolvido

2 Calcule sec 75°.

Resolução:

$\sec 75° = \dfrac{1}{\cos(75°)}$ e cos 75° = cos (45° + 30°)

$\cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, assim:

$$\sec 75° = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{\sqrt{6} \quad \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{6 - 2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Vamos calcular cos (a   b) a partir do resultado dos cos (a + b) Observe:

cos (a   b) = cos [a + (–b)] =

= cos a   cos (b)   sen a   sen (b)

Mas:

cos (–b) = cos b e sen (b) = –sen b

Assim:

cos (a   b) = cos a   cos b + sen a   sen b

Agora o cosseno do arco dobro:

cos (2a) = cos (a + a) = cos a   cos a   sen a   sen a

Assim: cos 2a = $\cos^2$ a sen^2 a.

cos (a   b) = cos a · cos b + sen a · sen b
cos (2a) = $\cos^2$ a sen^2 a

Exercícios resolvidos

3 Demonstre a identidade:

sen (a + b) · sen (a – b) = $\cos^2$ b – $\cos^2$ a

Resolução:

$(\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a) \cdot (\text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a) =$
$= \text{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \text{sen}^2 b \cdot \cos^2 a =$
$= (1 - \cos^2 a) \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 b) \cdot \cos^2 a =$
$= \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 a \cdot \cos^2 b =$
$= \cos^2 b - \cos^2 a$

4 Se $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{4}$, calcule cos x

Resolução:

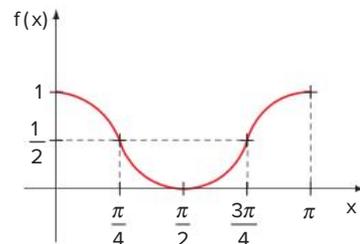
$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \left(1 \quad \cos^2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \mp 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 \mp \frac{1}{8}$$

5 Construa o gráfico da função f(x) = $\cos^2$ x.

Resolução:

Lembre-se de que sabemos construir geometricamente os gráficos: f(x) = a + b·cos(cx + d).
Vamos transformar $\cos^2$x na expressão f(x).
Demonstramos que:
$\cos^2 x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

6 Calcule o valor da expressão:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \text{sen}(\alpha + 45°)}{\cos\alpha} - \text{tg}\alpha, \text{ com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Resolução:

$$\frac{\sqrt{2}\left(\text{sen}\alpha \cdot \cos 45° + \text{sen} 45° \cdot \cos\alpha\right)}{\cos\alpha} \quad \text{tg}\alpha$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)}{\cos\alpha} - \text{tg}\alpha =$$

$$\frac{\text{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} - \text{tg}\alpha = \text{tg}\alpha + 1 - \text{tg}\alpha = 1$$

7 Calcule o período da função:

f(x) = (cos 2x + sen 2x) · (cos 2x – sen 2x)

Resolução:

Em uma função do tipo f(x) = a + b cos(cx + d), o período vale $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

Vamos transformar a função f(x) = $\cos^2$2x – $\text{sen}^2$2x em alguma de modelo:

f(x) = cos(2x + 2x) = cos 4x

Assim, $p = \dfrac{2\pi}{|c|} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

8 Calcule o período e a amplitude das seguintes funções

a) f(x) = sen x + cos x

b) $f(x) = \sqrt{3}\ \text{sen}x + \cos x$

Resolução:

Vamos transformar as expressões *a* e *b* no seno da soma

Observe:

a) $f(x) = \text{sen}x + \cos x =$

$$= \left[\text{sen}x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x\right]\frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot[\text{sen}x\cdot\cos 45° + \text{sen}45°\cdot\cos x] =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\text{sen}(x + 45°)$$

Amplitude = $\sqrt{2}$ e período = 2π.

b) $f(x) = \sqrt{3}\ \text{sen}x + \cos x =$

$$\left[\text{sen}x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cos x\right]\cdot 2$$

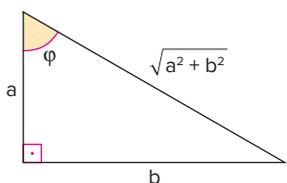
$$2\cdot\left[\text{sen}x\cdot\cos 30° + \text{sen}30°\cdot\cos x\right] = \ 2\text{sen}(x + 30°)$$

Amplitude = 2 e período = 2π.

! Atenção

Podemos generalizar o exercício resolvido 8 Observe:

f(x) = a · sen x + b · cos x

Construa um triângulo retângulo com catetos *a* e *b*.

Nesse triângulo, temos:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ e } \text{sen}\ \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Assim: f(x) = a sen x + b cos x

$$f(x) = \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\text{sen}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right]\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[\text{sen}x\cdot\cos\varphi + \text{sen}\varphi\cdot\cos x\right]$$

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\text{sen}(x+\varphi)$$

Amplitude = $\sqrt{a^2+b^2}$ e período = 2π.

Tangente da soma

Sabemos que $\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$,

então $\text{tg}(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{tg}(a+b) = \frac{\text{sen a}\cdot\cos b + \text{sen b}\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b\ \ \cdot\text{sen a sen b}}\ \begin{matrix} : (\cos a\cdot\cos b) \\ : (\cos a\cdot\cos b)\end{matrix}$$

Logo:

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\frac{\text{sena}\cdot\text{cosb}}{\text{cosa}\cdot\text{cosb}} + \frac{\text{senb}\cdot\text{cosa}}{\text{cosa}\cdot\text{cosb}}}{1 - \frac{\text{sena}}{\cos\cdot a}\cdot\frac{\text{senb}}{\text{cosb}}} =$$

$$= \frac{\frac{\text{sena}}{\text{cosa}} + \frac{\text{senb}}{\text{cosb}}}{1\ \left(\frac{\text{sena}}{\text{cosa}}\right)\cdot\left(\frac{\text{senb}}{\text{cosb}}\right)} \Rightarrow \text{tg}(a+b) = \frac{\text{tga}+\text{tgb}}{1-\text{tga}\cdot\text{tgb}}$$

! Atenção

A função tangente é ímpar, pois:

$$\text{tg}(\ \ x) = \frac{\text{sen}(\ \ x)}{\cos(-x)} = \frac{\ \text{sen}x}{\cos x} = \ \ \text{tg}x;$$

∀x ∈ domínio.

Vamos calcular agora tg (a b) a partir do resultado tg (a + b).

Observe:

$$\text{tg}(a\ \ b) = \text{tg}[a\ \ (\ \ b)] = \frac{\text{tga}+\text{tg}(-b)}{1\ \ \text{tga}\ \text{tg}(\ \ b)};$$

como tg (b) = tg b, temos: $\text{tg}(a\ \ b) = \frac{\text{tga}-\text{tgb}}{1+\text{tga}\cdot\text{tgb}}$.

Agora, a tangente do arco dobro:

$$\text{tg}(2a) = \text{tg}(a+a) = \frac{\text{tga}+\text{tga}}{1-\text{tga}\cdot\text{tga}} = \frac{2\text{tga}}{1\ \ \text{tg}^2 a}$$

! Atenção

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tga}+\text{tgb}}{1-\text{tga}\cdot\text{tgb}}$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tga}-\text{tgb}}{1+\text{tga}\ \text{tgb}}$$

$$\text{tg}2a = \frac{2\text{tga}}{1\ \ \text{tg}^2 a}$$

Exercícios resolvidos

9 Se tg x = m e tg 2x = 3m, m > 0, determine a medida do ângulo agudo *x*.

Resolução:

$$\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 \quad \mathrm{tg}^2 x} = 3m \Rightarrow \frac{2m}{1 \quad m^2} = 3m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1-m^2} = 3 \Rightarrow 2 = 3 - 3m^2 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mathrm{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}$$

10 Simplifique a seguinte expressão:

$$\frac{\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x} + \frac{\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$$

Resolução:

Tirando o mínimo, temos:

$$\frac{\mathrm{tg}x(1 + \mathrm{tg}x) + \mathrm{tg}x(1 \quad \mathrm{tg}x)}{(1+\mathrm{tg}x)(1-\mathrm{tg}x)} = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 \quad \mathrm{tg}^2 x},$$

que é igual a tg 2x.

11 Prove que em um triângulo não retângulo, cujas medidas dos ângulos internos são α, β e γ, vale a relação:

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta \cdot \mathrm{tg}\,\gamma$$

Resolução:

Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; então, $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ e tg $(\alpha + \beta) = -\mathrm{tg}\,\gamma$.

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} = \quad \mathrm{tg}\gamma$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \ +\mathrm{tg}\gamma \ \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \ \ \mathrm{tg}\gamma \cdot \mathrm{g}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma =$$

$$= \mathrm{tg}\,\alpha \quad \mathrm{tg}\,\beta \quad \mathrm{tg}\,\gamma$$

12 Demonstrar a identidade:

$$\mathrm{tg}(45^\circ + x) \cdot \mathrm{cotg}(45^\circ - x) = \frac{1+\mathrm{sen}2x}{1-\mathrm{sen}2x}$$

Resolução:

Vamos trabalhar com o lado esquerdo até provarmos que ele é igual ao lado direito da igualdade.

$$\mathrm{tg}(45^\circ + x) \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}(45^\circ - x)} =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{tg}45^\circ + \mathrm{tg}x}{1 \quad \cdot \mathrm{tg}45^\circ \ \ \mathrm{tg}x}\right) \cdot \left(\frac{1+\mathrm{tg}45^\circ \cdot \mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}45^\circ \quad \mathrm{tg}x}\right) =$$

$$\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x} \cdot \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x} = \left(\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}}{1-\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\frac{\cos x + \mathrm{sen}x}{\cos x}}{\frac{\cos x - \mathrm{sen}x}{\cos x}}\right)^2 = \left(\frac{\cos x + \mathrm{sen}x}{\cos x - \mathrm{sen}x}\right)^2 =$$

$$= \frac{(\cos x + \mathrm{sen}x)^2}{(\cos x - \mathrm{sen}x)^2} = \frac{\cos^2 x + 2\cos x \cdot \mathrm{sen}x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x - 2\cos x \cdot \mathrm{sen}x + \mathrm{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{1+\mathrm{sen}2x}{1 \quad \mathrm{sen}2x} \quad \text{(c.q.d.)}$$

13 Se tg (x + y) = 33 e tg x = 3, calcule o valor da tg y.

Resolução:

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 \ \cdot \mathrm{tg}x \ \ \mathrm{tg}y} = 33 \Rightarrow \frac{3+\mathrm{tg}y}{1 \quad 3\mathrm{tg}y} = 33$$

3 + tg y = 33 – 99 tg y ⇒ 100 tg y = 30 ⇒ tg y = 0,3

14 Sabendo-se que $\mathrm{tg}^2 x = \frac{9}{16}$ e que $\mathrm{tg}^2 y = \frac{84}{16}$, calcule o valor de tg (x + y) · tg (x y).

Resolução:

$$\mathrm{tg}(x+y) \cdot \mathrm{tg}(x \quad y) = \left(\frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 \ \cdot \mathrm{tg}x \ \ \mathrm{tg}y}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{tg}x \quad \mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}\right) =$$

$$\frac{\mathrm{tg}^2 x \quad \mathrm{tg}^2 y}{1-\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 y} = \frac{\frac{9}{16} \quad \frac{84}{16}}{1 \ \cdot \frac{9}{16} \ \frac{84}{16}} = \frac{\frac{-75}{16}}{\frac{125}{64}} = \frac{12}{5}$$

Transformação da soma em produto

A fatoração é uma técnica de grande importância que foi estudada e muito utilizada desde o primeiro capítulo.

Apresentaremos agora as chamadas fórmulas de prostaférese (adição e subtração).

Vamos construir uma tabela com as relações já demonstradas.

sen (a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a	(1)
sen (a – b) = sen a · cos b – sen b · cos a	(2)
cos (a + b) = cos a · cos b – sen a · sen b	(3)
cos (a – b) = cos a · cos b + sen a · sen b	(4)

Tab. 1 Tabela de relação entre arcos.

Associando as fórmulas somando ou subtraindo, temos:

(1) + (2): sen (a + b) + sen (a b) = 2 sen a cos b
(1) (2): sen (a + b) sen (a b) = 2 sen b cos a
(3) + (4): cos (a + b) + cos (a b) = 2 cos a cos b
(3) (4): cos (a + b) cos (a b) = 2 sen a sen b

Chamando a + b = α e a b = β, temos $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $b = \frac{\alpha-\beta}{2}$ Substituindo, obtemos:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{sen}\,\alpha \quad \text{sen}\,\beta \quad 2\ \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \quad 2\ \text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Vamos obter transformações de soma em produto para as tangentes:

$$\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$\text{tg}\,\alpha \quad \text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \quad \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta \quad \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha \quad \text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}(\alpha \quad \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Exercícios resolvidos

15 Transforme em produto a expressão: sen 5x + sen 3x.

Resolução:

$$\text{sen}\,5x + \text{sen}\,3x = 2\text{sen}\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x \quad 3x}{2}\right) =$$

$$= 2\ \text{sen}\ 4x \cdot \cos x$$

16 Transforme em produto a expressão: cos 70° sen 60°

Resolução:

$$\cos 70° \quad \cos 30° \quad 2\ \text{sen}\left(\frac{70°+30°}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{70°-30°}{2}\right) =$$

$$= \quad 2 \quad \text{sen}\ 50° \quad \text{sen}\ 20°$$

17 Transforme em produto a expressão: sen x cos x.

Resolução:

$$\text{sen}\,x - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cdot \text{sen}\left[\frac{x \quad \frac{\pi}{2} + x}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{x + \frac{\pi}{2} \quad x}{2}\right]$$

$$2\text{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\ \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

18 Simplifique a expressão $y = \frac{\text{sen}\,a + \text{sen}\,b}{\cos a + \cos b}$

Resolução:

$$y = \frac{2\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a \quad b}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \text{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

19 Transforme em produto a expressão: $y = \cos^2 3x \quad \cos^2 x$

Resolução:

$$y = (\cos 3x - \cos x) \cdot (\cos 3x + \cos x) =$$

$$= 2\text{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3x \quad x}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$

$$= -4\text{sen}\ 2x \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos 2x \cdot \cos x =$$

$$= \quad 2\text{sen}\ 2x\ \cos 2x\ 2\text{sen}\ x\ \cos x =$$

$$= -\text{sen}\ 4x \cdot \text{sen}\ 2x$$

Revisando

1 Calcule sen 105°.

2 Sendo $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{5}{13}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$, calcule cos (x + y).

3 Simplificar a expressão $\cos^2(a + b) + \cos^2 b - 2\cos(a + b) \cdot \cos a \cdot \cos b$.

4 Demonstrar a identidade $\frac{1 + \text{sen}\,x}{1 \quad \text{sen}\,x} = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

5 Demonstrar a identidade $\frac{\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x + \text{sen}\,5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \text{tg} \cdot 3x$

Exercícios propostos

1 **EEAR 2016 O** valor correspondente ao cos 15° é

A $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

B $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D 1

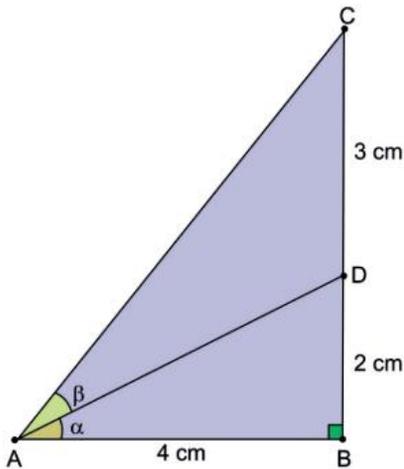
2 **EEAR 2016** O valor de cos 735° é

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

D $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

3 **Uefs 2018** No triângulo retângulo ABC, AB = 4 cm e o segmento AD divide o ângulo BÂC em dois ângulos de medidas α e β. D é um ponto do cateto BC, tal que CD = 3 cm e DB = 2 cm, conforme mostra a figura

Dada a identidade trigonométrica

$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$, o valor de tg$\alpha$ é:

A $\frac{2}{7}$

B $\frac{3}{8}$

C $\frac{4}{9}$

D $\frac{5}{11}$

E $\frac{6}{13}$

4 **Fuvest** Calcule:

a) sen15°.

b) a área do polígono regular de 24 lados inscrito no círculo de raio 1.

5 **FCMS/JF 2017** A expressão cotg 16° + tg 8° é igual a:

A cossec 16°

B sen 16°

C sen 8°

D cos 8°

6 **UFPR 2019** Sejam $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tais que $\cos(x)=\frac{4}{5}$ e $\text{sen}(y)=\frac{5}{13}$. Podemos concluir que $\text{tg}(x+y)$ é igual a:

A $1/2$

B $7/6$

C $8/9$

D $25/52$

E $56/33$

7 **Uece 2018** Se *x* é tal que $\text{tg}\frac{x}{2}=z$ então, é correto afirmar que cos x é igual a

A $\frac{z^2}{1+z^2}$

B $\frac{1\ \ z^2}{1+z^2}$

C $\frac{z^2}{1+2z^2}$

D $\frac{1-z^2}{1+2z^2}$

8 Se $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, então $(1+\text{tg}\,\alpha)\cdot(1+\text{tg}\,\beta)$ é igual a:

A 1

B 2

C 2 tgα

D 3 tgβ

E 0

9 **Fuvest** O valor de (sen 22°30' + cos 22°30')^2 é:

A $\frac{3}{2}$

B $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

D 1

E 2

10 **EsPCEx 2018** Considere o triângulo com ângulos inter nos *x*, 45° e 120°. O valor de tg^2 (x) é igual a

A $\sqrt{3}\quad 2$

B $4\sqrt{3}-7$

C $7\quad 4\sqrt{3}$

D $2\quad \sqrt{3}$

E $2-4\sqrt{3}$

11 **ITA 2020** Seja *a* um número real satisfazendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de x ∈ [0, 2π] que satisfazem a equação cosx sen (a + x) = sen a é igual a

A 5π + 2a

B 5π + a

C 5π

D 5π – 2

E 5π 2a

12 A expressão sen (135° + x) + sen (135° x) é igual a:

A $\sqrt{2}\text{senx}$

B $\sqrt{3}\cos x$

C –1

D $\sqrt{2}\cos x$

E $\alpha\sqrt{2}\text{senx}$

13 Sejam os números reais *a* e *b* tal que

$$\{a, b\} \subset]0, \frac{\pi}{2}[\text{ e } tga = \frac{3}{4} \text{ e } secb = \frac{13}{5}.$$

O valor da expressão 65·sen (a + b) é:

A 65

B 64

C 63

D 62

E 61

14 **EEAR 2019** Simplificando a expressão sen(2π – x) + + sen(3π + x), obtém-se

A sen x

B sen x

C 2 sen x

D 2 sen x

15 O valor da expressão $7\sqrt{2}\left(\cos^4 22{,}5^\circ \quad \text{sen}^4 22{,}5^\circ\right)$ é:

A 5

B 6

C 7

D 8

E 9

16 **UCPel 2017** Se tgα = 2 com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então sen2α é igual

A $\frac{4}{5}$

B $\frac{5}{4}$

C $\frac{5}{3}$

D $\frac{2}{5}$

E $\frac{4}{3}$

17 Seja a função dada por $f(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$. Determine o período da função *f*.

18 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & \text{senx} & 0 \\ 0 & 2 & \cos x \end{pmatrix}$, onde *x* varia no conjunto dos números reais.

Calcule:

a) o determinante da matriz A

b) o valor máximo e o valor mínimo deste determinante.

19 **FGV 2017** A única solução da equação sen 2x · sen 3x = = cos 2x cos 3x com 0° < x ≤ 90°é

A 72°

B 36°

C 24°

D 18°

E 15°

20 Transforme o produto cos 2x · cos 4x em uma soma equivalente.

21 Demonstre que $\text{sen}^2 24^\circ \quad \text{sen}^2 6^\circ$ é igual a $\frac{\text{sen } 18^\circ}{2}$

22 Transforme as seguintes expressões em produto.

a) y = 1 + sen x.

b) y = 1 + cos x.

c) y = 1 + sen 2x

d) y = sen x + cos x.

e) y = sen a + 2sen 3a + sen 5a.

Texto complementar

Trigonometria e números complexos

Após estudar o capítulo 12 da frente 2, mais precisamente a representação trigonométrica e a fórmula de potenciação dos números complexos, podemos fazer relações interessantes entre as teorias.

Sabendo-se que o número complexo $z = x + i \cdot y$, x e $y \in \mathbb{R}$, pode ser representado como $z = |z| \cdot (\cos\theta) + i \operatorname{sen}\theta) = |z| \cdot \text{cis}\,\theta$, e que z^n, com $n \in \mathbb{N}$, é dado por $z^n = |z|^n \;\; \text{cis}\,(n\theta)$, observe as análises:

a) $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i \operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta \cdot i^2 \operatorname{sen}^2\theta + i3 \cdot \operatorname{sen}^3\theta = (\cos^3\theta - 3\cos\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta)$.

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos, de maneira inusitada, os resultados de:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta \text{ e } \operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

b) Calcule sen x + sen 2x + sen 3x + sen 4x + sen 5x e cos x + cos 2x + cos 3x + cos 4x + cos 5x cis x + cis 2x + cis 3x + cis 4x + cis 5x É uma PG de razão cis x, assim:

$$\text{cis}\,x + \text{cis}\,2x + \text{cis}\,3x + \text{cis}\,4x + \text{cis}\,5x = \text{cis}\,x \cdot \frac{\left[(\text{cis}\,x)^5 \quad 1\right]}{\text{cis}\,x \quad 1}$$

$$(\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x) + i(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x) = \frac{(\text{cis}\,x)\cdot(\text{cis}\,5x - 1)}{\text{cis}\,x - 1} =$$

$$= \frac{(\text{cis}\,x)\cdot(\text{cis}\,5x \quad 1)}{(\cos x \quad 1) \quad i\operatorname{sen} x} = \frac{\text{cis}\,x \cdot (\text{cis}\,5x \quad 1)}{-2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + 2i\operatorname{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \frac{\text{cis}\,x(\text{cis}\,5x \quad 1)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} \quad i\cos\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{i\,\text{cis}\,x \cdot (1 - \text{cis}\,5x)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2} \;\; \text{cis}\frac{x}{2}} = \frac{i \cdot \text{cis}\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot (1 \quad \text{cis}\,5x) \quad \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{11x}{2} \quad \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right) + i \cdot \left(\frac{\cos\frac{x}{2} \quad \cos\frac{11x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right)$$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos os seguintes resultados:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{11x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = \frac{\operatorname{sen}\frac{11x}{2} \quad \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Resumindo

Identidades fundamentais das quais você pode obter todas as outras.

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$
- $\operatorname{sen}(a \quad b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \quad \operatorname{sen} b \cdot \cos a$
- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a \cdot \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
- $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 \quad \operatorname{tg} a \;\; \operatorname{tg} b}$
- $\operatorname{tg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$
- $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 \quad \operatorname{tg}^2 a}$
- $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p \quad q}{2}\right)$
- $\operatorname{sen} p \quad \operatorname{sen} q \quad 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p \quad q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
- $\cos p + \cos q = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p \quad q}{2}\right)$
- $\cos p \quad \cos q \quad 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{p \quad q}{2}\right)$

Quer saber mais?

Livro

- **BEZERRA, Manoel Jairo**. "Trigonometria" *In*: *Matemática para o Ensino Médio* São Paulo: Scipione, 2001 p 165 7

Exercícios complementares

1 Vunesp

a) Demostre a identidade:

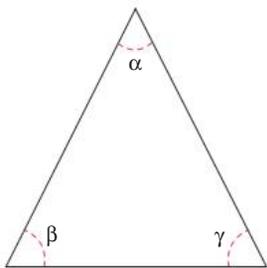
$$\left[\sqrt{2}\cdot\mathrm{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{sen}x \quad \cos x\right]$$

b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a equação: $\sqrt{2}\cdot(\mathrm{sen}x \quad \cos x)=m^2 \quad 2$ admite solu ções.

2 Mackenzie Dentre as afirmações a seguir:

I. $\mathrm{sen}^2\left[\left(\frac{\pi}{7}\right) \quad x\right]+\mathrm{sen}^2\left[\left(\frac{5\pi}{14}\right)+x\right]=1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

II o maior valor real que 4 elevado ao expoente senx cosx pode assumir é 2

III no triângulo a seguir, não retângulo, $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}\,\alpha \quad \mathrm{tg}\,\beta \quad \mathrm{tg}\,\gamma.$

A todas são verdadeiras.
B todas são falsas.
C somente a III é falsa.
D somente a II é falsa.
E somente a I é falsa.

3 Mackenzie A soma dos valores inteiros de k para que a equação $\sqrt{3}\mathrm{sen}x+\cos x=k \quad 3$ apresente soluções reais é:

A 7
B 10
C 13
D 15
E 20

4 Fuvest Os números reais $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\mathrm{sen}\,a$, $\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética Então, o valor de $\mathrm{sen}\,a$ é:

A $\frac{1}{4}$
B $\frac{\sqrt{3}}{6}$
C $\frac{\sqrt{2}}{4}$
D $\frac{\sqrt{6}}{4}$
E $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 ITA 2019 Considere um retângulo ABCD em que o comprimento do lado AB é o dobro do comprimento do lado BC. Sejam M o ponto médio de BC e N o ponto médio de CM. A tangente do ângulo MÂN é igual a

A $\frac{1}{35}$
B $\frac{2}{35}$
C $\frac{4}{35}$
D $\frac{8}{35}$
E $\frac{16}{35}$

6 Se $\cos(\alpha+\beta)=0$, então $\mathrm{sen}(\alpha+2\beta)$ pode ser igual a:

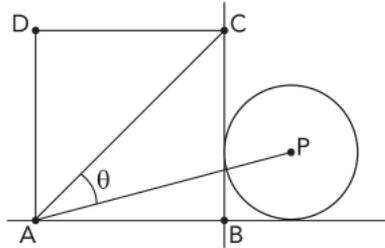
A $\mathrm{sen}\,\alpha \quad \cos\beta$
B $\cos\beta$
C $\cos\alpha$
D $\mathrm{sen}\,\beta$
E $\mathrm{sen}\,\alpha$

7 UEG 2015 Considerando-se $\mathrm{sen}(5°)=\frac{2}{25}$ tem se que $\cos(50°)$ é

A $\frac{\sqrt{2}}{50}(\sqrt{621}+2)$
B $\frac{\sqrt{2}}{50}(\sqrt{621} \quad 2)$
C $\frac{\sqrt{2}}{50}(1-\sqrt{621})$
D $\frac{\sqrt{2}}{50}(\sqrt{621} \quad 1)$

8 Simplificando-se: $4\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathrm{sen}\,(60° - \alpha)\cdot\mathrm{sen}\,(60° + \alpha)$, obtém-se:

A $\mathrm{sen}\,\alpha$
B $\mathrm{sen}\,3\alpha$
C $\mathrm{sen}\,2\alpha$
D $\mathrm{sen}\,5\alpha$
E $\mathrm{sen}\,4\alpha$

9 **Uerj 2017** No esquema abaixo, estão representados um quadrado ABCD e um círculo de centro P e raio *r* tangente às retas AB e BC. O lado do quadrado mede 3r.

A medida α do ângulo $C\hat{A}P$ pode ser determinada a partir da seguinte identidade trigonométrica:

$$tg(\alpha \ \ \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha) \times tg(\beta)}$$

O valor da tangente de θ é igual a:

A 0,65
B 0,60
C 0,55
D 0,50

10 **Uece 2017** Seja YOZ um triângulo cuja medida da altura OH relativa ao lado YZ é igual a 6 m. Se as medidas dos segmentos YH e HZ determinados por H no lado YZ são respectivamente 2 m e 3 m, então, a medida do ângulo YÔZ é igual a:

A 90°
B 30°
C 60°
D 45°

11 **Fuvest** Se $x + y = \frac{\pi}{3}$, então $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ cosx & senx & 0 \\ seny & cosy & 0 \end{vmatrix}$ é igual a:

A $\frac{1}{2}$
B $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D $\sqrt{3}$
E $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12 **Fuvest** A equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ tem como raízes tgu e tgv, com $u + v = \frac{\pi}{4}$. Prove que c = a + b.

13 **ITA** Sabendo-se que θ é um ângulo tal que $2sen(\theta - 60°) = cos(\theta - 60°)$, então tg θ é um número da forma $a + b\sqrt{3}$, onde:

A a e b reais negativos.
B a e b inteiros.
C a + b = 1.
D a e b são pares.
E $a^2 + b^2 = 1$.

14 **Fuvest** A expressão $\frac{sen\theta}{1+cos\theta}$, $0 < \theta < \pi$, é idêntica a:

A $sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$
B $cosec\left(\frac{\theta}{2}\right)$
C $cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$
D $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$
E $cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

15 **ITA** Se $cos^4 4x \ \ \ sen^4 4x = a$, $a \neq 0$, então cos 8x vale:

A 2a
B a
C 4a
D 0
E a + 4

16 Se tg (2A) = 5, então $tg\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \ \ tg\left(\frac{\pi}{4} \ \ A\right)$ é igual a:

A $\frac{40}{21}$
B 2
C 5
D 8
E 10

17 Suponha *x* e *y* números reais, tais que:

$$\begin{cases} tg(x \ \ = y) \ \ \sqrt{3} \\ tgx \cdot tgy = 1 \end{cases}$$

Calcule o módulo do número S = tg x + tg y.

18 Seja f(x) = sen x + cos x. O valor de $\sqrt{6}f\ (15\ ^\circ)$ é:

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

19 Em um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $\overline{BC}$, seja D um ponto do cateto $\overline{AB}$ tal que AD = 1, DB = 10 e o ângulo $B\hat{C}D = 30°$. Se a medida do cateto $\overline{AC}$ possui a forma $m + n\sqrt{p}$ com *m*, *n* e *p* números inteiros positivos, o valor de m + n + p é igual a:

A 16
B 14
C 12
D 10
E 8

20 **ITA** Seja $P = sen^2 ax - sen^2 bx$. Temos então que:

A $P = sen\ ax \cdot cos\ bx$
B $P = cos\frac{a}{2}x \cdot tgbx$
C $P = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)x \cdot cos\left(\frac{a \ \ b}{2}\right)x$
D $P = sen\ (a + b)x \cdot sen\ (a - b)x$
E n.d.a.

21 Transformando a expressão $\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}3\alpha$ em produto, temos:

A $2\cos 2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2}$

B $4\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$

C $\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$

D $3\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$

E $3\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos 2\alpha$

22 **Fuvest** Prove que $\cos\dfrac{3\pi}{10} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$.

23 **ITA** Sabendo que *x* e *y* são reais, tais que $x + y = \dfrac{3\pi}{4}$, verifique se a matriz $\begin{bmatrix} 2\operatorname{tg}x & 1+\operatorname{tg}x \\ 1+\operatorname{tg}y & \operatorname{tg}y \end{bmatrix}$ é ou não inversível

24 Simplifique a expressão: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2t}{\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t \cdot \cos^2 t}$ para $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$

25 **Fuvest** Em um triângulo retângulo ABC, os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $2+\sqrt{3}$ e 1, respectivamente. Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que AD = AC. Calcule tg (α + β), onde α e β são, respectivamente, as medidas de $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$.

26 Se senx + cosx = a e senx · cosx = b, obtenha uma relação entre *a* e *b*, independente de *x*.

27 **ITA** Sabendo-se que *x* e *y* são ângulos do 1º quadrante, tais que $\cos x = \dfrac{5}{6}$ e $\cos y = \dfrac{4}{5}$, então se $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{sen}^2\alpha}$, temos:

A α está no 4º quadrante e $T = \dfrac{2}{3}$.

B α está no 1º quadrante e $T = \dfrac{2}{3}$.

C α está no 1º quadrante e $T = \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{11}}{10}$

D α está no 4º quadrante e $T = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{11}}{10}$.

E n.d a

28 **ITA** A expressão trigonométrica para:

$$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ e } x \neq \frac{\pi}{4} \text{ tal que } \frac{1}{(\cos^2 x \quad \operatorname{sen}^2 x)^2} \quad \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1 \quad \operatorname{tg}^2 x)^2}$$

após simplificada é:

A sen (2x)

B cos (2x)

C 1

D 0

E sec (x)

29 **ITA** Seja $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que sen α + cos α = m Calcule o valor de $y = \dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}$

30 **ITA** Calcule o determinante da matriz A, tal que:

$$A = \begin{bmatrix} 1+\operatorname{sen}x & \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4} \quad \dfrac{x}{2}\right) & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

31 **ITA** A função $f: \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to [0,1]$, definida por $f(x) = \left(1 + \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) \cdot \cos x$, é uma função:

A constante.

B sobrejetora e ímpar.

C injetora e ímpar.

D injetora e par.

E sobrejetora e par.

32 Simplifique a expressão:

$$y = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

33 Calcular o valor da expressão:

$$y = \cos\frac{7\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$$

34 Simplificando a expressão:

$$y = 4\operatorname{sen}\frac{A}{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + A}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \quad A}{3}\right),$$

obtemos:

A cos A

B 2sen A

C 2cos A

D sen A

E $\operatorname{sen}\dfrac{A}{3}$

35 Sendo a·cos α + b·sen α = a·cos β + b·sen β, tal que $\alpha \neq \beta + K\pi$; $K \in \mathbb{Z}$, calcule em função de *a* e *b* o valor de sen (α + β)

36 O número $2+\sqrt{3}$ é a raiz da equação $x^2 \quad (\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a)x + 1 = 0$. Calcule o valor de sen 2a.

37 Sabendo que $3\text{sen}\,x + 4\cos x = 5$, o valor de $\text{sen}\,x \quad \cos x$ é igual a:

A $\frac{1}{5}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{2}$

D $\frac{1}{5}$

E 1

38 Sejam α e β números reais tais que $\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. O valor de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ é igual a:

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{\sqrt{6}}{2}$

E 1

39 Se $x = \cos 36^\circ \quad \cos 72^\circ$, então x é igual a:

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{2}$

C $3 - \sqrt{6}$

D $2\sqrt{3} \quad 3$

E $\frac{1}{4}$

40 O valor de $\cos^4\left(\frac{15^\circ}{2}\right) \quad \text{sen}^4\left(\frac{15^\circ}{2}\right)$ é igual a:

A $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

B $\frac{\sqrt{6} \quad \sqrt{2}}{4}$

C $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{1}{2}$

E $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

41 Demonstrar as seguintes identidades:

a) $\dfrac{\text{cotg}\,\frac{\alpha}{2} + \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\text{cotg}\,\frac{\alpha}{2} - \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

b) $\dfrac{2}{\text{sen}\,4\alpha} \quad \text{cotg}\,2\alpha = \text{tg}\,2\alpha$

c) $\dfrac{2 \cdot \cos^2\alpha \quad 1}{2\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = 1$

d) $\dfrac{\text{sen}\,4\alpha}{1+\cos 4\alpha} \cdot \dfrac{\cos 2\alpha}{1 \quad \cos 2\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

FRENTE 1

CAPÍTULO

11

Equações e inequações trigonométricas

Neste capítulo, temos a consolidação da Trigonometria.

Durante as resoluções de equações e inequações, utilizaremos toda a bagagem acumulada nos capítulos anteriores.

Equações trigonométricas fundamentais

A maioria das equações trigonométricas vai necessitar da sua habilidade algébrica e do conhecimento das equações trigonométricas fundamentais.
Elas são três:

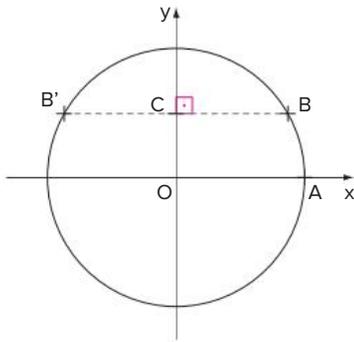
$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$$
$$\cos \alpha = \cos \beta$$
$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$$

Vamos resolver cada uma dessas equações para podermos nos aprofundar no estudo de outras.

Equações da forma sen α = sen β

As equações trigonométricas fundamentais são resolvidas mediante uma análise na circunferência trigonométrica.

Se tivermos sen α = sen β, as projeções das extremidades dos arcos α e β são as mesmas no eixo y (eixo dos senos). Observe:

Fig. 1 sen α = sen β.

Os arcos α e β podem ter extremidades em B ou B'.

Se as extremidades estiverem em B ou B', são arcos côngruos.

Se tivermos uma extremidade em B e outra em B', são simétricas.

Conclusão:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \text{ (côngruos)} \\ \text{ou} \\ \alpha + \beta = \pi + 2k\pi \text{ (simétricos)} \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

1 Resolva: sen $x = \text{sen}\dfrac{\pi}{7}$

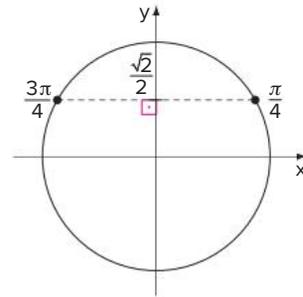
Resolução:

$$x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{7} = \pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2 Resolva: $\text{sen}\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

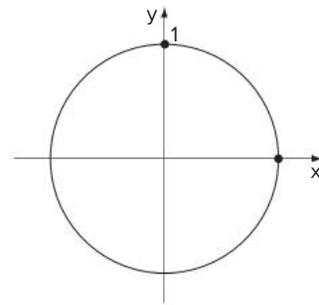
Resolução:

Geometricamente, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3 Resolva: $\text{sen}\, x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}$

Resolução:

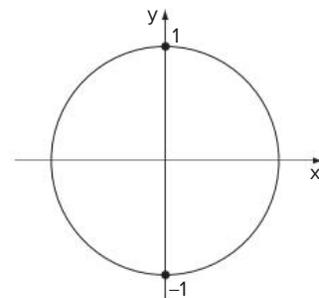
Vamos transformar a equação em uma equação fundamental

$$\text{sen}\, x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\text{sen}\, x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen}\, 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4 Resolva: $\text{sen}^2 x = 1$

Resolução:

$$\text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

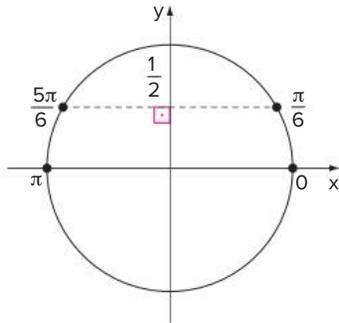
5 Resolva: $\text{sen}\, x + \cos 2x = 1$

Resolução:

$\text{sen}\, x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen}\, x + (1 \quad \text{sen}^2 x) \quad \text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen}\, x \quad 2\,\text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x(1 \quad 2\,\text{sen}\, x) = 0 \Rightarrow$

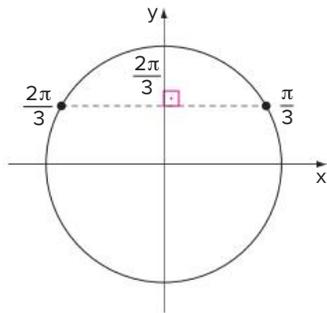
$\Rightarrow \text{sen}\, x = 0 \text{ ou } \text{sen}\, x = \dfrac{1}{2}$

$x = k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

6 Resolva: $\text{sen}\, x = 2$

Resolução:

$\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $\text{sen}\, x > 1$; logo, $S = \varnothing$

7 Resolva: $\text{sen}\left(x \quad \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

$x \quad \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x \quad \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

8 Resolva: $\text{sen}\, 3x = \text{sen}\, 2x$

Resolução:

$3x = 2x + 2k\pi \text{ ou } 3x + 2x = \pi + 2k\pi$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Equações da forma $\cos \alpha = \cos \beta$

A análise é semelhante à equação anterior, mas agora a projeção das extremidades dos arcos é no eixo x (eixo dos cossenos). Observe:

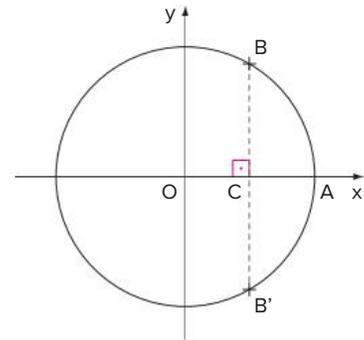



Fig. 2 $\cos \alpha = \cos \beta$.

Os arcos α e β podem ser côngruos ou simétricos

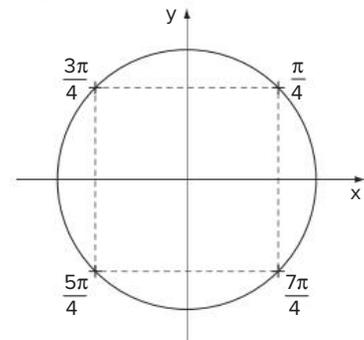
Conclusão:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \text{ (côngruos)} \\ \text{ou} \\ \alpha + \beta = 2k\pi \text{ (replementares)} \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

9 Resolva: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

Resolução:

$\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Primeiramente, podemos escrever:

$x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x_3 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$\text{ou } x_4 = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$

Mas as soluções x_1, x_3 e x_2, x_4 são diametralmente opostas, ou seja, a solução $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ representa x_1 e x_3; a solução $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$ representa x_2 e x_4.

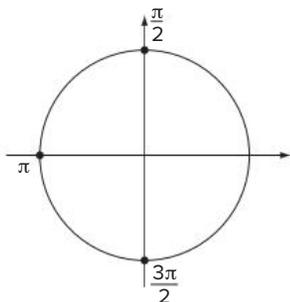
Analisando novamente as soluções x_1, x_3, x_2 e x_4, percebemos que elas formam uma PA de razão $\dfrac{\pi}{2}$, assim:

$x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

10 Resolva: $\text{sen}^2 x = 1 + \cos x$

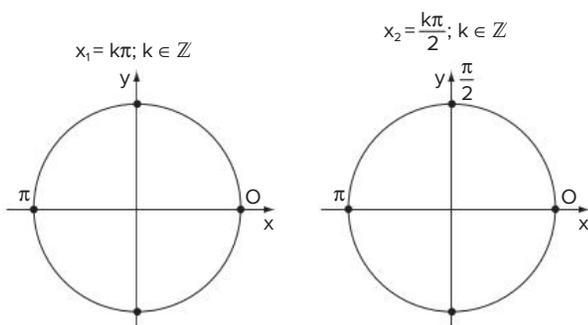
Resolução:

$\text{sen}^2 x = 1 + \cos x \Rightarrow (1 \quad \cos^2 x) = 1 + \cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot (\cos x + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x = 0$ ou $\cos x = \quad 1$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

11 Resolva: $\cos 3x = \cos x$

Resolução:

Assim: $3x = x + 2k\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$ ou

$3x + x = 2k\pi \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

Podemos observar que as soluções de x_2 contêm as soluções de x_1, logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Equações da forma $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$

Vamos observar a figura 3.

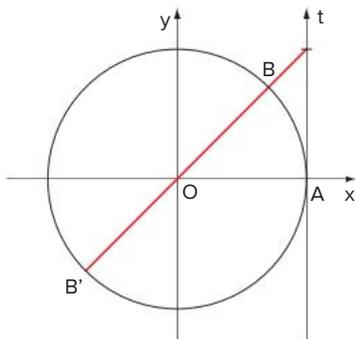



Fig. 3 $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta$

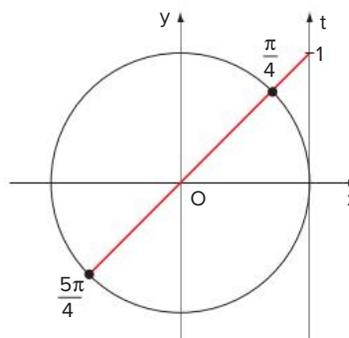
Os arcos α e β podem ser côngruos, e também podem ser simétricos em relação ao centro do ciclo trigonométrico (diametralmente opostos)

Conclusão:

$$\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{(côngruos)} \\ \quad \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \\ \text{(simétricos)} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

Exercícios resolvidos

12 Resolva: $\text{tg}\ x = 1$

Resolução:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

13 Resolva: $\text{tg}\ 2x = \text{tg}\ x$

Resolução:

$2x = x + k\pi \Rightarrow x = k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

14 Resolva: $\text{sen}\,x \quad = \sqrt{3}\cos x \quad 0$

Resolução:

$\text{sen}\,x \quad = \sqrt{3}\cos x \quad 0 = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \quad \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}\ x = \sqrt{3}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

15 Resolva: $\text{tg}\ 5x = \text{tg}\ 3x$

Resolução:

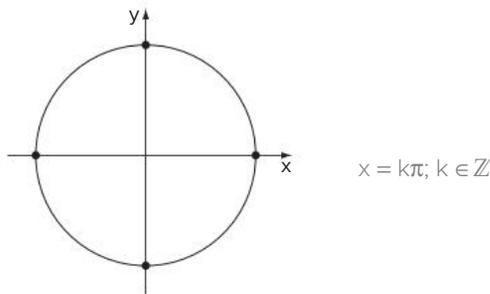
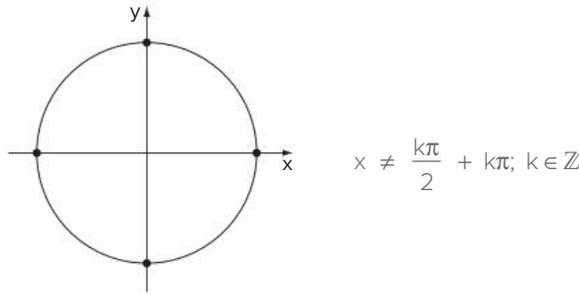
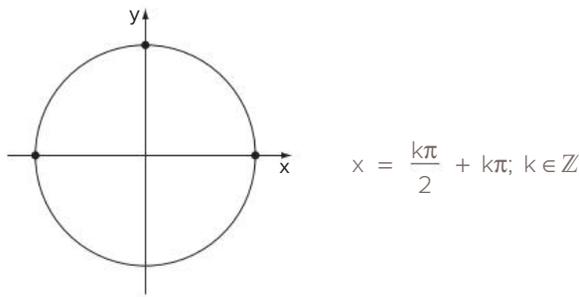
$5x = 3x + k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

Mas lembre-se do domínio da função tangente: $\exists$ tg x

se $x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Observe o resultado:

$x = \frac{k\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$x \neq \frac{k\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

16 Calcular x no intervalo $[0; 2\pi]$, tal que $\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x = 2$.

Resolução:

$\text{tg}\,x + \frac{1}{\text{tg}\,x} = 2 \Rightarrow \text{tg}^2\,x + 1 = 2\ \text{tg}\,x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}^2\,x - 2\ \text{tg}\,x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\text{tg}\,x \quad 1)^2 = 0 \Rightarrow \text{tg}\,x = 1$

Temos como solução geral:

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Vamos variar o valor de k para obter os valores de x. Observe:

$k = \quad 1 \quad x = \frac{3\pi}{4}$ (não convém)

$k = 0 \quad x = \frac{\pi}{4}$ (convém)

$k = 1 \quad x = \frac{5\pi}{4}$ (convém)

$k = 2 \quad x = \frac{9\pi}{4}$ (não convém)

$S = \left\{\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right\}$

Equações clássicas

Vamos apresentar, nesta parte do capítulo, as chamadas equações clássicas e suas soluções tradicionais, reduzindo as a equações fundamentais.

Primeira equação clássica

Vamos resolver a equação:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{sen\,x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{cos\,x} = \mathbf{c}$, chamada de equação trigonométrica homogênea do 1º grau.

Observe a figura a seguir.

Construindo um triângulo retângulo auxiliar, obtemos:

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e

$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

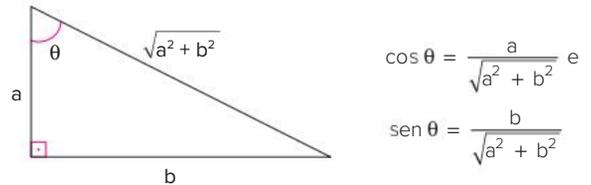



Fig. 4 Primeira equação clássica.

Dividimos a equação por $\sqrt{a^2 + b^2}$ para aparecer o sen θ e o cos θ:

$$\text{sen}\,x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$(\text{sen}\,x) \quad \cos\theta + \text{sen}\,\theta \cdot (\cos x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{sen}\,(x + \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Reduzimos a equação clássica a uma equação fundamental Agora faremos uma discussão da existência

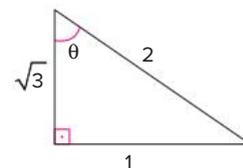
Existe sen (x + θ) se, e somente se:

$$1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$$

Exercícios resolvidos

17 Resolva $\sqrt{3}\ \text{sen}\,x - \cos x = 1$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Resolução:

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$, assim:

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}\,x \quad \frac{1}{2} = \cos x \quad \frac{1}{2}$

Logo, $\text{sen}\,x \cdot \cos 30^\circ \quad \text{sen}\,30^\circ \cdot \cos x = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\,(x \quad 30^\circ) \quad \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Assim: $\frac{x \quad \pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

FRENTE 1

18 Resolva a equação sen x + cos x = 1, para $x \in [0; 2\pi]$ de duas maneiras diferentes

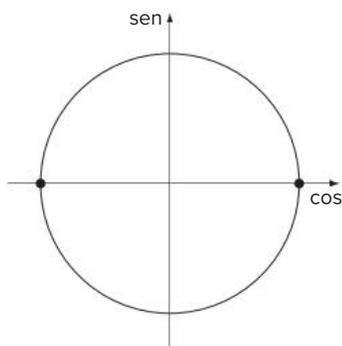
Resolução:

1º modo:

$\text{sen } x + \cos x = 1$

$(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x + 2\text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 0$

$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}; \; k \in \mathbb{Z}$

Como $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1$, podemos ter sen x + cos x = 1 ou sen x + cos x = – 1. Devemos verificar quais são as soluções relativas à equação sen x + cos x = –1.

$x = \frac{k\pi}{2}; \; k \in \mathbb{Z}$ todas as soluções particulares 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; e 2π.

0; $\frac{\pi}{2}$ e 2π são as soluções de sen x + cos x = 1

π e $\frac{3\pi}{2}$ são as soluções de sen x + cos x = 1

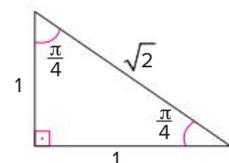
2º modo:

$\text{sen } x + \cos x = 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen } x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

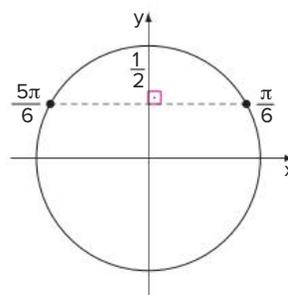
$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi; \; k \in \mathbb{Z}$

ou

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \; k \in \mathbb{Z}$

Para $x \in [0; 2\pi]$, temos as soluções 0; $\frac{\pi}{2}$ e 2π.

Observe que a segunda solução nos fornece diretamente as respostas finais, pois não elevamos os membros da equação ao quadrado.

Equação fundamental

$x \;\; \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x \;\; \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi; \; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Segunda equação clássica

Vamos resolver a chamada segunda equação clássica, ou equação trigonométrica homogênea do 2º grau, que é da forma:

$\mathbf{a\,sen^2\,x + b\,sen\,x \cdot cos\,x + c \cdot cos^2\,x = d}$

Para resolvê-la, divida os dois membros por $\cos^2 x$ (se $\cos x \neq 0$):

$a\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\text{sen } x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{d}{\cos^2 x}$

$a \cdot \text{tg}^2 x + b \cdot \text{tg } x + c = d \cdot (\sec^2 x)$

$a \cdot \text{tg}^2 x + b \cdot \text{tg } x + c = d \cdot (1 + \text{tg}^2 x)$

$\mathbf{(a - d)tg^2\,x + b \cdot tg\,x + (c - d) = 0}$

A equação foi reduzida a uma equação algébrica do 2º grau; fazendo tg x = t, temos:

$$(a \quad d)t^2 + bt + (c \quad d) = 0$$

Para existir t, deveremos ter $\Delta \geq 0$, lembrando também que o conjunto-imagem da função tg x é $\mathbb{R}$

$$(b)^2 \quad 4(a \quad d)(c \quad d) \geq 0$$

$$b^2 \geq 4(a - d)(c - d),$$

(que não é uma condição simples de se "memorizar")

Existindo $\Delta \geq 0$, prosseguimos e encontramos dois valores, t_1 e t_2.

Conclusão: tg x = t_1 ou tg x = t_2

Não se esqueça de que supomos $\cos x \neq 0$, se cos x = 0, temos sen x = ± 1. Assim:

$a \cdot (\pm 1)^2 + b \cdot (\pm 1) \cdot (0) + c \cdot (0)2 = d$

$\Rightarrow a \quad d = 0 \Rightarrow 0 \cdot t^2 + bt + (c \quad d) = 0$

$t = \frac{d \quad c}{b}$, ou seja, $\text{tg } x = \frac{d \quad c}{b}$, e a outra solução é cos x = 0.

Se $\cos x \neq 0$, teremos somente as soluções da equação do 2º grau $(a \quad d)\text{tg}^2 x + b\text{tg } x + (c \quad d) = 0$.

Se cos x = 0, teremos também a solução $\text{tg } x = \frac{d - c}{b}$.

Exercício resolvido

19 $\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x \quad \cdot 2\,\text{sen}\,x \quad \cos x \quad = \sqrt{3}\cos^2 x \qquad \sqrt{2}$

Resolução:

$$\sqrt{3}\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \qquad \frac{2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \sqrt{3}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \qquad \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x}$$

$$\sqrt{3}\text{tg}^2 x + \quad 2\text{tg}\,x \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{2}(\text{tg}^2 x \quad 1)$$

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\text{tg}^2 x \quad 2\text{tg}\,x + \left(\sqrt{2} \quad = \sqrt{3}\right) \quad 0$$

$$\text{tg}^2 x \qquad \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\,\text{tg}\,x \qquad \frac{\left(\sqrt{3} \quad \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)} = 0$$

$$\text{tg}^2 x - 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\text{tg}\,x - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = 0$$

$$\Delta = 4\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 \quad 4\left(\sqrt{3} \quad \sqrt{2}\right)^2 \quad 8\left(\sqrt{3} \quad \sqrt{2}\right)^2$$

$$\text{tg}\,x = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \pm \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)2\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,x = \left(\sqrt{3} \quad \cdot\sqrt{2}\right) \Rightarrow \left(1 \quad = \sqrt{2}\right) \qquad x \qquad \frac{\pi}{24} + k\pi$$

ou

$$\text{tg}\,x = \left(\sqrt{3} \quad \cdot\sqrt{2}+\right) \quad \left(1 \quad \Rightarrow\sqrt{2}\right) = \quad x \quad \frac{5\pi}{24} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{24} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Terceira equação clássica

Vamos agora resolver uma equação trigonométrica da forma:

$a \cdot (\text{sen}\,x + \cos x) + b \cdot (\text{sen}\,x + \cos x) = c$

Fazendo $\text{sen}\,x + \cos x = t$, obtemos:

$\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x + \cos^2 x = t^2$

$$\text{sen}\,x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Reduzimos a uma equação do 2º grau:

$$a \cdot t + \frac{b}{2} \cdot (t^2 - 1) = c \Rightarrow 2at + bt^2 - b = 2c \Rightarrow$$

$\Rightarrow bt^2 + 2at \quad (b + 2c) = 0$

Para existir t, deveremos ter $\Delta \geq 0$, lembrando que o conjunto-imagem da função tg x é $\mathbb{R}$.

$(2a)^2 \quad 4 \quad b \quad [-(b + 2c)] = 4a^2 + 4b^2 \quad 8bc \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2bc$

Voltando para a equação do 2º grau (quando $\Delta \geq 0$), obtemos: $\text{sen}\,x + \cos x = t_1$ ou $\text{sen}\,x + \cos x = t_2$ e recaímos na primeira equação clássica.

Exercício resolvido

20 $2\sqrt{2}(\text{sen}\,x + \cos x) \quad \cdot 4 = \text{sen}\,x \quad \cos x \qquad 3 \qquad 0$

Resolução:

Fazendo a substituição, temos:

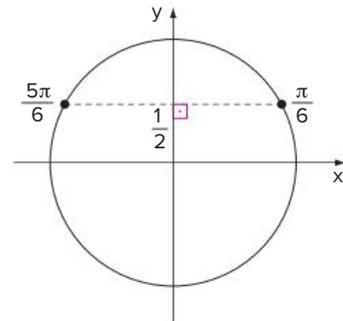
$$\text{sen}\,x + \cos x = t \Rightarrow 2\sqrt{2}t - 4\left(\frac{t^2 \quad 1}{2}\right) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}t \quad = 2(t^2 \Rightarrow 1) \quad 3+ \quad 0 \qquad 2t^2 \quad 2\sqrt{2}t \quad 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}t \quad 1\right)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Voltando para a variável original, temos:

$$\text{sen}\,x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\text{sen}\,x)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \quad \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

ou

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Quarta equação clássica

Vamos resolver a equação $\mathbf{sen^4\,x + cos^4\,x = a}$

$(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 \quad 2\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = a$

$$1 \quad \frac{\left(2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x\right)^2}{2} = a \Rightarrow 2 \quad \text{sen}^2\,2x = 2a \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{sen}^2\,2x = 2(1 \quad a)$ reduzindo a uma equação fundamental.

Para a condição de existência, temos:

$0 \leq \text{sen}^2\,2x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2(1 \quad a) \leq 1$

$$0 \leq 1 \leq a \quad \Rightarrow\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

FRENTE 1

Quinta equação clássica

Vamos resolver a equação **$sen^6 x + cos^6 x = a$**.

Utilizando a soma dos cubos, temos:

$$(sen^2 x + cos^2 x)(sen^4 x - sen^2 x \cdot cos^2 x + cos^4 x) = a$$

$$sen^4 x - sen^2 x \cdot cos^2 x + cos^4 x = a$$

$$(sen^4 x + cos^4 x) \quad (sen^2 x \cdot cos^2 x) = a$$

$$(sen^2 x + cos^2 x)^2 \quad 2\, sen^2 x \cdot cos^2 x \quad sen^2 x \cdot cos^2 x = a$$

$$1 \quad 3\, sen^2 x \cdot cos^2 x = a \Rightarrow 1 \quad = \frac{3}{4} sen^2 2x \quad a$$

Desta forma, obtemos:

$$sen^2 2x = \frac{4 \quad 4a}{3} \Rightarrow 0 \le \frac{4 \quad 4a}{3} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \le a \le 1$$

Cálculo geométrico da tg 15°

Podemos facilmente calcular a tangente de 15° através da fórmula tg(a – b), ou seja:

$$tg\,(45° - 30°) = \frac{tg\,45° \quad °tg\,30}{1 + tg\,45° \cdot tg\,30°} = \frac{1 \quad \sqrt{\frac{3}{3}}}{1 + \sqrt{\frac{3}{3}}} = \frac{3 \quad \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\left(3 - \sqrt{3}\right)^2}{(3)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{9 \quad +6\sqrt{3} \quad 3}{9 - 3} = \frac{12 \quad 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

Existe uma construção geométrica que permite o cálculo da tangente de 15°. Observe o quadrado de lado a com um triângulo equilátero construído sobre o seu lado.

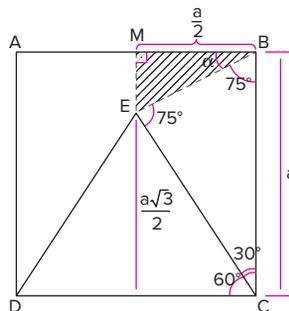



Fig. 5 Cálculo geométrico.

No triângulo retângulo hachurado, os catetos são $BM = \frac{a}{2}$ e $ME = a \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}$, assim:

$$tg\,\alpha = \frac{a \quad a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2a - a\sqrt{3}}{a} = 2 \quad \sqrt{3}$$

Vamos agora calcular o ângulo α. O ΔBEC é isósceles e possui os ângulos 75°, 75° e 30°. Assim:

$\alpha + 75° = 90° \Rightarrow \alpha = 15°$ e $tg\,15° = 2 \quad \sqrt{3}$

Inequações trigonométricas fundamentais

Para resolvermos os diversos tipos de inequações trigonométricas, precisamos resolver as inequações fundamentais, que são:

$sen\,x > p$ ou $sen\,x < p$

$cos\,x > p$ ou $cos\,x < p$

$tg\,x > p$ ou $tg\,x < p$

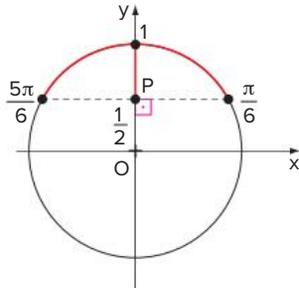
Estudaremos essas inequações por meio dos exercícios resolvidos.

Inequações do tipo sen x > p ou sen x < p

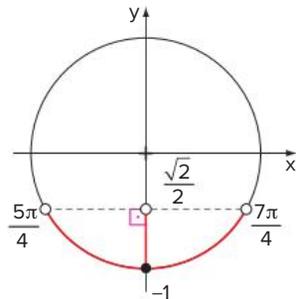
Exercícios resolvidos

21 Resolva: $\text{sen } x \geq \frac{1}{2}$

Resolução:

Marcamos no eixo y o ponto p, tal que $OP = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

22 Resolva: $\text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

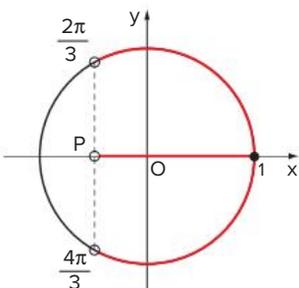
$$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Inequações do tipo cos x > p ou cos x < p

23 Resolva: $\cos x > \frac{1}{2}$

Resolução:

Marcamos no eixo x o ponto P, tal que $OP = \frac{1}{2}$

$$0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x \leq 2\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2\pi \leq x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

24 Resolva: $\cos x \leq -1$

Resolução:

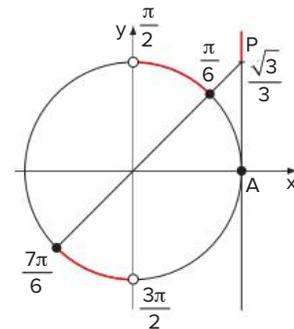
Como é impossível cos x < 1, teremos cos x = 1.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Inequações do tipo tg x > p ou tg x < p

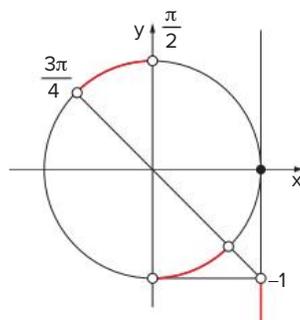
25 Resolva: $\text{tg } x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolução:

Marcamos no eixo das tangentes o ponto P, tal que $AP = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

26 Resolva: tg x < 1

Resolução:

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Revisando

1 Resolva a equação trigonométrica $\text{sen}\left(2x \quad \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, considerando uma solução geral para todo x real e depois considerando $x \in [0; 2\pi]$.

2 Determine o domínio da função $f(x) = \log_{\cos x}(2\cos x \quad 1)$.

3 Obtenha todos os valores reais de *x*, tais que $x \in [0; 2\pi[$ e $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x = 1$.

4 Determine todos os valores reais de *m* para os quais a equação $\text{sen}\,x + \cos x = m$ admite soluções reais.

Exercícios propostos

1 **Fuvest** Ache todas as soluções da equação $\text{sen}^3 x \cos x \quad 3\,\text{sen}\,x \cos^3 x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi)$

2 **UFSC** Assinale a única proposição correta.
No intervalo $[0, 3\pi]$, o número de soluções da equação $\text{sen}\,2x = \sqrt{2}\cos x$ é:

A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

3 **Cesgranrio** O número de soluções da equação $\text{sen}^2 x = 2\,\text{sen}\,x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

4 **Fatec** O conjunto-solução da equação $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi]$, é:

A $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

B $\left\{\frac{\pi}{6}, \pi, \frac{5\pi}{6}\right\}$

C $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \pi\right\}$

D $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

E $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

5 **UFRJ** O número de soluções da equação

$2\cos^2 x \quad 3\cos x \quad 2 = 0$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

A 1
B 0
C 2
D 4
E 3

6 **UEL** O conjunto-solução da equação $\text{sen}\, x = \text{sen} 2x$, no universo $U = [0, 2\pi]$, é:

A $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, 2\pi\right\}$

B $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

C $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi\right\}$

D $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\right\}$

E $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\pi\right\}$

7 **UFRGS** A identidade $\text{sen}\, 2x = 2\text{sen}\, x$ é verificada se, e somente se:

A x é número real.
B $x = 0$.
C $x = n\pi$, sendo n qualquer inteiro.
D $x = n\frac{\pi}{2}$, sendo n qualquer inteiro
E $x = 2n\pi$, sendo n qualquer inteiro.

8 **ITA** O conjunto das soluções da equação $\text{sen}\, 5x = \cos 3x$ contém o seguinte conjunto:

A $\left\{\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{5};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B $\left\{\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9 **UEG 2019** Resolvendo-se a equação $\text{sen}\, 2x = 1$ encontramos a 1ª determinação positiva de x igual a:

A $\frac{\pi}{2}$
B $\frac{\pi}{3}$
C $\frac{\pi}{4}$
D $\frac{\pi}{6}$
E $\frac{\pi}{12}$

10 **EsPCEx 2019** O número de raízes reais da equação $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

11 **Uece 2017** A soma dos elementos do conjunto formado por todas as soluções, no intervalo $[0, 2\pi]$, da equação $2\,\text{sen}^4(x) - 3\,\text{sen}^2(x) + 1 = 0$ é igual a:

A 3π
B 4π
C 5π
D 6π

12 **Mackenzie 2017** O número de soluções que a equação $4\cos^2 x - \cos 2x + \cos x = 2$ admite no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

13 Resolva as equações trigonométricas considerando $x \in \mathbb{R}$.

a) $\text{sen}\, x + \cos 2x = 1$
b) $\sec^2 x = 2\,\text{tg}\, x$
c) $(1 \quad \text{tg}\, x)\ (1 + \text{sen}\, 2x) = 1 + \text{tg}\, x$
d) $2\,\text{sen}^2 x + 6\cos x \quad \cos\ 2x = 5$

14 Resolva as inequações trigonométricas a seguir para $x \in \mathbb{R}$.

a) $\text{sen}\, x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
c)$< \quad 1 \quad < \text{tg}\, x \quad \sqrt{3}$
d) $\text{sen}\, 2x < 0$
e) $\text{sen}\, 3x \leq \frac{1}{2}$
f) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
g) $|\text{sen}\, x| < \frac{1}{2}$
h) $|\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$
i) $|\text{tg}\, x| > \sqrt{3}$
j) $\text{sen}\, x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

15 **EsPCEx 2020** O conjunto solução da inequação $2\cos^2 x + \text{sen}\, x > 2$, no intervalo $[0, \pi]$ é:

A $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$

B $\left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$

C $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$

D $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

E $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$

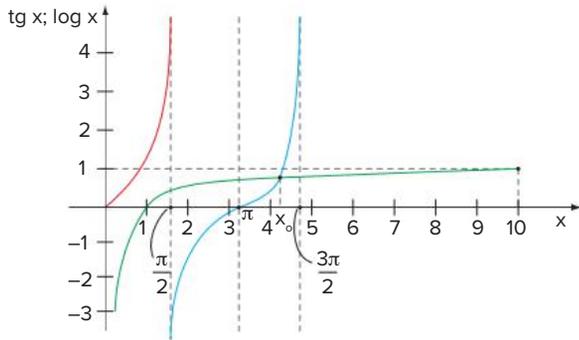
Textos complementares

Equações transcendentais

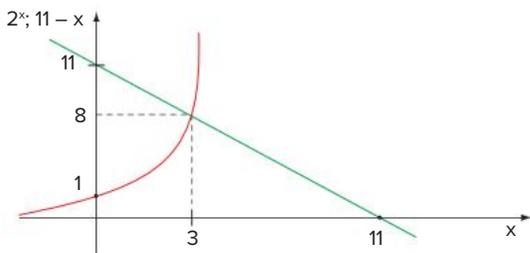
São equações formadas por funções transcendentais (e^x, $\log_a^x$, sen x,)
Essas equações transcendentais não possuem solução analítica, ou seja, não é possível determinar suas soluções simplesmente resolvendo um sistema qualquer.

Podemos avaliar suas soluções através de uma inspeção gráfica das funções. Observe os exemplos:

a) tg x = log x, para $2 \le x \le 5$

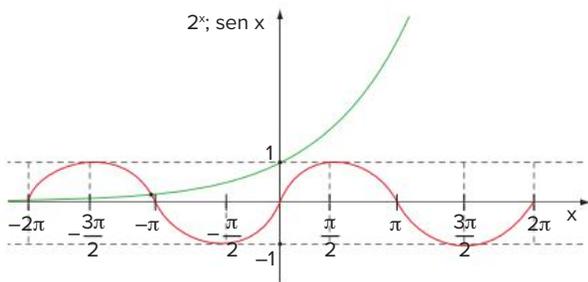
Considere a função f(x) = tg x − log x, devemos encontrar $x_o \in [2; 5]$, tal que $f(x_o) = 0$. Plotaremos no mesmo sistema cartesiano os gráficos de tg x e log x. O cruzamento dos gráficos nos fornecerá a raiz ou as raízes

x_o é a raiz da equação.

b) $2^x = 11$ x

Em algumas equações, podemos avaliar mentalmente as raízes, como a deste exemplo. Observe que x = 3 é uma solução. A questão agora é saber se existem outras raízes. Analise os gráficos das funções.

Como 2^x é estritamente crescente e 11 x é estritamente decrescente, temos que x = 3 é sua única solução.

c) 2^x = sen x, para $2\pi \le x \le 2\pi$

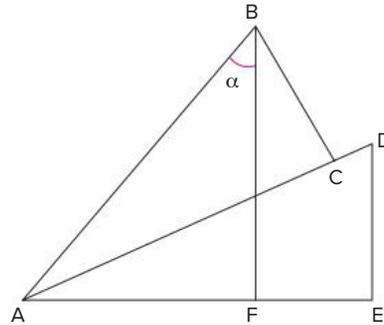
Vamos plotar os dois gráficos no mesmo sistema cartesiano para o domínio $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

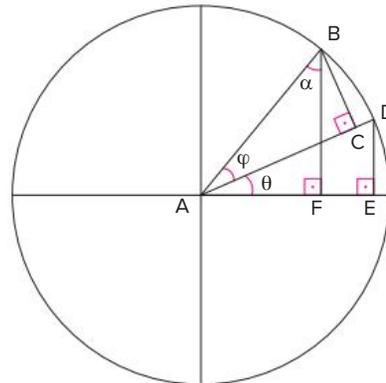
Temos duas soluções (dois cruzamentos dos gráficos).

Analise esta questão do vestibular do IME

Considere a figura a seguir, onde AB = AD = 1, BC = x, AC = y, DE = z e AE = w.

Os ângulos $D\hat{E}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{F}A$ são retos

a) Determine o comprimento de AF e de BF em função de x, y, z e w

b) Determine a tangente do ângulo α em função de x, y, z e w.

Resolução:

Podemos redesenhar a figura no ciclo trigonométrico, já que temos AB = AD = 1

Observe que este desenho é exatamente o esquema da demonstração que fizemos anteriormente.

Para calcular AF e BF, obtenha:

$\cos(\varphi + \theta) = \frac{AF}{1}$ e $(\varphi + \theta) = \frac{BF}{1}$ no ΔABF Mas $\cos\theta = w$, $\text{sen}\,\theta = z$, $\cos\varphi = y$ e $\text{sen}\,\varphi = x$, assim:

$\cos\varphi \cdot \cos\theta - \text{sen}\,\varphi \cdot \text{sen}\,\theta = AF$ e

$\text{sen}\,\varphi \cdot \cos\theta + \text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,\varphi = BF$

AF = |y w x z| e BF = x w + z y

No ΔABF para obtermos tg α, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AF}{BF} = \frac{|y \cdot w - x \cdot z|}{x \cdot w + z \cdot y}$$

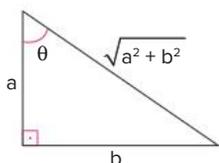
Resumindo

- As equações trigonométricas são fundamentais para a resolução de outras equações e também inequações. São elas:

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha + \beta = \pi + 2k\pi \end{cases};\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha + \beta = 2k\pi \end{cases};\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

- A equação clássica é muito importante para a resolução de vários problemas Com a, b e c $\in \mathbb{R}$, temos a sen x + b cos x = c

$$a \cdot \text{sen}\,x + b \cdot \cos x = c$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \text{sen}\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos\theta \cdot \text{sen}\,x + \text{sen}\,\theta \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Transformamos a equação em uma equação fundamental da forma $\text{sen}\left(x + \theta\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Quer saber mais?

Site

- **BUCCHI, Paulo** "Equações trigonométricas" e "Inequações trigonométricas" *In*: *Curso prático de Matemática*, v 1 São Paulo: Moderna, 1998

Exercícios complementares

1 PUC-Rio Quantas soluções de sen (x) + cos (x) = 0 existem para x entre 0 e 2π?

2 Ufes Determine todos os valores de θ para os quais

$\text{sen}^3\,\theta\cos\theta \quad \text{sen}\,\theta\cos^3\theta = \frac{1}{4}$

3 FEI Se cotg (x) + tg (x) = 3, então sen (2x) é igual a:

A $\frac{1}{3}$

B $\frac{3}{2}$

C 3

D $\frac{2}{3}$

E nenhuma anterior é correta.

4 Mackenzie Em $[0; 2\pi]$, o número de soluções reais da equação $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x = 2$ é:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

5 UFPE Determine a menor solução real positiva da equação: $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{423}\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{423}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{846}\right)$.

6 UFMG Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $(0; \pi)$ que satisfazem a equação $3\,\text{tg}\,x + 2\cos x = 3\sec x$.

7 UEL Se $x \in [0; 2\pi]$, o número de soluções da equação $\cos 2x = \text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad x\right]$ é:

A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

8 Unirio Para que a matriz a seguir seja inversível, é necessário que:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi & 1 \\ \text{sen}\,\varphi & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

A $\varphi \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

B $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

C $\varphi \neq k\pi$

D $\varphi \neq 2k\pi$

E $\varphi \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

9 UFSC $\text{sen}\,x \quad \cos x = m$

a) Ache todas as soluções reais da equação acima quando $m = 0$.

b) Determine todos os valores de m para os quais a equação possui soluções reais.

10 Fuvest Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}^3 x + \cos^4 x = 1$.

11 UFSC Determine o número de soluções reais da equação $\text{sen}\,x - \cos x = 0$, tal que $x \in [0; 9]$.

12 Fuvest Determinar os valores de x, no intervalo $0 \le x \le 2$, que satisfazem a equação $\text{sen}\,\pi x + \cos \pi x = 0$.

13 Unicamp 2020 Seja a função $f(x) = \dfrac{2 + \text{sen}\,x}{2 + \cos x}$ definida para todo número real x.

a) Mostre que $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\quad \dfrac{\pi}{2}\right) = f(\pi) f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) Seja θ um número real tal que $f(\theta) = 2$. Determine os possíveis valores para $\text{sen}\,\theta$.

14 Fuvest Resolva a equação $\dfrac{1 \quad \text{tg}\,x}{1 + \text{tg}\,x} = 1 - \text{sen}\,2x$.

15 FGV Resolva a equação: $\text{tg}\,x = \text{sen}\,2x$.

16 FGV A solução da equação $\dfrac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1$ para $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ é?

17 UFPR 2020 Seja x um arco no primeiro quadrante

a) Encontre o valor de sen (x), sabendo que $\cos(x) = \dfrac{3}{8}$

b) Encontre o valor de sen (x), sabendo que $8\,\text{tg}(x) = 3\cos(x)$.

18 FGV A soma das raízes da equação:

$$\text{sen}\,7x + \text{sen}\,5x = 0, \text{ para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ é:}$$

A π

B 2π

C $\dfrac{\pi}{2}$

D $\dfrac{2\pi}{3}$

E $\dfrac{3\pi}{2}$

19 Udesc 2018 A soma de todas as raízes reais da função $f(x) = \cot g^2(x) - \dfrac{5}{4\,\text{sen}^2(x)} + 2$ pertencentes ao intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ é igual a:

A 4π

B $\dfrac{53\pi}{6}$

C 9π

D $\dfrac{35\pi}{6}$

E $\dfrac{73\pi}{6}$

20 EsPCEx 2018 O conjunto solução da inequação $2\,\text{sen}^2 x - \cos x - 1 \ge 0$, no intervalo, $\left]0, 2\pi\right]$ é:

A $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

B $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

C $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

D $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

E $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{10\pi}{6}\right]$.

21 PUC Campinas Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\,x$ O conjunto-solução da inequação $f(x) \ge 0$, no universo $U = [0; 2\pi[$, é:

A $[0, \pi]$

B $\left[\dfrac{\pi}{2}, 3\dfrac{\pi}{2}\right]$

C $[\pi, 2\pi]$

D $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

E $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

22 UFRGS No intervalo real $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, o conjunto-solução da desigualdade $\text{sen}\,x \cdot \cos x \le \dfrac{1}{4}$ é:

A $\left[0, \dfrac{\pi}{15}\right]$

B $\left[0, \dfrac{\pi}{12}\right]$

C $\left[0, \dfrac{\pi}{10}\right]$

D $\left[0, \dfrac{\pi}{8}\right]$

E $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

23 Vunesp O conjunto-solução de $|\cos x| < \left(\dfrac{1}{2}\right)$, para $0 < x < 2\pi$, é definido por:

A $\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < x < \left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ou $\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) < x < \left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

B $\left(\dfrac{\pi}{6}\right) < x < \left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ ou $\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) < x < \left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

C $\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < x < \left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ e $\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) < x < \left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

D $\left(\dfrac{\pi}{6}\right) < x < \left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ e $\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) < x < \left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

E $\left(\dfrac{\pi}{6}\right) < x < \left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ou $\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) < x < \left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

24 Resolva a inequação $\text{sen}\,\dfrac{x}{2} \ge \dfrac{1}{2}$, onde $0 \le x \le 2\pi$.

25 Considere a desigualdade $\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x > 0$. Pode-se afirmar que:

A só está satisfeita para x no 1º quadrante

B só está satisfeita para x entre 0 e π.

C a desigualdade que se obtém substituindo-se x por $-x$ é equivalente à desigualdade dada

D os valores de x que a satisfazem são precisamente aqueles para os quais $\text{sen}\, x > 0$.

E existe x no terceiro quadrante que satisfaz a desigualdade.

26 A equação $x^2 + \sqrt{2}x + \cos\theta = 0$, com $0 < \theta < \pi$, não admite raízes reais se, e somente se:

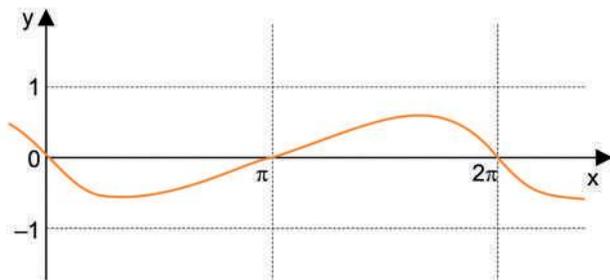
A $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$

B $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$

C $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

D $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{2\pi}{3}$

E $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$

27 **Uefs 2020** A figura mostra parte do gráfico da função $f(x) = \frac{\text{sen}\,(x)}{\cos\,(x) \quad 2}$.

No intervalo aberto $(0, 2\pi)$ a solução de $\text{sen}\,(x) > f(x)$ é o conjunto

A $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}$

B $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi\right\}$

C $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\right\}$

D $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\right\}$

E $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\right\}$

28 **Unicamp 2017** Sabendo que k é um número real, considere a função $f(x) = k\,\text{sen}\, x + \cos x$ definida para todo número real x.

a) Seja t um número real tal que $f(t) = 0$. Mostre que $f(2t) = \quad 1$.

b) Para $k = 3$ encontre todas as soluções da equação $f(x)^2 + f(-x)^2 = 10$ para $0 \le x \le 2\pi$.

29 **UEG 2017** A inequação $\text{sen}\,(x)\cos\,(x) \le 0$, no intervalo de $0 \le x \le 2\pi$ e x real, possui conjunto solução

A $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$

B $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$

C $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$

D $\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4} \le x \le 2\pi$

E $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \le x \le \pi$

30 **Uece 2017** O número de soluções da equação $|\text{sen}\,(x)| = |\cos\,(x)|$, no intervalo fechado $[\ 2\pi, 2\pi]$ é igual a

A 4 B 10 C 8 D 6

31 **ITA** Se a e b são ângulos complementares, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b} = \sqrt{3}$, então $\text{sen}\left(\frac{3a}{5}\right) + \cos\,(3b)$ é igual:

A $\sqrt{3}$ B $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C $\sqrt{2}$ D $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E 1

32 Resolva a equação: $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 \quad \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$

33 Determine as raízes da equação trigonométrica $\cos 2x + 2\text{sen}^2 x + 2 = 0$ no intervalo $[0; 6\pi]$.

34 **ITA** A equação $[\text{sen}(\cos x)] \cdot [\cos(\cos x)] = 1$ é satisfeita para:

A $x = \frac{\pi}{4}$

B $x = 0$

C $\nexists x \in \mathbb{R}$

D R

E todos os valores de x pertencentes ao 3º quadrante.

35 **EsPCEx 2017** A soma das soluções da equação $\cos\,(2x) - \cos\,(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a:

A $\frac{5\pi}{3}$ B 2π C $\frac{7\pi}{3}$ D π E $\frac{8\pi}{3}$

36 **Cesgranrio** Resolva a equação $(\cos x + \text{sen}\, x)^2 = \frac{1}{2}$

37 **Vunesp** Determinar os valores de θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, de maneira que o determinante $\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & \text{sen}\,\theta \end{vmatrix}$ seja nulo.

38 **ITA** Quais os valores de x que satisfazem a equação $\cos x \quad = \cos\frac{x}{2} \quad 2$.

39 **ITA** A equação $\text{sen}^2 \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = a$ tem solução para valores particulares de a. Assinale o item que lhe parecer correto.

A $1 < a < \frac{7}{4}$
B $2 < \quad a < \frac{5}{4}$
C $1 < \quad a < \frac{1}{4}$
D $1 < a < \frac{3}{2}$
E n d a

40 **ITA** A soma das raízes da equação:

$$\sqrt{3}\,\text{tg}\,x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x + \cos 2x = 0$$

que pertencem ao intervalo [0; 2π] é:

A $\frac{17\pi}{4}$
B $\frac{16\pi}{3}$
C $\frac{15\pi}{4}$
D $\frac{14\pi}{3}$
E $\frac{13\pi}{4}$

41 Resolva a equação: $|\cos x| = \cos x \quad 2\text{sen}\,x$.

42 **ITA** Resolva a equação para $x \in [0; 2\pi]$.

$$\cos^4 x + \text{sen}^4 x \quad \text{sen}2\,x + \frac{3}{4}\text{sen}^2\,2x = 0$$

43 Resolva a equação $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 1$

44 **ITA** Resolva a equação: $|\ell n(\text{sen}^2 x)| = \ell n(\text{sen}^2 x)$.
Observação: $\ell n\,x = \log_e x$, onde e é o número neperiano.

45 **ITA** Suponha x e y números reais, tais que:

$$\begin{cases} \text{tg}\,(x \quad y) = \sqrt{3} \\ (\text{tg}\,x) \cdot (\text{tg}\,y) = 1 \end{cases}$$

Calcule o módulo do número $S = \text{tg}\,x + \text{tg}\,y$.

46 **ITA** Determine o número de raízes reais da equação:
$\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + \text{sen}^8 x + \text{sen}^{10} x = 5$

A Um número maior que 12.
B Zero.
C 2
D 10
E 1

47 **ITA** Seja a equação:

$$\text{sen}^3 x \cdot \cos x \quad \text{sen} \cdot \cos^3 x = \frac{1}{m}$$

onde m é um número real não nulo
Podemos afirmar que:

A a equação admite solução qualquer que seja m; $m \neq 0$.
B se $|m| < 4$, esta equação não apresenta solução real
C se $m > 1$, esta equação não apresenta solução real.
D se $|m| > 2$, esta equação não apresenta solução real.
E se $m < 4$, esta equação não apresenta solução real

48 **ITA** Resolva a equação: $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = 2\text{sen}\,6x$.

49 **ITA** Se tg (2A) = 5, então $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} \quad A\right)$ é igual a:

A $-\frac{40}{21}$
B -2
C 5
D 8
E 10

50 **ITA** Seja $f(t) = 4 + 3\cos(\pi t) + 4\text{sen}(\pi t)$ a função definida em ℝ. Sobre esta função, qual das alternativas abaixo é correta?

A f(t) é uma função par
B f(t) é uma função ímpar.
C o maior valor que f(t) assume é 9.
D o menor valor que f(t) assume é 3.
E o menor valor que f(t) assume é $\frac{1}{2}$.

51 **FGV** Determine o domínio da função $f(x) = \log(1 \quad \text{sen}^2 x)$.

52 Demonstre as fórmulas da soma de senos de arcos em progressão aritmética e soma de cossenos de arcos também em progressão aritmética. Observe:

$$\text{sen}\,a_1 + \text{sen}\,a_2 + \quad + \text{sen}\,a_n = \frac{\text{sen}\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}$$

$$\cos a_1 + \cos a_2 + \quad + \cos a_n = \frac{\cos\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Verifique agora a igualdade:
$\text{sen}\,1° + \text{sen}\,2° + \quad + \text{sen}\,179° + \text{sen}\,180° = \text{cotg}\,30°$

53 **Udesc 2016** Se m é a soma de todas as raízes da equação $\text{tg}(x) \quad 2\,\text{sen}\,(2x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi]$, então $\cos\left(\frac{m^2}{\pi}\right) - \cos^2(m)$ é igual a:

A 1
B 2
C 0
D 2
E 1

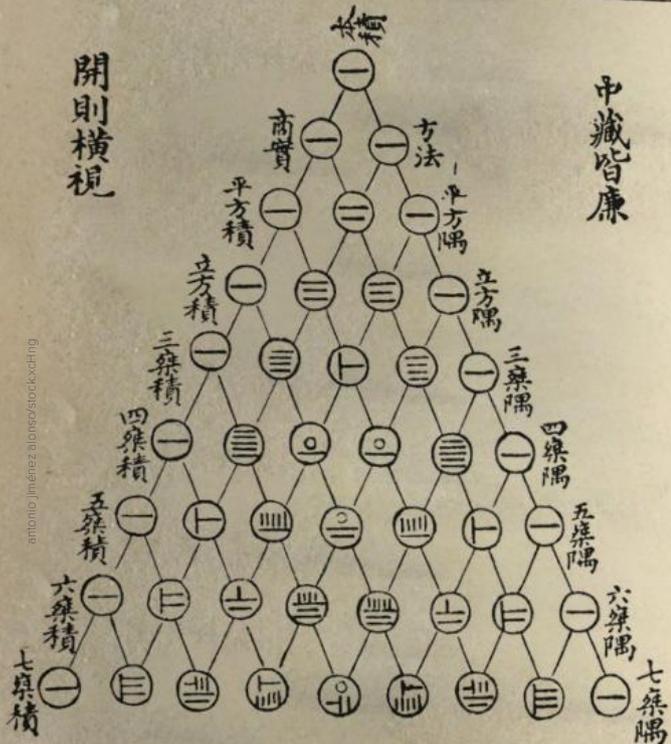
54 **Mackenzie 2015** A soma das raízes da equação $\cos 2x + \cos 4x = 0$, no intervalo $[0, \pi]$, é

A 0
B $\frac{\pi}{2}$
C π
D $\frac{3\pi}{2}$
E $\frac{2\pi}{3}$

55 **UFJF/Pism** No processo de calcular o ângulo x formado entre duas avenidas transversais, um engenheiro obteve a seguinte equação $\text{sen}\,x = \text{sen}^3\,x$ Sabendo que x não excede 180°, é CORRETO afirmar que:

A $x = \quad 1$
B $x = 0$
C $x = 1$
D $x = \frac{\pi}{2}$
E $x = \frac{3\pi}{2}$

56 Determine o conjunto-solução da inequação $\text{sen}\,x + \cos x < 1$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

antonio jiménez alonso/stock.xchng

FRENTE 1

CAPÍTULO 12

Análise combinatória

Página do trabalho intitulado *Su yuan yu zhian*, publicado em 1303 pelo matemático Chu Shï-kié. Esta página apresenta o triângulo aritmético onde encontramos os coeficientes binomiais até a oitava potência, que mais tarde ficaria conhecido como *Triângulo de Pascal.*

Conceitos básicos e princípio fundamental da contagem

Vamos iniciar um estudo que visa à contagem do nú mero de elementos de um conjunto, sendo que esses elementos possuem propriedades específicas.

Quando o conjunto possui poucos elementos, podemos formar todos eles e contar a quantidade, mas, dependendo do problema, a contagem um a um torna-se impraticável. Daí a necessidade de métodos especiais.

Observe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

1 Determine a quantidade de números com dois algarismos formados a partir dos dígitos 4, 5 e 6.

Resolução:
A = {44, 45, 46, 55, 54, 56, 66, 65 e 64}; 9 elementos.

2 Determine o conjunto das sequências das letras que são obtidas, mudando-se a ordem das letras da palavra ITA (que corresponde aos chamados anagramas).

Resolução:
A = {ITA, IAT, AIT, ATI, TAI e TIA}; 6 elementos

3 Uma moça possui no guarda roupa 4 blusas e 5 saias De quantas maneiras ela pode se vestir?

Resolução:
Observe o conjunto das blusas:
$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ e o conjunto das saias:
$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$
Devemos contar todos os pares formados por um elemento de B e um elemento de S Uma maneira de visualizar essa contagem é através do chamado diagrama da árvore. Observe sua aplicação.

b_1	$s_1 \to (b_1; s_1)$	1		b_2	$s_1 \to (b_2; s_1)$	6
	$s_2 \to (b_1; s_2)$	2			$s_2 \to (b_2; s_2)$	7
	$s_3 \to (b_1; s_3)$	3			$s_3 \to (b_2; s_3)$	8
	$s_4 \to (b_1; s_4)$	4			$s_4 \to (b_2; s_4)$	9
	$s_5 \to (b_1; s_5)$	5			$s_5 \to (b_2; s_5)$	10
b_3	$s_1 \to (b_3; s_1)$	11		b_4	$s_1 \to (b_4; s_1)$	16
	$s_2 \to (b_3; s_2)$	12			$s_2 \to (b_4; s_2)$	17
	$s_3 \to (b_3; s_3)$	13			$s_3 \to (b_4; s_3)$	18
	$s_4 \to (b_3; s_4)$	14			$s_4 \to (b_4; s_4)$	19
	$s_5 \to (b_3; s_5)$	15			$s_5 \to (b_4; s_5)$	20

Tab. 1 Após uma contagem, encontramos 20 grupos.

4 Quantos números de três algarismos, todos distintos, podemos formar a partir dos dígitos 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução:
A = {123, 124, 132, 142, ..., 542, 543}
Teremos um grande trabalho para efetuar essa contagem sem a utilização de métodos especiais. Pode parecer um contrassenso, mas a análise combinatória vai fazer uma contagem sem "contar".

Princípio fundamental da contagem

Considere dois conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_p\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_q\}$. Quantos pares ordenados (a_i, b_j) podemos formar com $a_i \in A$ e $b_j \in B$?

Observe o esquema:
1ª linha $(a_1, b_1); (a_1, b_2); (a_1, b_3);\ \ ; (a_1, b_q) \Rightarrow$ q pares
2ª linha $(a_2, b_1); (a_2, b_2); (a_2, b_3); ...; (a_2, b_q) \Rightarrow$ q pares
⋮
p-enésima linha $(a_p, b_1); (a_p, b_2); (a_p, b_3);\ \ ; (a_p, b_q) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ q pares
o número de pares ordenados é:

Esse cálculo serve também para avaliar o número de pares ordenados de um produto cartesiano (A x B = A cartesiano B).

Determine o número de pares ordenados que podemos formar com elementos distintos do conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_p\}$.

Observe o esquema.
1ª linha $(a_1, a_2); (a_1, a_3); (a_1, a_p); ... \Rightarrow p - 1$ pares
2ª linha $(a_2, a_1); (a_2, a_3); (a_2, a_p) \Rightarrow p\ \ \ 1$ pares
⋮
p-enésima linha $(a_p, a_1); (a_p, a_2); (a_p, a_{p\ \ 1}) \Rightarrow p\ \ \ 1$ pares
O número de pares é:

$$\underbrace{(p\ \ 1)\ \ (p\ \ 1)\ \ ...\ \ (p\ \ 1)}_{p\ \text{vezes}} = p(p\ \ 1)$$

Essas duas ideias auxiliam a resolução de problemas como estes exercícios resolvidos:

Exercícios resolvidos

5 Quantos números de dois algarismos, distintos ou não, podemos formar utilizando os dígitos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução:
Cada número pode ser considerado como um par ordenado (a, b), onde a ∈ {3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9} e b ∈ {3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9}, assim: 7 7 = 49 números

6 Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 4, 5, 6, 7 e 8?

Resolução:
Cada número pode ser representado como um par ordenado, tal que a ∈ {4, 5, 6, 7 e 8} e b ∈ {4, 5, 6, 7 e 8}, onde a ≠ b, assim: 5 · 4 = 20 números.

O princípio fundamental da contagem, propriamente dito, é o seguinte:

Considere p conjuntos com números de elementos diversos:

$A = \{a_1, a_2, \quad, a_{n_1}\}, n(A) = n_1$
$B = \{b_1, b_2, ..., b_{n_2}\}, n(B) = n_2$
⋮
$Z = \{z_1, z_2, ..., z_{n_p}\}, n(Z) = n_p$

O número de duplas ordenadas, ou seja, uma sequência de p elementos, é dado por: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots n_p$.

Exercício resolvido

7 Determine quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Resolução:

Cada número pode ser representado como uma tripla ordenada (a, b, c), tal que:
a ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, b ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e c ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} tal que a ≠ b ≠ c
7 · 6 · 5 = 210 números.

Fatorial

Podemos perceber que os exemplos iniciais da análise combinatória se apoiam muito nos produtos de números naturais consecutivos.

Foi definido então o **fatorial de p**, indicado por p!, tal que:

$p! = p(p \quad 1)(p \quad 2) \quad 3 \quad 2 \quad 1$ para $p \geq 2$
$1! = 0! = 1$

! Atenção

Podemos escrever para simplificar alguns cálculos:
$p! = p(p - 1) \cdot (p - 2) \cdot (p - 3)!$

Observe os exercícios resolvidos

Exercícios resolvidos

8 Calcular $\frac{12!}{9!3!}$.

Resolução:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

9 Simplifique $n^2 \cdot (n \quad 2)!\left(1 \quad \frac{1}{n}\right)$ para $n \geq 2$

Resolução:

$$n^2 \; n(\; 2 \; !)1\left(\quad \frac{1}{n}\right) = n(n - 1) \cdot (n - 2)! = n!$$

10 Simplifique a expressão $\frac{(K!)^3}{\{(K-1)!\}^2}$.

Resolução:

$$\frac{K^3 \; K(\; 1 \; !)^3}{(K-1)^2 \, !} = K^3 \; K(\; 1 \pm) \; K \; K^2 \; K \; (\pm! \;) K \; K!^2$$

11 Mostre que $\frac{(n+2)! + (n+1) \cdot (n \quad 1)!}{(n+1) \cdot (n \quad 1)!}$ é um quadrado perfeito.

Resolução:

$$\frac{(n+2)(n+1) \cdot n(n-1)! \; + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \; \cdot \; (n \quad 1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)(n \; +1)![1 + n(n \quad 2)]}{(n+1) \cdot (n-1)!} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 + n^2 + 2n = (n + 1)^2$, que é um quadrado perfeito.

Arranjos com repetição

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \quad, a_p\}$ um conjunto com p elementos.

Chamamos arranjo com repetição dos p elementos, tomados r a r, toda sequência de r elementos tomados de A, não necessariamente distintos Esquematicamente, temos:

(__, __, __, ..., __)
r elementos

$(\text{arranjo})_{p,\,r} = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{r \text{ vezes}} = p^r$

FRENTE 1

Observe o exercício resolvido.

Exercício resolvido

12 Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B), uma azul (A) e outra marrom (M) Uma bola é extraída, sua cor é observada e ela é recolocada na urna. Em seguida, outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores obtidas?

Resolução:
Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) tal que $x, y \in \{V, B, A, M\}$, assim $4 \cdot 4 = 16$.

Arranjos

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_p\}$ um conjunto com p elementos. Chamamos arranjos dos p elementos, tomados r a r $(1 \leq r \leq p)$, qualquer sequência de r elementos tomados de A, todos distintos

Observe o exercício resolvido.

Exercício resolvido

13 Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x nú meros ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine x.

Resolução:
Cada sequência é uma tripla ordenada (a, b, c), tal que $c \in \{1, 3\}$, $b \in \{1, 2, 3, 4, 6 \text{ e } 8\}$ e $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, respeitando $a \neq b \neq c$, assim: $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$ números.

Permutações

Seja A um conjunto com p elementos, ou $A = \{a_1, a_2, a_3, \quad, a_p\}$ Chama-se permutação o arranjo de p elementos tomados p a p.

Exercícios resolvidos

14 Com a palavra TEORIA, quantos anagramas existem?

Resolução:
Temos 6 letras e cada sequência é formada por 6 elementos permutados, assim: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

15 Com a palavra TEORIA, quantos anagramas começam com a letra E?

Resolução:
Fixamos a 1ª letra como E e permutamos as outras 5, assim:
E_ _ _ _ _ $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

16 Quantos anagramas da palavra TEORIA possuem as vogais juntas?

Resolução:
Assim, vamos considerar os elementos:
T, R e EOIA, permutando os 3 elementos, temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

Mas, em cada uma dessas permutações, as vogais podem permutar entre si, 4!, totalizando:

$$3! \cdot 4! = 6 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 6 \cdot 24 = 144$$

17 Quantos anagramas da palavra TEORIA começam por uma vogal?

Resolução:
$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 5! = 4 \cdot (120) = 480$
4 vogais para escolher.

18 Com os algarismos 0, 1, 2, 5 e 6, sem repetição, quantos números compreendidos entre 100 e 1000 poderemos formar?

Resolução:

a b c e a 0 c

$a \in \{1, 2, 5, 6\}$ $4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$

$b \in \{1, 2, 5, 6\}$ $\frac{a}{4} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{0}{1} = 12$

$c \in \{1, 2, 5, 6\}$

4 3 2

Total = 24 + 12 + 12 = 48 números.

19 De quantas maneiras 20 pessoas podem se sentar em um ônibus de 42 lugares?

Resolução:
Cada pessoa fará uma escolha do seguinte modo:
1ª pessoa: 42 alternativas
2ª pessoa: 41 alternativas.
3ª pessoa: 40 alternativas.
⋮
20ª pessoa: 23 alternativas.
Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot ... \cdot 23 = \frac{42!}{22!}$$

De um modo geral, o número de arranjos simples de n elementos, tomados p a p, pode ser indicado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \; ; n \geq p$$

Exercício resolvido

20 Quantas palavras de três letras podemos formar utilizando somente vogais?

Resolução:
Cada palavra é um arranjo simples de três elementos dentre os cinco dados. Existem, portanto:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ palavras}$$

! Atenção

Permutações e arranjos simples são grupos em que não é considerada a possibilidade, ou seja, todos os elementos no grupo são distintos entre si.

Leia atentamente as observações.

a) A característica principal dos arranjos é que a ordem dos elementos do grupo faz a diferença. É importante estar sempre atento ao tipo de grupo que se pretende contar, para determinar se a ordem importa ou não.
Por exemplo, números, filas, sequências e palavras, enquanto conjuntos, times e comissões são grupos nos quais a ordenação não faz diferença.

b) A permutação simples é um caso particular do arranjo simples, em que n = p

$$A_{n;n} = \frac{n!}{0!} = n! = p_n$$

c) A ideia de arranjo simples está associada à noção de função injetora, da seguinte forma: f: P ⟶ N, onde P = {1, 2, 3, ..., p} e N possui n elementos que serão tomados em grupos de P elementos. Como n ≥ p e a cada elemento de N associamos um único elemento de P, a função é injetora.
O número de funções injetoras distintas de P em N é igual ao número de arranjos de n elementos tomados p a p.

Exercícios resolvidos

21 Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {a, b, c, d, e}, quantas funções injetoras existem de A em B?

Resolução:
Releia a observação **c** do box "Atenção!". Temos:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 120 \text{ funções.}$$

22 Quantos números compreendidos entre 100 e 1000 são formados por algarismos distintos, escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução:
Esses números são todos de três algarismos, assim:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ números.}$$

Combinações

Seja A um conjunto de n elementos $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Chamamos de combinações dos n elementos, tomados p a p, os subconjuntos de A constituídos de p elementos. Observe a ideia abaixo.

A = {a, b, c, d}

Combinações dos 4 elementos tomados dois a dois:

{a; b} {a; c} {a; d} {b; c}
{b; d} {c; d} ⟶ 6 elementos

Combinações dos 4 elementos tomados três a três.

{a; b; c} {a; b; d} {a; c; d}
{b; c; d} ⟶ 4 elementos

De maneira geral, indicamos o número de combinações simples de n elementos tomados p a p (n ≥ p)
Assim:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} \Leftrightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercícios resolvidos

23 Quantos times de futebol de salão podemos formar utilizando 8 pessoas?

Resolução:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ times}$$

24 Em uma assembleia há 57 homens e 31 mulheres Quantas comissões de 8 pessoas podemos formar, sendo 5 mulheres e 3 homens?

Resolução:
Vamos formar as subcomissões.
Mulheres: $C_{31,\,5} = 169\,911$
Homens: $C_{57,\,3} = 29\,260$
No total, temos $C_{31,\,5}\ \ C_{57,\,3} = 4\,971\,595\,860$ comissões.

25 Quantas diagonais tem um polígono regular?

Resolução:
O polígono tem n vértices $A_1, A_2, \ \ , A_n$
Cada segmento é determinado por um par não ordenado de dois vértices ($\overline{A_1A_4} \equiv \overline{A_4A_1}$, por exemplo). Vamos combinar todos os pontos, dois a dois, e formar todos os segmentos possíveis, totalizando diagonais e lados também.
Esse total de segmentos será de $\binom{n}{2}$

Como existem n lados, temos:

$$d = \binom{n}{2} - n = \frac{n!}{2!(n \ \ 2)!} - n = \frac{n(n \ \ 1)}{2} - n =$$

$$= \frac{n^2 \ \ n}{2} \not{n} \ \frac{n^2 \ \ 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

26 Calcule o valor de p sabendo que $\dfrac{C_{8,\,p+2}}{C_{8,\,p+1}} = 2$.

Resolução:
Calculando separadamente, temos:

$$C_{8,\,p+2}\ \frac{8!}{(p+2)!(6 \ \ p)!} = \frac{8!}{(p+2)\cdot(p+1)!(6 \ \ p)!}$$

$$C_{8,\,p+1}\ \frac{8!}{(p+1)!(7-p)!} = \frac{8!}{(p+1)!(7-p)(6-p)!}$$

$$\frac{C_{8,\,p+2}}{C_{8,\,p+1}} = \frac{7-p}{p+2} = 2 \Rightarrow 7 = p \ \ 2p \ \ 4 \Rightarrow 3 = 3p \Rightarrow p = 1$$

Revisando

1 Determine $n \in \mathbb{N}$ na seguinte equação:

$$(n!)^2 \ \ 23 \cdot (n!) \ \ 24 = 0.$$

2 Simplifique a expressão:

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!\cdot\left(n^2+n\right)} \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq 1$$

3 Dispondo dos algarismos 1, 2, 4, e 7, quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podemos formar?

4 Dispondo dos algarismos 1, 2, 4, e 7, quantos números naturais de 4 algarismos podemos formar?

5 Em quantas ordens podemos colocar 5 pessoas que vão formar uma fila?

6 Quantos números naturais de 4 algarismos, sem repetição, podemos formar com os elementos de A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}?

7 Quantos e quais são os subconjuntos de A = {a; b; c; d} contendo 2 elementos?

Exercícios propostos

1 Calcular:

a) $\frac{10!}{12!}$

b) $\frac{3!7!}{5!}$

2 Prove que $\frac{1}{n!}\ \ \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$

3 Exprimir, mediante fatoriais, a expressão 2 4 6 8   (2n).

4 Exprimir, mediante fatoriais, a expressão $1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n - 1)$.

5 Obter m na equação: $(m + 2)! = 72\ m!$.

6 Obter n, tal que $(n - 1)! = 24$.

7 Simplificar as seguintes expressões:

a) $\frac{n!}{(n-2)!(n-1)}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n\ \ 1)!}$

8 Exprimir o produto $n(n - 1)$ por meio de fatorial.

9 Simplificando a expressão $\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+1)!}$, obtemos:

10 Simplifique as seguintes frações:

a) $\frac{n!}{(n+1)!}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$

d) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!}$

e) $\frac{(n-p-2)!}{(n-p)!}$

f) $\frac{(n\ \ +p\ \ 1)!}{(n\ \ p\ \ 3)!}$

g) $\frac{(m-n-1)!}{(m\ \ +n\ \ 1)!}$

h) $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$

i) $\frac{n! \cdot (n\ \ p)!}{(n-p-1)! \cdot (n+1)!}$

j) $\frac{(2n+1)!(n\ \ p\ \ 1)!}{(n-p+1)!(2n-1)!}$

k) $\frac{(n+2)!}{(n\ \ +1)!(n^2\ \ n)}$

l) $\frac{(n-3)! \cdot (n^2-3n+2)}{(n-1)! \cdot n}$

11 Resolva as seguintes equações na incógnita *n*:

a) $(2n\ \ \ 3)! = 5040$

b) $(n!)^2 - 7(n!) + 6 = 0$

c) $(n!)^2 + n!\ \ \ 2 = 0$

d) $2(n!)^2 + 5n! - 3 = 0$

e) $\frac{n!+(n-1)!}{(n+1)!\ \ \ n!} = \frac{6}{25}$

f) $\frac{(n+1)!-n!}{(n\ \ \ 1)!} = 7n$

g) $(\log_3 n)! = 24$

h) $\log_{120} 1 + \log_{120} 2 + \log_{120} 3 + ... + \log_{120} n = 1$

12 Simplifique as expressões:

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

b) $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

c) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-2)!}$

13 **Unicamp 2020** Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fo tografadas juntas é igual a:

A 48
B 72
C 96
D 120

14 **UEMG 2019** Em uma apresentação na escola, oito ami gos, entre eles Carlos, Timóteo e Joana, formam uma fila Calcule o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada de modo que Carlos, Timóteo e Joana fiquem sempre juntos:

A 8!
B $5! \cdot 3$
C $6! \cdot 3!$
D $8! \cdot 3!$

15 **ESPM-SP 2018** O número de anagramas da palavra COLEGA em que as letras L, E e G aparecem juntas em qualquer ordem é igual a:
A 72
B 144
C 120
D 60
E 24

16 **UEG 2018** O número de anagramas que se pode formar com a palavra ARRANJO é igual a
A 21
B 42
C 5040
D 2520
E 1260

17 **EPCar 2018** Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo: 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco. Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra tão somente pela cor dos carros, o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as dez vagas é igual a
A 12600
B 16200
C 21600
D 26100

18 **UFJF 2018** Anagrama é a reordenação de letras de uma palavra para formar outras palavras
a) Quantos são os anagramas da palavra ***paralela***?
b) Quantos são os anagramas da palavra ***paralela*** que começam com e terminam com a mesma letra?

19 **Efomm 2017** Quantos anagramas são possíveis formar com a palavra CARAVELAS, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?
A 24
B 120
C 480
D 1920
E 3840

20 **UEPG 2018** Esse trecho foi retirado do poema “Canção do Exílio”, de Gonçalves Dias.

Minha TERRA tem primores,
Que tais não encontro eu cá;
Em CISMAR – sozinho, à noite –
Mais prazer encontro eu lá;
Minha terra tem PALMEIRAS,
Onde canta o Sabiá

Considerando o trecho citado e as palavras em destaque, assinale o que for correto
01 720 é o número de anagramas formados com as letras da palavra CISMAR
02 O número de anagramas formados com as letras da palavra TERRA é 60.
04 Podemos formar seis palavras, a partir da palavra TERRA, que iniciam com T e terminam com A
08 Podemos formar 20160 palavras, a partir da palavra PALMEIRAS, que terminam com consoante
16 360 é o número de anagramas que formamos com as letras da palavra PALMEIRAS.

Soma:

21 Uma bandeira é formada de sete listras que devem ser pintadas de três cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

22 **FGV 2017** Somando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, o resultado será igual a:
A 2400
B 2444
C 6000
D 6600
E 6660

23 **UEG 2017** Um modelo de carro sai de fábrica pintado de duas cores, uma na capota e outra distinta em suas demais partes Essa fábrica tem dez opções de cores disponíveis para usar nesse carro Dessa forma, o número de maneiras que esse carro pode ser pintado é de
A 10
B 20
C 45
D 90
E 100

24 **UEG 2017** Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário. Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?
A 120
B 60
C 40
D 20
E 10

25 **UFJF 2017** Para concorrer a eleição a diretor e a vice-diretor de uma escola, há 8 candidatos. O mais votado assumirá o cargo de diretor e o segundo mais votado, o de vice-diretor. Quantas são as possibilidades de ocupação dos cargos de diretor e vice-diretor dessa escola?

A 15
B 27
C 34
D 56
E 65

26 **UEG 2016** Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mes ma cor O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é?
A 64
B 24
C 12
D 4

27 **UEG 2016** Uma montadora de carros oferece a seus clientes as seguintes opções na montagem de um carro: 2 tipos de motores (1.8 ou 2.0), 2 tipos de câm bios (manual ou automático), 6 cores (branco, preto, vermelho, azul, cinza ou prata) e 3 tipos de acabamen to (simples, intermediário ou sofisticado). De quantas maneiras distintas pode-se montar esse carro?
A 4
B 13
C 24
D 36
E 72

28 **UPE 2018** A prova final de Geografia de uma escola é composta de 10 itens com alternativas do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um estudante poderá responder esta prova, de forma que ele só assinale apenas uma alternativa em cada questão?
A 20
B 64
C 256
D 512
E 1024

29 Responda:
a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FUTEBOL?
b) Desses, quantos terminam em F?
c) Quantos terminam em BOL?
d) Quantos começam por vogal?
e) Quantos começam e terminam por consoantes?
f) Quantos apresentam as letras BOTE juntas e nesta ordem?
g) Quantos apresentam as letras FUL juntas?

30 De quantas maneiras podemos colocar 10 pessoas (P_1, P_2, P_3, ..., P_{10}) em fila de modo que:
a) P_1 e P_2 fiquem sempre juntas?
b) P_8, P_9 e P_{10} fiquem sempre juntas?
c) P_5 fique em uma das extremidades?
d) P_2 e P_9 fiquem nas extremidades da fila?
e) As extremidades estejam ocupadas por P_4 ou P_5 ou P_6 ou P_7?

31 Colocando em ordem decrescente todos os números obtidos a partir de 701583, permutando-se os seus algarismos, que posição ocupa o número 357018?

32 Permutando-se os algarismos do número 124 e somando-se todos os números assim obtidos, qual será o valor dessa soma?

33 De quantos modos três rapazes e duas moças podem ocupar sete lugares em fila, de forma que as moças se sentem juntas uma da outra e os rapazes juntos uns dos outros?

34 **Fuvest** Considere os números obtidos a partir de 12345 efetuando-se todas as permutações de seus algarismos Colocando se esses números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?

35 **Mackenzie** Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são for mados números de 4 algarismos distintos. Dentre esses, determine quantos são divisíveis por 5.

36 **FGV** Um *show* de música será constituído de três canções e duas danças. De quantas maneiras distintas pode-se montar o programa, de forma que o *show* comece com uma canção, termine com uma canção e as duas danças não sejam em seguida?

37 **Unitau** Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra VESTIBULAR, tais que comecem com a letra V?

38 **IME** Considere os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Uma das permutações possíveis destes algarismos origina o número 42.351. Determine a soma dos números formados quando os algarismos acima são permutados de todos os modos possíveis.

39 De quantos modos diferentes podemos vestir 3 meninos, cada um com uma calça, uma camisa e um paletó, dispondo, para isso, de 5 calças, 6 camisas e 4 paletós?

40 **Famema 2020** Em uma classe há 9 alunos, dos quais 3 são meninos e 6 são meninas. Os alunos dessa classe deverão formar 3 grupos com 3 integrantes em cada grupo, de modo que em cada um dos grupos haja um menino. O número de maneiras que esses grupos podem ser formados é:
A 30
B 60
C 90
D 120
E 15

41 **EsPCEx 2020** O Sargento encarregado de organizar as escalas de missão de certa organização militar deve escalar uma comitiva composta por um capitão, dois tenentes e dois sargentos. Estão aptos para serem escalados três capitães, cinco tenentes e sete sargentos. O número de comitivas distintas que se pode obter com esses militares é igual a

A 630
B 570
C 315
D 285
E 210

42 **Unioeste 2019** Uma empresa possui 10 diretores, dos quais, 3 são suspeitos de corrupção. Foi resolvido se fazer uma investigação composta por uma comissão de 5 diretores da empresa A única condição imposta é que a comissão de investigação selecionada tenha a maioria de diretores não suspeitos Selecionada, ao acaso, uma comissão para apuração das suspeitas for mada por diretores desta empresa, é CORRETO afirmar que a probabilidade de que esta comissão atenda à condição imposta está no intervalo:

A (0,01; 0,50)
B (0,50; 0,70)
C (0,70; 0,80)
D (0,80; 0,90)
E (0,90; 0,99)

43 **Unesp 2019** Bianca está preparando saquinhos com balas e pirulitos para os convidados da festa de ani versário de sua filha. Cada saquinho irá conter 5 balas e 3 pirulitos, ou 3 balas e 4 pirulitos, já que ambas as combinações resultam no mesmo preço. Para fazer os saquinhos, ela dispõe de 7 sabores diferentes de balas (limão, menta, morango, framboesa, caramelo, canela e tutti frutti) e 5 sabores diferentes de pirulito (chocolate, morango, uva, cereja e framboesa) Cada bala custou 25 centavos e cada pirulito custou x cen tavos, independentemente dos sabores.

a) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja balas de um mesmo sabor nem pirulitos de um mesmo sabor em cada saquinho? Qual o preço de cada pirulito?
b) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja sabores repetidos em cada saquinho?

44 **UFU 2018** Em um laboratório de análises clínicas, um recipiente, fixado em uma estante, em que são arma zenados tubos idênticos coletores de sangue tem o formato indicado na Figura. Esse recipiente é composto por 13 compartimentos e apenas um tubo pode ser depositado em cada compartimento.

Baseando-se nessas informações, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar:

a) o número possível de formas para se depositar, ao acaso, 5 desses tubos coletores de sangue nesse recipiente
b) qual é a probabilidade de que 5 desses tubos coletores de sangue depositados no recipiente não tenham compartimentos vazios entre eles

45 **UEG 2016** Numa reunião entre professores e alunos, decidiu-se formar uma comissão composta por 2 professores e 3 alunos. Sabendo-se que há 10 professores e 20 alunos dispostos a participar dessa comissão, o número de maneiras distintas que se pode formá-la é de

A 333333
B 51300
C 102600
D 142506
E 615600

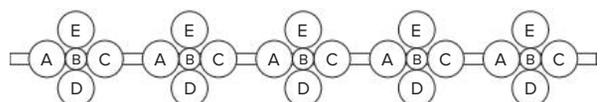
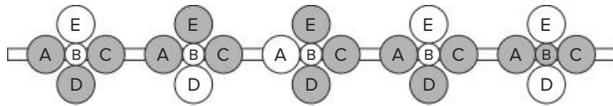
46 **UPF 2018** Uma equipe esportiva composta por 5 jogadoras está disputando uma partida de dois tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo, podem ser feitas até 3 substituições, e, para isso, o técnico dispõe de 4 jogadoras na reserva. O número de formações distintas que podem iniciar o segundo tempo é:

A 120
B 121
C 100
D 40
E 36

47 **Famerp 2018** Lucas possui 6 livros diferentes e Milton possui 8 revistas diferentes. Os dois pretendem fazer uma troca de 3 livros por 3 revistas. O total de possibilidades distintas para que essa troca possa ser feita é igual a

A 1040
B 684
C 980
D 1120
E 364

48 **EPCar 2020** Um pisca-pisca usado em árvores de natal é formado por um fio com lâmpadas acopladas, que acendem e apagam sequencialmente. Uma pessoa comprou um pisca-pisca, formado por vários blocos, com lâmpadas em formato de flores, com o seguinte padrão:

- Cada bloco é composto por 5 flores, cada uma com 5 lâmpadas circulares, de cores distintas (A, B, C, D, E) como na figura:

- Em cada flor, apenas 3 lâmpadas quaisquer acen dem e apagam juntas, por vez, ficando as outras duas apagadas
- Todas as 5 flores do bloco acendem e apagam juntas
- Em duas flores consecutivas, nunca acendem e apa gam as mesmas 3 cores da anterior Assim, considere que uma composição possível para um bloco acen der e apagar corresponde à figura abaixo:

O número de maneiras, distintas entre si, de contar as possibilidades de composição para um bloco desse pisca-pisca é

A 10^5
B $9^4 \cdot 10$
C 9^3
D 9^3 10

49 **Famema 2019** Determinado curso universitário oferece aos alunos 7 disciplinas opcionais, entre elas as disciplinas A e B, que só poderão ser cursadas juntas. Todo aluno desse curso tem que escolher pelo menos uma e no máximo duas disciplinas opcionais por ano. Assim, o número de maneiras distintas de um aluno escolher uma ou mais de uma disciplina opcional para cursar é

A 18
B 21
C 11
D 13
E 16

50 **EsPCEx 2019** Considere o conjunto de números naturais {1, 2, ..., 15}. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é:

A 168
B 196
C 224
D 227
E 231

51 **Efomm 2019** De quantas maneiras diferentes podemos escolher seis pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, de um grupo composto de sete homens e quatro mulheres?

A 210
B 250
C 371
D 462
E 756

52 **UPF 2019** Entre 9 professores da área de Matemática da UPF, 5 serão escolhidos para realizar a correção das provas da primeira fase das Olimpíadas de Matemática. Considerando que entre os 9 apenas 2 não podem ser escolhidos juntos devido a problemas de compatibilidade de horários, a quantidade de maneiras pelas quais a escolha pode ser feita é:

A 70
B 91
C 125
D 21
E 42

53 **Mackenzie 2019** Diz-se que um inteiro positivo com 2 ou mais algarismos é "crescente", se cada um desses algarismos, a partir do segundo, for maior que o algarismo que o precede. Por exemplo, o número 134789 é "crescente" enquanto que o número 2435 não é "crescente". Portanto, o número de inteiros positivos "crescentes" com 5 algarismos é igual a

A 122
B 124
C 126
D 128
E 130

54 **UEG 2019** Um ovo de brinquedo contém no seu interior duas figurinhas distintas, um bonequinho e um docinho. Sabe-se que na produção desse brinquedo, há disponível para escolha 20 figurinhas, 10 bonequinhos e 4 docinhos, todos distintos. O número de maneiras que se pode compor o interior desse ovo de brinquedo é:

A 7600
B 15200
C 800
D 400
E 3800

55 **UEPG 2018** Um grupo de profissionais é formado por seis advogados e oito engenheiros. Considerando que serão formadas comissões com cinco destes profissionais, assinale o que for correto.

01 Podem ser formadas menos que 55 comissões sem nenhum advogado.
02 Em 420 dessas comissões apenas um advogado participa
04 Em 1946 dessas comissões pelo menos um advogado participa.
08 Podem ser formadas 120 comissões com apenas um engenheiro
16 Podem ser formadas mais de duas mil comissões distintas

Soma:

56 **UFJF 2018** Em uma festa havia 21 pessoas presentes. Ao chegarem, cumprimentaram com um aperto de mão uma única vez cada uma das outras pessoas. Quantos apertos de mão ocorreram ao todo?
A 42
B 84
C 105
D 210
E 420

57 **UPE 2018** A turma de espanhol de uma escola é composta por 20 estudantes Serão formados grupos de três estudantes para uma apresentação cultural. De quantas maneiras se podem formar esses grupos, sabendo-se que dois dos estudantes não podem per tencer a um mesmo grupo?
A 6 840
B 6 732
C 4 896
D 1 836
E 1 122

58 **Uece 2017** O número de cordas determinadas por 12 pontos distintos colocados sobre uma circunferência é:
A 54
B 66
C 72
D 78

59 **EEAR 2017** De um grupo de 10 (dez) pessoas, 5 (cinco) serão escolhidas para compor uma comissão. Ana e Beatriz fazem parte dessas 10 (dez) pessoas Assim, o total de comissões que podem ser formadas, que tenham a participação de Ana e Beatriz, é:
A 24
B 36
C 48
D 56

60 **EEAR 2017** Em um campeonato de tênis estão inscritos 10 militares. Para disputar o campeonato, esses militares podem formar ________ duplas diferentes
A 34
B 35
C 44
D 45

61 De um baralho com 52 cartas, são retiradas 10.
a) Em quantos casos haverá pelo menos um ás entre as cartas retiradas?
b) Em quantos haverá somente um ás?
c) Em quantos haverá não menos que dois ases?
d) Em quantos, exatamente 2 ases?

62 Em um vagão de passageiros de um trem, há 2 bancos opostos com 5 lugares cada. De 10 passageiros, quatro desejam se sentar de frente para a locomotiva, três de costas para ela e os três restantes são indiferentes à posição. De quantas maneiras os passageiros podem se instalar?

63 Em um sindicato, são escolhidas 9 pessoas. Dentre elas, há que se eleger o presidente, o vice-presidente, o secretário e o tesoureiro. De quantos modos isso pode ser feito?

64 Dentre os integrantes de uma conferência em que tomam parte 52 pessoas, deve-se escolher uma delegação formada por 5 pessoas. De quantas formas a escolha pode ser feita?

65 Uma mãe tem 2 maçãs e 3 peras. A cada dia, durante 5 dias seguidos, ela dá ao filho uma fruta. De quantas maneiras isso pode ser feito?

66 Um pai tem cinco moedas diferentes, que distribui entre seus 8 filhos de modo que cada filho receba uma ou nenhuma moeda. De quantos modos diferentes ele pode fazer essa doação?

67 Em quantos números de 0 a 999 aparece:
a) o algarismo 9?
b) o algarismo 9 duas vezes?
c) o algarismo 0?
d) o algarismo 0 duas vezes?
e) os algarismos 0 e 9?
f) os algarismos 8 e 9?

Texto complementar

Problema clássico

Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n = p$?

Resolução:

Para encontrar o número de soluções dessas equações, vamos utilizar os símbolos: ● e |. Por exemplo, a equação x + y + z = 4 tem como algumas soluções (2; 1; 1) e (3; 1; 0). A representação delas seria: ● ● | ● | ● e ● ● ● | ● |, respectivamente. Assim, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais ● indica o valor de cada incógnita. Para a equação $x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n = p$, cada solução seria representada por uma fila com n – 1 barras (para separar n incógnitas, devemos utilizar n – 1 barras). Para formarmos uma fila com n – 1 barras e p sinais ●, basta escolher dos n + p – 1 lugares da fila, os p lugares onde serão colocados os sinais ●. Assim, o número de soluções é dado por $\binom{p}{n+p=1}$.

Resumindo

- Para $n \in \mathbb{N}$, temos a definição de fatorial de n

$$n! = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!; & n \geq 1 \end{cases}$$

- O princípio fundamental da contagem diz que se há m modos de tomarmos uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há n modos de tomarmos a decisão D_2, então, o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $m \cdot n$
- O número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos distintos é $P_n = n!$.
- Para selecionarmos p objetos distintos entre n objetos distintos dados, obtemos $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \dbinom{n}{p}$

Quer saber mais?

Sites

- Análise Combinatória.
  Disponível em: <www.somatematica.com br/softwares php#>
  Disponível em: <www.somatematica.com.br/desafios/desafio2.php>.

Exercícios complementares

1 **UFC** Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos Considerando estas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas, iniciadas pelas letras HUI, nesta ordem, e cujo último algarismo seja ímpar.

2 **Unicamp** Sabendo que números de telefone não começam com 0 nem com 1, calcule quantos diferentes números de telefone podem ser formados com 7 algarismos.

3 **Mackenzie** Os números pares com 4 algarismos distintos, que podemos obter com os elementos do conjunto {0; 3; 4; 5; 6; 7; 8}, são em número de:

A 6^3
B 420
C $5 \cdot 6^2$
D $5 \cdot 4^3$
E 380

4 **Cesgranrio** As novas placas dos veículos são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos, como por exemplo GYK 0447. O número de placas diferentes que podem ser construídas é, em milhões de placas, aproximadamente, igual a:

A 1
B 25
C 75
D 100
E 175

5 **UFBA** Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x números ímpares, com três algarismos distintos cada um Determine x

6 Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1; 3; 6; 7; 8; 9?

7 Dez pessoas, entre elas Henrique e Guilherme, devem ficar em fila. De quantas formas isto pode ser feito se os dois querem ficar juntos?

8 Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoante?

9 Temos em uma estante 15 livros, dos quais 4 são os de matemática. De quantas formas podemos colocá-los em ordem na estante, de modo que os livros de matemática fiquem sempre juntos?

10 Formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtém permutando-se os algarismos 1; 2; 4; 6 e 8, que lugar ocupa o número 68 412?

11 Formados e dispostos em ordem crescente os números que se obtém permutando-se os algarismos 2; 3; 4; 8 e 9, que lugar ocupa o número 43 892?

12 Usando o diagrama da árvore, obter todos os arranjos dos elementos de M = {a; b; c; d} tomados dois a dois, e depois três a três.

13 Calcular:

a) $A_{6,\,2}$
b) $A_{4,\,3}$
c) $A_{8,\,4}$

14 Calcular o valor de $\dfrac{A_{5,\,3} - A_{4,\,2}}{16}$

15 Resolver as seguintes equações:

a) $A_{n,\,4} + A_{n,\,3} = 10\ A_{n,\,3}$
b) $A_{x+1;\,2} + A_{x+2;\,2} = 18$

16 Resolver as seguintes equações:

a) $A_{x,\,3} = 6\quad C_{x,\,x\quad 2}$
b) $6C_{x,\,3} + 8C_{x,\,5} = A_{x,\,4}$

17 Se $\dfrac{(n\quad 1)!}{(n-2)!} = 3$, calcule $A_{n+1,\,2}$.

18 Com os algarismos 1, 3, 5 e 7, quantos números de três algarismos podem ser formados, sem repetição?

19 Com os algarismos de 1 a 9, quantas centenas de pa res podem ser formados, sem que haja repetição de algarismos?

20 Dez pessoas disputam uma corrida Quantos são os possíveis resultados para as três primeiras colocações, sabendo-se que não pode haver empates?

21 Quantos números de quatro algarismos, menores que 5000, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 5 e 7, sem que haja repetição de algarismos?

22 Quantos números de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos ímpares, sem repetição, de modo que terminem sempre com 3?

23 Sendo $A_{n,\,3} = A_{n,\,2}$, calcular n.

24 Um grupo tem 10 pessoas. Quantas comissões de no mínimo 4 pessoas podem ser formadas?

25 Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z = 8$.

26 Uma pessoa dispõe de seis calças, quatro paletós e dez camisas De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

27 Em uma estante, existem oito livros de Matemática, três de Física e dois de Biologia De quantas formas diferentes pode-se escolher três livros, sendo um de cada matéria?

28 Uma moeda é lançada sobre uma mesa três vezes Indicando C para cara e K para coroa, fazer o esquema da árvore de possibilidades e calcular de quantas formas a moeda pode cair

29 **Faap-SP** Em um hospital, existem três portas de entrada que dão para um amplo saguão, onde há cinco elevadores Um visitante deve se dirigir ao sexto andar, utilizando um dos elevadores De quantas formas diferentes poderá fazê lo?

30 Com os algarismos de 0 a 6, quantos números de quatro algarismos pode-se formar, sem repetição, de modo que tenham final 5?

31 **UFC** Deseja-se dispor em fila cinco crianças: Marcelo, Rogério, Reginaldo, Daniele e Márcio. Calcule o número das distintas maneiras que elas podem ser dispostas, de modo que Rogério e Reginaldo fiquem sempre vizinhos.

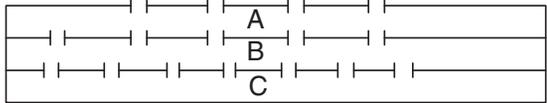
32 Quantos anagramas da palavra SIMULADO:

a) começam com S?
b) começam com S e terminam com O?
c) começam com vogal?
d) terminam por consoante?
e) têm as letras sim juntas nesta ordem?
f) têm as letras sim juntas e em qualquer ordem?

33 **Faap-SP** Quantos anagramas podem ser formados com a palavra VESTIBULAR em que as três letras VES, nesta ordem, permaneçam juntas?

34 Entre as cidades A e B, há seis estradas, e entre as cidades B e C, há quatro. Não há estrada ligando diretamente A e C. De quantas maneiras pode-se ir e voltar de A a C sem usar uma mesma estrada mais de uma vez?

A 552
B 18
C 80
D 20
E 360

35 **PUC-RS** Um rato deve chegar ao compartimento C, passando antes, uma única vez, pelos compartimentos A e B.

Se há quatro portas de entrada em A, cinco em B e sete em C, então o número de modos distintos de chegar a C é:

A 16
B 27
C 33
D 90
E 140

36 Em um campeonato de boxe, há 12 inscritos Quantas lutas podem ser realizadas?

37 Existem 5 pontos entre os quais não existem 3 coli neares. Quantas retas eles determinam?

38 Em um plano, existem 20 pontos dos quais 3 nunca são colineares, exceto 6 que estão sobre uma mesma reta. Encontre o número de retas que esses pontos determinam.

39 São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5, e somente 5, estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em três quaisquer dos 12 pontos?

40 **Mackenzie** Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de quatro algarismos distintos. Dentre eles, serão divisíveis por 5:

A 20 números.
B 30 números.
C 60 números.
D 120 números.
E 180 números.

41 **FMU** O número de anagramas que se pode construir com a palavra ACREDITO e que começam com a letra A é:

A menor que 5.000.
B um múltiplo de 22.
C maior que 10.000.
D um divisor de 15.
E múltiplo de 12.

42 **Mackenzie** Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e seis vagões distintos, sendo um de les restaurante Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colo cado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:

A 120
B 320
C 500
D 600
E 720

43 **Fuvest** O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:

A 24
B 48
C 96
D 120
E 144

44 Resolva as equações:

a) $C_{x,\,2} = 210$
b) $C_{x,\,4} = 2C_{x,\,3}$

45 **PUC-RS** Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, sem repetição, pode-se escrever x números maiores que 2400. O valor de x é:

A 6
B 12
C 14
D 18
E 24

46 **Mackenzie** Em um teste de múltipla escolha, com cinco alternativas distintas, sendo uma única correta, o número de modos distintos de ordenar as alternativas de maneira que a única correta não seja nem a primeira nem a última é:

A 36
B 32
C 60
D 72
E 120

47 Um polígono convexo de n lados tem 35 diagonais. O valor de n é:

A 8
B 10
C 13
D 17
E 11

48 Quantas comissões de três moças e quatro rapazes pode-se formar com a disponibilidade de seis moças e sete rapazes?

A $C_{13,\,7}$
B 700
C 100 800
D 350
E 1 400

49 **FGV** Uma senhora tem dez amigos, dos quais, porém, dois estão brigados entre si. De quantas maneiras ela pode convidar cinco dos dez amigos para jantar, tendo o cuidado de não convidar simultaneamente os dois amigos brigados?

50 **Fuvest** Em um hospital, há três vagas para trabalhar no berçário, cinco no banco de sangue e duas na radioterapia. Se seis funcionários se candidatam para o berçário, oito para o banco de sangue e cinco para a radioterapia, de quantas maneiras distintas essas vagas podem ser preenchidas?

A 30
B 240
C 1 120
D 11 200
E 16 128 000

51 **FGV** Uma empresa tem três diretores e cinco gerentes. Quantas comissões de cinco pessoas podem ser formadas, contendo, no mínimo, um diretor?

A 25
B 55
C 500
D 720
E 4500

52 **FGV** Em uma classe de dez estudantes, um grupo de quatro será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado se dois dos dez são marido e mulher e só irão juntos?

A 98
B 126
C 115
D 165
E 122

53 Dentre doze homens e sete mulheres, formam-se grupos de quatro homens e três mulheres. Quantos grupos diferentes podem ser formados?

54 De quantos modos se pode dispor as letras da palavra MALOTE de maneira que sempre a primeira letra seja vogal?

55 Determine o número máximo de triângulos formados por n pontos distintos.

56 **ITA** Qual a condição para que $\binom{n}{k}$ seja o dobro de $\binom{n}{k \quad 1}$?

57 Resolva o sistema $\begin{cases} C_{n,p} = 78 \\ A_{n,p} = 156 \end{cases}$

58 **UEL** Para responder a certo questionário, preenche-se o cartão apresentado a seguir, colocando-se um "x" em uma só resposta para cada questão.

Cartão-resposta					
Questões	1	2	3	4	5
SIM					
NÃO					

De quantas maneiras distintas pode-se responder a esse questionário?

A 3125
B 120
C 32
D 25
E 10

59 **ITA 2014** Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

60 Designando-se por A, B, C, D, E e F seis cidades, o número de maneiras que permitem a ida de A até F, passando por todas as demais cidades é:

A 18
B 22
C 26
D 24
E 20

61 **Umesp** Em uma reunião de congregação, em que cada professor cumprimentou todos os seus colegas, registraram-se 210 apertos de mão. O número de professores presentes à reunião foi:

A 20
B 15
C 10
D 21
E n.d a

62 **PUC Minas** Com os algarismos {0; 1; 2; 3; 4; 5} pode-se formar números de três algarismos distintos, em um total de:

A 90
B 100
C 110
D 115
E 120

63 **FGV** Dentre seis números positivos e seis números negativos, de quantos modos pode-se escolher quatro números cujo produto seja positivo?

A 720
B 625
C 30
D 960
E 255

64 Os números (2 + 100!); (3 + 100!); (4 + 100!); ...; (100 + 100!):

A são todos divisíveis por 100.
B são todos ímpares.
C são todos inteiros consecutivos não primos.
D formam uma PA de razão 100!
E n.d a

65 **ITA** O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO que não apresentam as cinco vogais juntas é:

A 12!
B (8!) (5!)
C 12! – (8!) (5!)
D 12! – 8!
E 12! – (7!) (5!)

66 Fuvest Com as 6 letras da palavra FUVEST podem ser formadas 6! = 720 "palavras" (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas "palavras" forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª "palavra" começa com:
A EV
B FU
C FV
D SE
E SF

67 Fuvest Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas, serão necessários, aproximadamente:
A 100 dias.
B 10 anos.
C 1 século.
D 10 séculos.
E 100 séculos

68 PUC Campinas O número de anagramas da palavra EXPLODIR, nos quais as vogais aparecem juntas, é:
A 360
B 720
C 1440
D 2160
E 4320

69 Quatro pontos distintos e não coplanares determinam, exatamente:
A 1 plano
B 2 planos.
C 3 planos.
D 4 planos.
E 5 planos.

70 FGV Em um congresso, há 30 professores de Mate mática e 12 de Física. Quantas comissões poderíamos organizar compostas de 3 professores de Matemática e 2 de Física?
A 5.359.200
B 60
C 267960
D 129600
E 4060

71 UPE 2014 Na comemoração de suas bodas de ouro, Sr. Manuel e D. Joaquina resolveram registrar o encon tro com seus familiares através de fotos. Uma delas sugerida pela família foi dos avós com seus 8 netos. Por sugestão do fotógrafo, na organização para a foto, todos os netos deveriam ficar entre os seus avós.
De quantos modos distintos Sr Manuel e D Joaquina podem posar para essa foto com os seus netos?
A 100
B 800
C 40320
D 80640
E 3628800

72 UFF Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos x anagramas que começam por vogal e y anagramas que começam e terminam por consoante. Os valores de x e y são, respectivamente:
A 48 e 36
B 48 e 72
C 72 e 36
D 24 e 36
E 72 e 24

73 FGV Um processo industrial deve passar pelas etapas A, B, C, D e E.
a) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas no início do processo e A deve anteceder B?
b) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo?

74 Cesgranrio Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?
A 180
B 120
C 100
D 48
E 24

75 UEL Considere todos os números inteiros positivos que podem ser escritos permutando-se os algarismos do número 2 341 Quantos dos números considerados são menores que 2 341?
A 9
B 15
C 27
D 84
E 120

76 Mackenzie Em uma sala, há 8 cadeiras e 4 pessoas. O número de modos distintos das pessoas ocuparem as cadeiras é:
A 1680
B 8!
C 8 4!
D $\frac{8!}{4}$
E 32

FRENTE 1

77 Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: Guaraná, Soda e Tônica. De quantas maneiras uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?

78 Um grupo consta de 20 pessoas, das quais 5 matemá ticos De quantas formas podemos formar comissões de 10 pessoas de modo que:

a) nenhum membro seja matemático?
b) todos os matemáticos participem da comissão?
c) haja exatamente um matemático na comissão?
d) pelo menos um membro da comissão seja matemático?

79 **ITA** Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1; 2; 3; 4; 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupem posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupem posições adjacentes?

A 144
B 180
C 240
D 288
E 360

80 **IME** Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama. Há 8 remadores possíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem ocupar posições ímpares e o remador C posição par. Os remadores D, E, F, G e H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

81 Dispõe se de 7 cores distintas para pintar um mapa das 5 regiões do Brasil Pode-se repetir uma vez, no máximo, cada uma das cores Quantas disposições diferentes de cores pode-se obter?

82 Consideramos m elementos distintos. Destaquemos k dentre eles Quantos arranjos simples daqueles m elementos tomados n a n ($A_{m;\,n}$) podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre apenas $r(r < n)$ elementos dos k elementos destacados e que estes r elementos estejam juntos?

shisu_ka/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

7

Noções de Estatística

A Estatística é a ciência que coleta, organiza e apresenta dados de pesquisas. Além disso, a Estatística possui ferramentas capazes de extrair novas informações a partir desses dados, criando escalas de tendências e dispersões que permitem inferir a respeito de acontecimentos futuros.

Introdução

Vários povos, desde a Antiguidade, registravam o número de membros, nascimentos e óbitos e estimavam riquezas para cobrar impostos Processos como esses fazem parte da Estatística.

A Estatística organiza e descreve os dados desejados, analisando-os e interpretando os

Neste capítulo utilizaremos técnicas estatísticas aplicadas em situações de diversas áreas de conhecimento que envolvem análise e coleta de dados.

População e amostra

O conjunto de elementos ou pessoas que serão analisados em uma pesquisa estatística é denominado **população** (ou universo estatístico).

Nem sempre é possível coletar os dados de todos os elementos de uma população devido a questões logísticas, econômicas, de tempo etc. Por esse motivo, é selecionada uma parte (ou subconjunto) da população que se deseja estudar, denominada **amostra**

Por exemplo: para avaliar uma campanha de vacinação em uma cidade, 150 pessoas foram entrevistadas.

- População: população da cidade;
- Amostra: 150 habitantes da cidade.

Variáveis estatísticas

Um fenômeno estatístico é qualquer evento que se pretenda analisar em que seja possível a aplicação do método estatístico. Ele está em correspondência com o número de resultados possíveis de ser apresentado. Por exemplo:

- No fenômeno "elementos da natureza", são quatro os possíveis resultados: água, ar, terra e fogo;
- No fenômeno "países que falam português", tem-se muitos resultados possíveis: Brasil, Cabo Verde, Angola, Moçambique, Portugal, entre outros.

Chama se **variável** o conjunto de resultados possíveis de um fenômeno. As variáveis podem ser quantitativas ou qualitativas.

Variáveis qualitativas

São aquelas cujos valores são expressos por tipos ou atributos, por exemplo, profissão, raça, sexo, cor dos olhos, nacionalidade etc.

Variáveis quantitativas

Os valores indicam quantidade e são expressos por números, por exemplo: idade dos alunos de uma classe, estatura dos elementos de um grupo, salários dos funcionários de uma empresa.

As variáveis quantitativas podem ser discretas ou contínuas

Variáveis discretas

São aquelas cujos valores possuem características mensuráveis que podem assumir apenas um número finito ou infinito contável de valores e, assim, somente fazem sentido valores inteiros. Em geral, são o resultado de contagens. Por exemplo: O número de alunos de uma escola.

Variáveis contínuas

Possuem características mensuráveis de tal maneira que valores fracionados fazem sentido. Usualmente devem ser medidas através de algum instrumento. Exemplos: peso, altura, tempo, pressão arterial etc.

De modo geral, as medições estão relacionadas com as variáveis contínuas e as enumerações com as variáveis discretas.

Organização dos dados

A Estatística tem como viés fornecer métodos para a coleta e auxiliar numa interpretação precisa dos dados. Assim, esses dados (informações) fornecidos devem ser organizados inicialmente.

Antes de organizar os dados, é preciso seguir as seguintes etapas:

1ª) Definir o problema.

Saiba exatamente aquilo que se pretende pesquisar

2ª) Planejar.

Quais informações devem ser obtidas? Como obter essas informações?

3ª) Coletar dados.

Registre aquilo que realmente interessa na questão

Ao final desse processo, agrupe os resultados e faça uma tabulação.

Dados brutos

São os dados coletados por uma pesquisa ou por um estudo que ainda não foram organizados de acordo com seus valores numéricos.

Por exemplo, uma pesquisa feita com 20 alunos do 3º ano do Ensino Médio a respeito de suas alturas mostrou, em cm, os seguintes resultados:

171, 164, 170, 172, 161, 160, 170, 167, 158, 152, 163, 168, 170, 161, 175, 174, 169, 162, 173 e 166

Rol

É a organização dos dados por uma ordenança de va lores, sejam eles crescentes ou decrescentes, facilitando assim que o maior e o menor valor, bem como a amplitude possam ser melhor visualizados.

Do exemplo anterior, temos:

Rol: 152, 158, 160, 161, 161, 162, 163, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 170, 170, 171, 172, 173, 174 e 175.

Atenção

Essas informações podem aparecer em forma de tabelas, o que facilitará outros entendimentos, como a amplitude.

Amplitude

A amplitude de uma amostra é calculada pela diferença entre o maior e o menor dado da amostra

No exemplo anterior, temos a seguinte amplitude:

175   152 = 23

Saiba mais

Os dados da pesquisa anterior são as alturas. A altura de cada aluno é uma classe e, como cada classe possui apenas um dado, elas são chamadas **classes unitárias**

Apresentação de dados

Uma simples observação dos dados não possibilita explicar ou concluir com precisão o comportamento das variáveis em estudo.

Após identificar a natureza e computar os dados brutos, organizando-os em um rol, cabe agora apresentá-los em uma tabela.

Tabela de distribuição de frequências

A partir dos dados brutos, podemos construir uma tabela com o resumo das informações de cada variável, denominada tabela de distribuição de frequências (ou ta bela de frequências).

A contagem dos valores de uma determinada variável é denominada **frequência absoluta**.

Em alguns casos se faz necessário conhecer a razão dos valores situados no intervalo de uma determinada distri buição de frequência em vez do número em si. A essa razão dos valores de uma variável, damos o nome de **frequência relativa**, que estudaremos a seguir.

Frequência relativa

A frequência relativa é a razão entre o número de valores dentro do intervalo e o número total de valores da variável.

Exemplo:

Considere que, em uma avenida com vários semáforos, funcionam somente o vermelho e o verde durante 20 segundos cada um Um carro atravessa 10 semáfo ros num primeiro dia e encontra 7 deles verdes (abertos). Dizemos que a frequência relativa f_1 correspondente à ocor rência de sinais verdes é $f_1 = \frac{7}{10} = 0,7$.

No dia seguinte o mesmo carro passou por 16 semáforos e encontrou 10 verdes (abertos) A frequência relativa f_2, correspondente à ocorrência de sinais verdes, é dada por $f_2 = \frac{10}{16} = 0,625$.

No terceiro dia o mesmo carro passou por 20 semáforos e encontrou 11 verdes (abertos). A frequência relativa f_3, correspondente à ocorrência de sinais verdes é dada por $f_3 = \frac{11}{20} = 0,55$.

Assim, à medida que o número de passagens por se máforos aumenta, espera-se que, o semáforo não estando desregulado (no caso, o vermelho e o verde permanecendo aberto 20 segundos cada), a frequência relativa de ocorrência de sinal verde se estabilize em torno de 0,5 ou 50%.

Esse valor é a probabilidade de se pegar o sinal aberto ou fechado.

Exemplo:

Uma empresa aberta há 12 anos possui hoje 250 funcionários que foram contratados ao longo de sua existência. O "tempo de casa", tempo que cada funcionário trabalha na empresa, está indicado na tabela.

Anos completos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem
0	5	$\frac{5}{250} = 0,02$	2%
1	8	$\frac{8}{250} = 0,032$	3,2%
2	9	$\frac{9}{250} = 0,036$	3,6%
3	10	$\frac{10}{250} = 0,04$	4%
4	10	$\frac{10}{250} = 0,04$	4%
5	15	$\frac{15}{250} = 0,06$	6%
6	20	$\frac{20}{250} = 0,08$	8%
7	25	$\frac{25}{250} = 0,1$	10%
8	30	$\frac{30}{250} = 0,12$	12%
9	40	$\frac{40}{250} = 0,16$	16%
10	60	$\frac{60}{250} = 0,24$	24%
11	8	$\frac{8}{250} = 0,032$	3,2%
12	10	$\frac{10}{250} = 0,04$	4%
TOTAL	250	$\frac{250}{250} = 1$	100%

(fonte fictícia)

Para a variável "tempo de casa" (em anos completos) os valores estão distribuídos nos intervalos de 0 a 12 anos.

É possível construir uma tabela de frequência onde os dados serão agrupados em classes.

Tempo em anos	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)	Porcentagem
$0 \vdash 3$	22	$\frac{22}{250} = 0,088$	8,8%
$3 \vdash 6$	35	$\frac{35}{250} = 0,14$	14%
$6 \vdash 9$	75	$\frac{75}{250} = 0,3$	30%
$9 \vdash\!\dashv 12$	118	$\frac{118}{250} = 0,472$	47,2%
Total	250	$\frac{250}{250} = 1$	100%

(fonte fictícia)

Saiba mais

1) A notação $a \vdash b$ é referente ao intervalo real [a, b[, onde a está incluso e b está excluso, ou seja:

$$a \vdash b = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

2) A amplitude de uma classe $a \vdash b$ é a diferença b a No exemplo anterior, a amplitude de cada classe é 3 – 0 = 3, e a amplitude total é 12 – 0 = 12.

FRENTE 2

Gráficos estatísticos

Os gráficos (ou fluxogramas) tem como finalidade simplificar, ou seja, apresentar informações de uma maneira mais lúdica e compreensível. Alguns são tão simples de ler e interpretar que se tornaram um fenômeno na internet e no mundo.

A maioria dos gráficos deriva do plano cartesiano; porém, eles só começaram a ser usados fora da Matemática mais de um século após a morte de René Descartes (1597-1650).

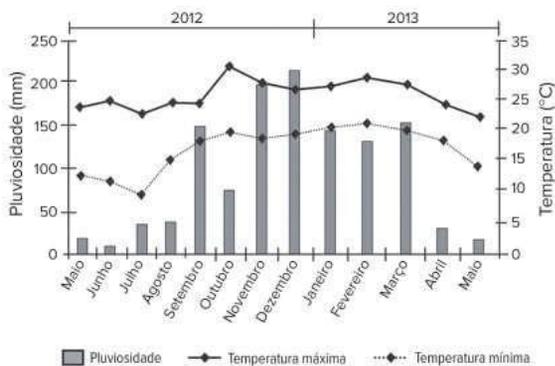
Foi graças à popularização dos gráficos através da imprensa que, a partir do século 19, mesmo sem uma formalidade de aprendizado, muitas pessoas aprenderam a ler gráficos.

Veja a seguir algumas questões de vestibular que utilizam gráficos em seus enunciados ou alternativas.

Exercícios resolvidos

1 Enem 2016 O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região

Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara. O mês escolhido para o plantio foi

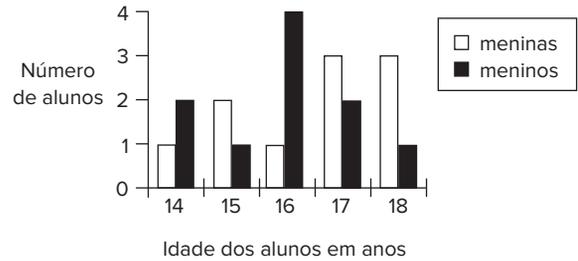
A janeiro.
B fevereiro.
C agosto.
D novembro.
E dezembro.

Resolução:

Ao analisar o gráfico, observamos que no mês de janeiro tivemos o seguinte comportamento:

- Temperatura mínima maior que 15°;
- Variação de Pluviosidade entre janeiro e fevereiro menor que 50 mm;
- Aumento da temperatura máxima entre janeiro e fevereiro menor que 5°.

Alternativa: **A**

2 UFSCar Num curso de iniciação à informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico seguinte.

Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que:

A o número de meninas com, no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idades
B o número total de alunos é 19.
C a média de idade das meninas é 15 anos.
D o número de meninos é igual ao número de meninas
E o número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idade

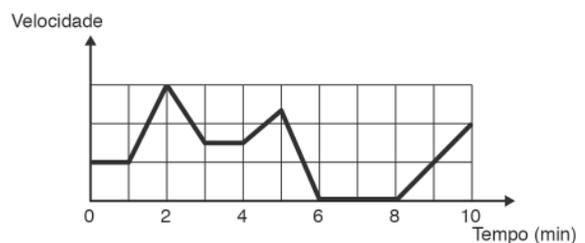
Resolução:

Observando o gráfico, temos:

- Quantidade de meninos: 2+ 1 + 4 + 2+ 1 = 10;
- Quantidade de meninas: 1 + 2+ 1 + 3 + 3 = 10.

Portanto, o curso apresenta a mesma quantidade de alunos por sexo, 10 meninos e 10 meninas.

Alternativa: **D**

3 Enem 2017 Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.

Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

A 4 B 3 C 2 D 1 E 0

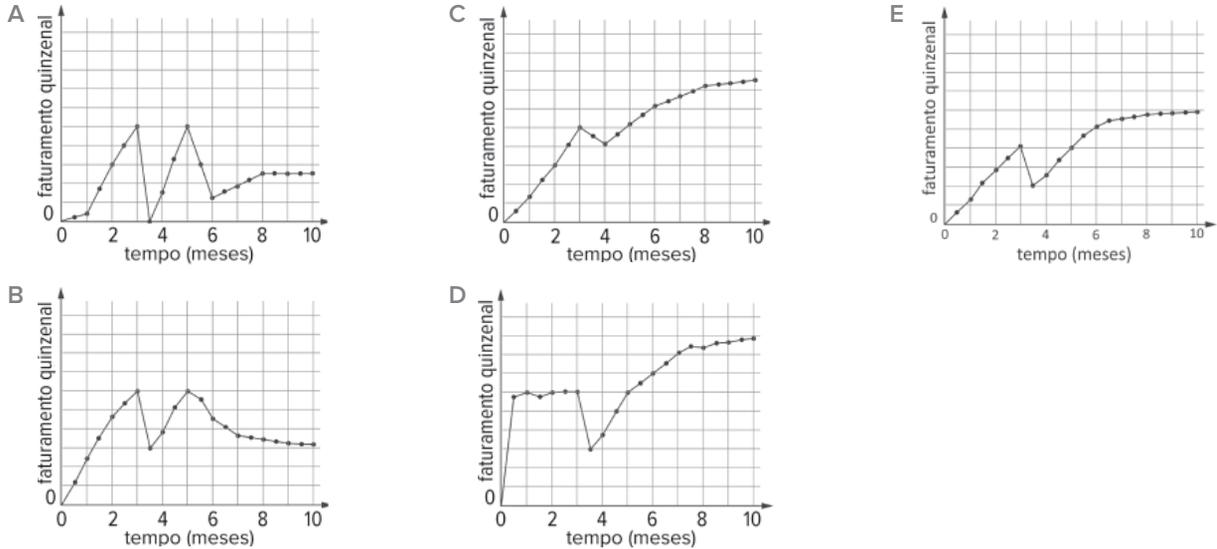
Resolução:

O veículo está imóvel nos instantes em que tem velocidade nula, ou seja, igual a zero.

Observando o gráfico, no intervalo entre 6 a 8 minutos, a velocidade é nula e o veículo estava parado. Portanto, ele ficou 2 minutos parado.

Alternativa: **C**

4 **Fuvest 2019** Um dono de restaurante assim descreveu a evolução do faturamento quinzenal de seu negócio, ao longo dos dez primeiros meses após a inauguração: “Até o final dos três primeiros meses, tivemos uma velocidade de crescimento mais ou menos constante, quando então sofremos uma queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que tinha sido atingido Em seguida, voltamos a crescer, igualando, um mês e meio depois dessa queda, o faturamento obtido ao final do terceiro mês. Agora, ao final do décimo mês, estamos estabilizando o faturamento em um patamar 50% acima do faturamento obtido ao final do terceiro mês”

Considerando que, na ordenada, o faturamento quinzenal está representado em unidades desconhecidas, porém uniformemente espaçadas, qual dos gráficos é compatível com a descrição do comerciante?

A
C
E
B
D
Resolução:

O gráfico deve satisfazer às seguintes condições:

- Crescimento mais ou menos constante nos três primeiros meses;
- Queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que havia sido atingido;
- Retorno do crescimento igualando, um mês e meio depois, o faturamento obtido ao final do terceiro mês;
- Ao final do décimo mês, estabilidade do faturamento, 50% acima do faturamento ao final do terceiro mês

A alternativa que apresenta o gráfico com essas condições é a E.

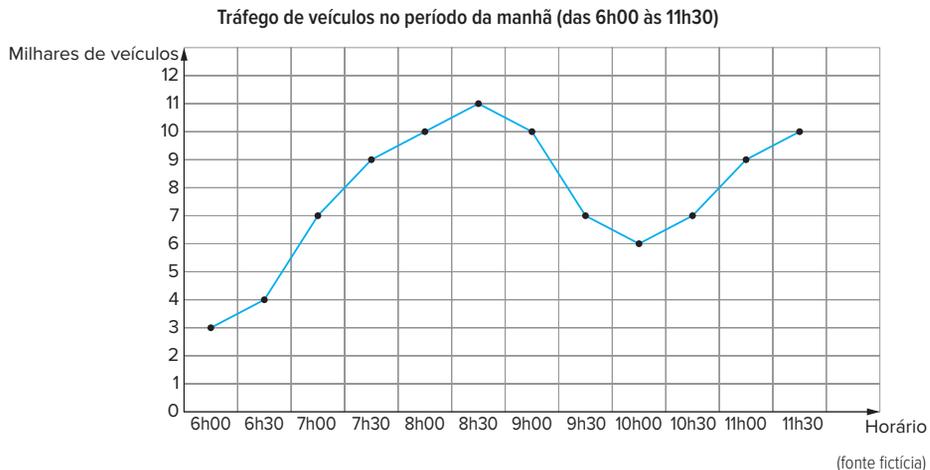
Alternativa: **E**

Gráfico de linha

Esse tipo de gráfico é formado por uma linha poligonal que representa uma série estatística. O gráfico em linha pode representar uma aplicação de funções num sistema de coordenadas cartesianas.

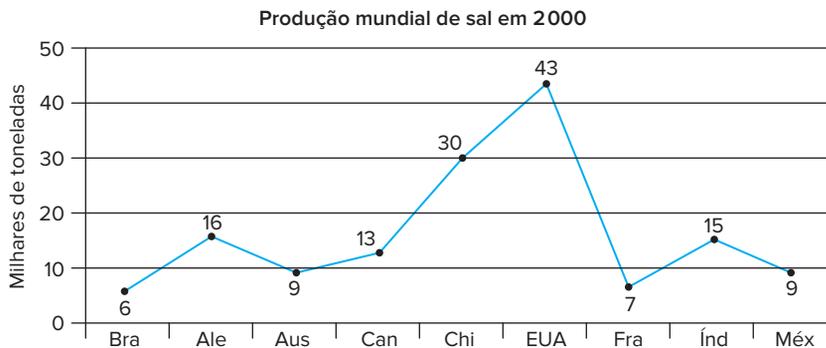
Por exemplo, o gráfico a seguir representa o número de veículos que trafegam por uma avenida dentro de um deter minado intervalo de tempo.

Tráfego de veículos no período da manhã (das 6h00 às 11h30)

(fonte fictícia)

Com a simples visualização do gráfico pode-se compreender com clareza um aumento no fluxo de veículos das 6h00 até 8h30 (quando atinge o maior fluxo).

FRENTE 2

Exercício resolvido

5 **UFRN** Embora o Brasil tenha uma das maiores jazidas de sal do mundo, sua produção anual em milhões de toneladas ainda é inferior à da Alemanha, da Austrália, do Canadá, da China, dos EUA, da França, da Índia e do México. O gráfico abaixo mostra a produção de sal nesses países, no ano 2000.

Considerando esses principais países produtores, a melhor aproximação do percentual de participação do Brasil na produção mundial de sal em 2000 foi de:

A 4% **B** 5% **C** 6% **D** 11%

Resolução:

A produção dos nove países considerados é igual a $(6 + 16 + 9 + 13 + 30 + 43 + 7 + 15 + 9) = 148$ milhões de toneladas.

Assim, a participação do Brasil nesse cenário é de $\frac{6}{148} \cong 0{,}04$ ou 4%.

Alternativa: **A**

Gráfico de colunas (ou de barras)

Esse tipo de gráfico é formado por retângulos verticais (chamados de colunas) ou horizontais (chamados de barras).

Quando em colunas, os retângulos têm as medidas das bases iguais e as alturas são proporcionais aos respectivos dados, representando assim a frequência, ou a frequência relativa, dentro daquela classe.

As colunas são separadas umas das outras de modo a não implicar continuidade.

Por exemplo, os gráficos a seguir representam a média das notas das provas de uma turma de 3º ano no 1º bimestre letivo

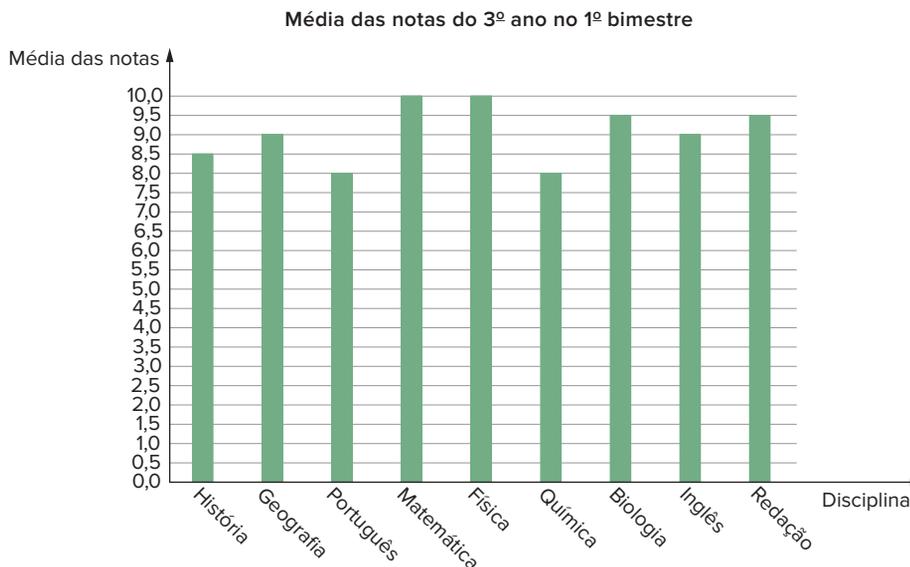



Gráfico de colunas

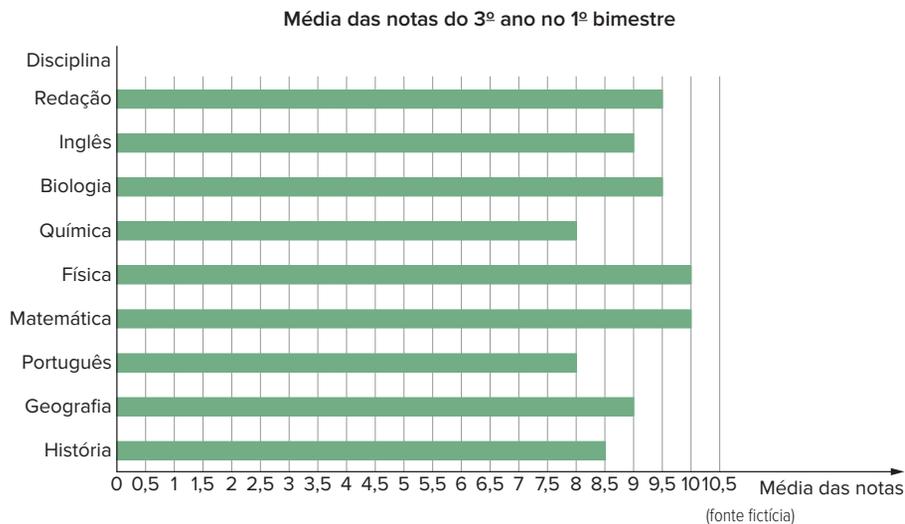



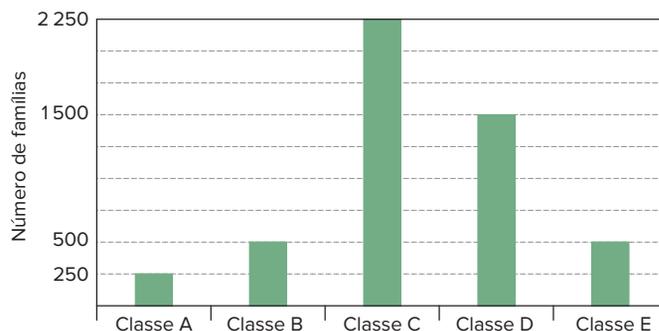
Gráfico de barras

Exercício resolvido

6 **UFPB** Segundo dados do IBGE, as classes sociais das famílias brasileiras são estabelecidas, de acordo com a faixa de renda mensal total da família, conforme a tabela a seguir.

Classe	Faixa de Renda
A	Acima de R$ 15.300,00
B	De R$ 7.650,01 até R$ 15.300,00
C	De R$ 3.060,01 até R$ 7.650,00
D	De R$ 1.020,01 até R$ 3.060,00
E	Até R$ 1.020,00

Adaptado de: http://www.logisticadescomplicada.com/o-brasil-suas-classes-sociais-e-a-implicacao-na-economia. Acesso em: 18 nov. 2020.

Após um levantamento feito com as famílias de um município, foram obtidos os resultados expressos no gráfico a seguir.

Com base nas informações contidas no gráfico e na tabela, conclui-se que o percentual das famílias que têm renda acima de R$ 3.060,00 é de:

A 45% **B** 60% **C** 70% **D** 85% **E** 90%

Resolução:

Da tabela verificamos que as famílias que têm renda acima de R$ 3.060,00 são as das classes A, B e C; do gráfico verificamos que essas famílias correspondem a um total de: $250 + 500 + 2250 = 3000$ famílias

O total de famílias envolvidas no levantamento foi de: $250 + 500 + 2250 + 1500 + 500 = 5000$ famílias

Então, temos:

$$\left.\begin{array}{lcl} 5000 & \text{——} & 100\% \\ 3000 & \text{——} & x \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{5000}{3000} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{300000}{5000} = 60\%$$

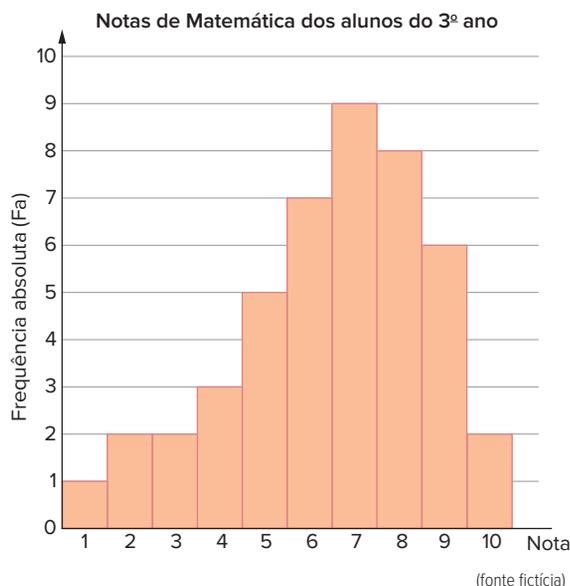
Alternativa: **B**

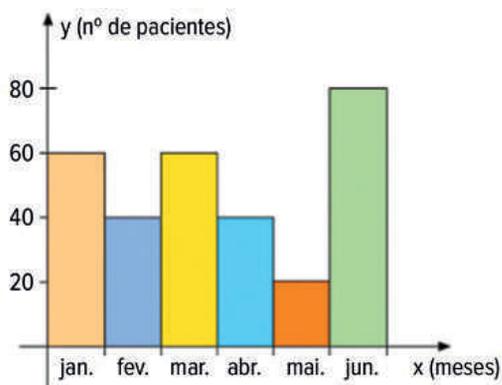
Histograma

É um tipo de gráfico também formado por retângulos verticais (colunas) que indicam a distribuição de frequências (absoluta, relativa ou porcentagem).

O eixo horizontal é subdividido em intervalos (preferencialmente iguais) e a área do retângulo é proporcional aos dados que representa.

Geralmente é usado em valores de variáveis quantitativas quando estes se encontram agrupados em intervalos.

Veja, por exemplo, como estão distribuídas as notas de Matemática de um grupo de 45 alunos do 3º ano.

Exercício resolvido

7 **Uerj** O gráfico a seguir representa o número de pacientes atendidos mês a mês, em um ambulatório, durante o período de 6 meses de determinado ano.

Calcule o número total de pacientes atendidos durante o semestre.

A 300
B 320
C 350
D 400
E 510

Resolução:

Em janeiro foram 60 pacientes atendidos, em fevereiro foram 40, em março, 60, em abril, 40, em maio, 20 e em junho foram 80 atendidos, que totalizam:

$60 + 40 + 60 + 40 + 20 + 80 = 300$

Alternativa: **A**

Gráfico de setores

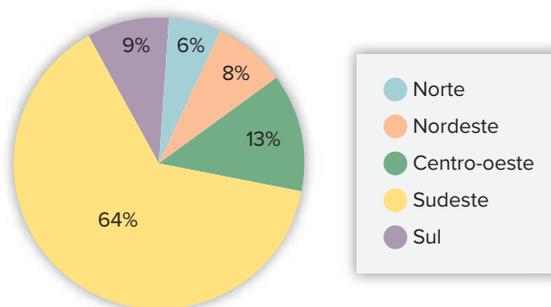
Esse tipo de gráfico (também conhecido como gráfico de pizza) é construído a partir de um círculo e é utilizado quando se faz necessário ressaltar a proporção de cada dado em relação ao conjunto total.

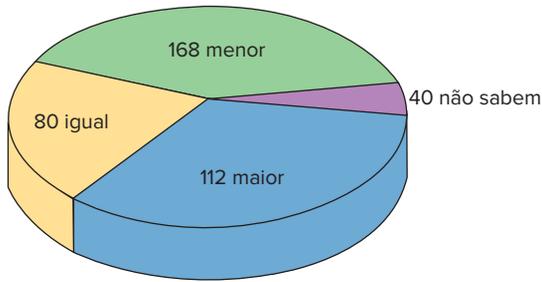
O total é representado pelo círculo inteiro e os setores são definidos de forma que suas áreas sejam proporcionais aos dados

Como exemplo, observe o gráfico correspondente ao percentual de alunos de regiões brasileiras que estudaram na turma ITA do Curso Poliedro de São José dos Campos, em 2019.

Região	Percentual de alunos
Norte	6%
Nordeste	8%
Centro-Oeste	13%
Sudeste	64%
Sul	9%

(fonte fictícia)

Percentual de alunos por região

Exercício resolvido

8 **Uneb (Adapt.)** O gráfico a seguir representa o resultado de uma pesquisa feita em um município, no mês de junho de 2001, a fim de analisar a redução do consumo de energia em residências, tendo em vista a meta fixada pelo governo, e com base na seguinte pergunta: “Qual a redução conseguida em relação à meta?”.

A partir dessa informação, e sabendo que o percentual para cada resposta é proporcional à área do setor que o representa, o ângulo do setor correspondente à resposta "menor" é igual a:

A 108,3°

B 118,8°

C 142°

D 151,2°

E 160°

Resolução:

O total de pesquisados foi: 168 + 80 + 112 + 40 = 400.
A porcentagem dos 168 que responderam que o consumo foi menor que a meta é igual a:

$$\left.\begin{matrix} 400 & \text{——} & 100\% \\ 168 & \text{——} & x \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \frac{400}{168} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16800}{400} = 42\%$$

Assim, a medida em graus do setor correspondente é:

$$\left.\begin{matrix} 360° & \text{——} & 100\% \\ y & \text{——} & 42\% \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \frac{360°}{y} = \frac{100}{42} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{360° \cdot 42}{100} = 151{,}2°$$

Alternativa: **D**

Medidas de posição ou de tendência central

Vamos estudar os dados que anteriormente analisamos graficamente, com medidas (números) que apontem de maneira precisa como estão distribuídos os valores da variável quantitativa em questão.

Dessa forma, se fará necessário estabelecermos valores que indiquem a variabilidade da variável em questão.

As medidas de posição (ou de tendência central) a serem analisados são a média, a moda e a mediana

Média aritmética

A expressão "em média" é muito frequente em conversas e jornais, e remete ao mais comum e popular conceito de tendência central de distribuição de dados. Esse conceito possibilita a compreensão do entorno em que estão distribuídas as variáveis em questão. Para um melhor entendimento, vamos tomar um exemplo:

Hennadi H/Shutterstock.com

A produção leiteira de 11 vacas durante um dia está representada a seguir, em litros

15 18 20 20 20 21 23 25 26 26 28

A média aritmética (representada por $\overline{X}$) é o quociente entre a soma de todos os valores da amostra e o número total de amostras:

$$\overline{X} = \frac{15+18+20+20+20+21+23+25+26+26+28}{11} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} = \frac{242}{11} \Leftrightarrow \overline{X} = 22$$

Nesse caso, como existem elementos com a mesma frequência (animais com a mesma produção leiteira), pode-se calcular a média aritmética ponderada, que nada mais é que, tendo valores iguais em uma amostra, em vez de somarmos um a um esses valores, multiplicamos esse, ou esses valores, pelo número de vezes em que eles aparecem

A média ponderada é calculada por:

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot 15 + 1 \cdot 18 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 21 + 1 \cdot 23 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 1 \cdot 28}{1+1+3+1+1+1+2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} = \frac{242}{11} \Leftrightarrow \overline{X} = 22$$

Pode-se formalizar os casos como:

1º) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os valores de *n* variáveis, então:

$$\overline{X} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

2º) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$, os valores de *n* variáveis com suas respectivas frequências absolutas $k_1, k_2, \ldots, k_n$; então:

$$\overline{X} = \frac{a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + \ldots + a_n \cdot k_n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot k_i}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$$

No exemplo dado anteriormente percebe-se que, embora 22 litros mostre "mais ou menos" o entorno em que a produção se distribui, a média não mostra os extremos.

Mediana

A média aritmética pode ser interpretada de maneira distorcida (influenciada), caso as variáveis se apresentem muito distantes de seu valor. Nesse caso, a média aritmética não é apropriada para a análise em questão.

Para melhor coerência da interpretação e consistência das informações, usamos uma medida de posição mais sólida às análises, a chamada mediana.

A mediana, representada por Md, corresponde ao valor que se localiza exatamente no centro de todas as variáveis quando organizadas em rol (crescente ou decrescente).

Se o rol possuir um número par de variáveis, a mediana será então a média aritmética entre as duas variáveis centrais.

Vamos considerar novamente o exemplo da produção leiteira das 11 vacas.

15 18 20 20 20 21 23 25 26 26 28

Como os valores já estão em ordem crescente, temos que a mediana é a variável que ocupa a posição central do rol, ou seja, Md = 21.

Pode-se formalizar os casos como:

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ os valores de *n* variáveis:

1º) Se *n* é ímpar, temos:

$$Md = a_{\left(\frac{1+n}{2}\right)}$$

2º) Se *n* é par, temos:

$$Md = \frac{a_{\left(\frac{n}{2}\right)} + a_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

! Atenção

1º) Na sequência (9, 11, 12, 14, 19) temos que Md = 12.

2º) Na sequência (9, 11, 12, 14, 19, 20), $Md = \frac{12+14}{2} = 13$

Podemos observar que a mediana divide o conjunto de variáveis em duas partes com o mesmo número de elementos. Uma parte onde todos os elementos são menores (ou iguais) à mediana e uma outra parte onde todos os elementos são maiores (ou iguais) a ela

Moda

A moda (representada por Mo) é a variável que aparece com maior frequência absoluta Novamente utilizando o exemplo da produção leiteira das 11 vacas:

15 18 20 20 20 21 23 25 26 26 28

Temos que Mo = 20, pois é o valor que aparece o maior número de vezes

! Atenção

1º) Na sequência (7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 15) temos duas modas, 8 e 11 e, nesse caso, a sequência é chamada bimodal.

2º) Na sequência (7, 8, 9, 10, 11, 15) não há moda, pois todas as variáveis aparecem com a mesma frequência e, nesse caso, a sequência é chamada amodal.

Exercício resolvido

9 Uma pesquisa mostrou as estaturas, em cm, dos goleiros dos 20 times da Série A do campeonato brasileiro de futebol de 2019. Com base nas informações colhidas e apresentadas na tabela a seguir, calcule a moda, a média e a mediana dessa pesquisa.

Clube	Jogador	Altura (cm)
Atlético MG	Cleiton	190
Athletico-PR	Aderbar	188
Avaí	Vladimir	190
Bahia	Douglas Friedrich	194
Botafogo	Gatito Fernandez	191
Ceará	Diogo Silva	192
Chapecoense	Tiepo	183
Corinthians	Cássio	196
Cruzeiro	Fabio	188
CSA	Jordi	192
Flamengo	Diego Alves	188
Fluminense	Muriel	190
Fortaleza	Felipe Alves	187
Goiás	Tadeu	184
Grêmio	Paulo Victor	187
Internacional	Marcelo Lomba	188
Palmeiras	Weverton	189
Santos	Vanderlei	195
São Paulo	Tiago Volpi	187
Vasco	Fernando Miguel	191

(fonte fictícia)

Resolução:

Organizando o rol das alturas obtemos:
(183, 184, 187, 187, 187, 188, 188, 188, 188, 189, 190, 190, 190, 191, 191, 192, 192, 194, 195, 196)

A moda é Mo = 188 cm, pois é o valor com a maior frequência da sequência (4 vezes)
A média aritmética é:

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot 183 + 1 \cdot 184 + 3 \cdot 187 + 4 \cdot 188 + 1 \cdot 189 + 3 \cdot 190 + 2 \cdot 191 + 2 \cdot 192 + 1 \cdot 194 + 1 \cdot 195 + 1 \cdot 196}{1+1+3+4+1+3+2+2+1+1+1}$$

$$\overline{X} = \frac{183 + 184 + 561 + 752 + 189 + 570 + 382 + 384 + 194 + 195 + 196}{20}$$

$$\overline{X} = \frac{3\,790}{20} = 189{,}5 \text{ cm}$$

Como a sequência tem 20 valores, a mediana é a média entre o 10º e o 11º, logo:

$$\text{Md} = \frac{189 + 190}{2} = \frac{379}{2} = 189{,}5 \text{ cm}$$

Observe que nessa pesquisa a média e a mediana são iguais

Saiba mais

Por ser muito numerosa, a tabela do último exercício resolvido poderia ser apresentada com os valores distribuídos em classes, como mostra a tabela a seguir:

Classes	Frequência absoluta	Frequência acumulada	Frequência relativa	Porcentagem
183 ⊢ 185	2	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	10%
185 ⊢ 187	0	2	$\frac{0}{20} = 0$	0%
187 ⊢ 189	7	9	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	35%
189 ⊢ 191	4	3	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	20%
191 ⊢ 193	4	17	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	20%
193 ⊢ 195	1	18	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5%
195 ⊢ 197	2	20	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	10%

(fonte fictícia)

Observação: a frequência acumulada corresponde à soma da frequência de uma classe com todas as frequências que a antecedem na distribuição

Exercícios resolvidos

10 Enem 2018 A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho
Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

A 0,15
B 0,30.
C 0,50.
D 1,11
E 2,22

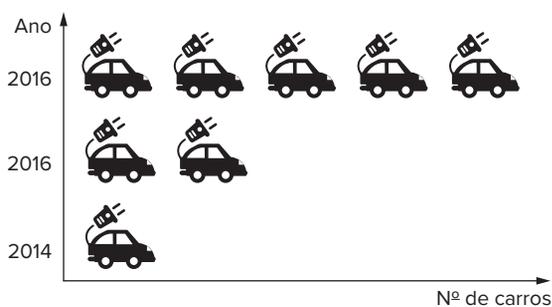
Resolução:

A média do número de acidentes por funcionário é igual a:

$$\overline{X} = \frac{50 \cdot 0 + 17 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{50 + 17 + 15 + 10 + 6 + 2} =$$
$$= \frac{0 + 17 + 30 + 30 + 24 + 10}{100} = \frac{111}{100} = 1,11$$

Alternativa: **D**

11 **Enem 2018** De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.

Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico, foi de

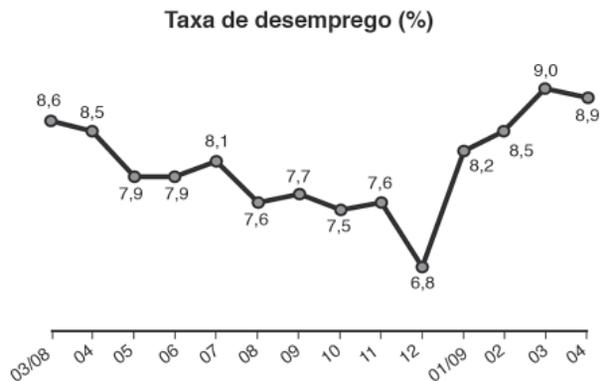
A 192
B 240.
C 252
D 320
E 420

Resolução:

No gráfico apresentado há 3 ícones a mais de 2015 para 2016, logo cada um representa um total de $\frac{360}{3} = 120$ unidades vendidas. Calculando a média dos três anos, temos:

$$\overline{X} = \frac{5 \cdot 120 + 2 \cdot 120 + 1 \cdot 120}{3} = \frac{600 + 240 + 120}{3} =$$
$$= \frac{960}{3} = 320 \text{ unidades/ano}$$

Alternativa: **D**

12 **Enem 2017** O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

IBGE. Pesquisa mensal de emprego. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 30 jul. 2012 (adaptado).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

A 8,1%
B 8,0%
C 7,9%
D 7,7%
E 7,6%

Resolução:

Colocando em ordem crescente os 14 valores apresentados obtemos o seguinte rol:

6,8 7,5 7,6 7,6 7,7 7,9 **7,9** **8,1** 8,2 8,5 8,5 8,6 8,9 9,0

Como a quantidade de termos é par, então, para obter a mediana, basta fazer a média aritmética dos dois termos centrais.

Logo, a mediana será: $Md = \frac{7,9 + 8,1}{2} = \frac{16,0}{2} = 8,0.$

Alternativa: **B**

Medidas de dispersão

As medidas de posição vistas até aqui são de extrema relevância para dados que envolvem objetos (ou fenômenos físicos). Ao calcularmos a velocidade média de um carro numa determinada viagem, podemos encontrar o tempo exato de duração da viagem. Porém, a média pode ser inadequada ao calcularmos o “peso” de um grupo de pessoas, pois pode haver pessoas obesas, por exemplo, jogando a média para cima.

Renda *per capita* é um exemplo de medida duvidosa. Essa medida, que se usa para diferenciar países desenvolvidos ou em desenvolvimento, aponta a produção econômica do país por pessoa, porém mascara as diferenças sociais. Em 2020, por exemplo, a renda *per capita* do Brasil foi R$ 1.380,00. No entanto, isso não significa que todos os brasileiros tiveram um rendimento médio próximo desse valor.

Surge então a necessidade de definir uma medida que nos mostre um grau de variabilidade, de forma que a análise não fique comprometida.

Desvio

O desvio (representado por d_i) é a diferença entre o valor de cada variável do conjunto e a média aritmética desse conjunto.

$$d_i = X_i - \overline{X}$$

Ao valor absoluto do desvio damos o nome de desvio absoluto.

$$dA_i = \left| X_i - \overline{X} \right|$$

Desvio médio

O desvio médio (representado por $\overline{d}$), corresponde à média aritmética dos desvios absolutos.

Sendo A_1, A_2, A_3, ..., A_n, *n* variáveis, temos:

$$\overline{d} = \frac{dA_1 + dA_2 + dA_3 + \dots + dA_n}{n}$$

Variância

A variância de uma amostra, representada por V ou σ^2, é a média aritmética da soma dos quadrados dos desvios

$$\sigma^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n} \quad \text{ou} \quad V = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

Como exemplo, veja a tabela a seguir, que mostra as notas de dois alunos durante os quatros bimestres de um ano letivo.

Aluno	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre	Média
Francisco	3,0	10,0	9,0	2,0	6,0
Luiza	5,0	5,0	8,0	6,0	6,0

(fonte fictícia)

Podemos perceber claramente que, apesar de apresentarem a mesma média, ela se mostra insuficiente para avaliarmos seus desempenhos. A média pode dar a falsa impressão de que os dois alunos tiveram as mesmas notas ao longo desse ano letivo.

Calculando a variância, podemos verificar que os resultados são bem diferentes.

$$\text{Francisco: } \sigma_F^2 = \frac{(3-6)^2 + (10-6)^2 + (9-6)^2 + (2-6)^2}{4} = \frac{(-3)^2 + 4^2 + 3^2 + (-4)^2}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

$$\text{Luiza: } \sigma_L^2 = \frac{(5-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (6-6)^2}{4} = \frac{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

Aluno	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre	Média	Variância
Francisco	3,0	10,0	9,0	2,0	6,0	12,5
Luiza	5,0	5,0	8,0	6,0	6,0	1,5

(fonte fictícia)

Assim, podemos verificar que a variância de Luiza é muito menor que a de Francisco, o que indica que suas notas têm uma oscilação menor em torno da média.

Desvio padrão

O desvio padrão de uma amostra (representado por σ) é dado pela raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2}{n}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

De uma maneira mais simples: $\sigma = \sqrt{v}$.

No exemplo anterior podemos calcular o desvio padrão das notas de Francisco e Luiza:

$$\sigma_F = \sqrt{12{,}5} \Leftrightarrow \sigma_F \cong 3{,}5 \quad \text{ou} \quad \sigma_L = \sqrt{1{,}5} \Leftrightarrow \sigma_L \cong 1{,}2$$

Saiba mais

A variância é definida como uma soma de quadrados, dessa forma, se apresenta como uma medida quadrática, ou seja, sua unidade de medida é sempre o quadrado da unidade de medida da variável em estudo. Portanto, ao estudar o peso de um grupo em quilos (kg), a variância apresentará um resultado em “quilos quadrados” (Kg^2), e é aí que calculamos o desvio padrão (raiz quadrada da variância), que devolve ao resultado estatístico sua unidade original, se apresentando de maneira uniforme e mais compreensível

Exercícios resolvidos

13 A tabela mostra o número do calçado de 10 pessoas num rol crescente

Pessoa	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
Nº do calçado	36	37	39	39	40	41	42	42	43	44

(fonte fictícia)

Sobre essa sequência de valores, calcule:

a) A média e a amplitude.
b) A moda.
c) A mediana.
d) Cada desvio e o desvio médio.
e) A variância.
f) O desvio padrão.

Resolução:

a) A média $\overline{X}$ e a amplitude A são:

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot 36 + 1 \cdot 37 + 2 \cdot 39 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 41 + 2 \cdot 42 + 1 \cdot 43 + 1 \cdot 44}{1+1+2+1+1+2+1+1}$$
$$\overline{X} = \frac{36+37+78+40+41+84+43+44}{10} = \frac{403}{10} = 40{,}3 \quad \text{e} \quad A = 44 - 36 = 8$$

b) A sequência é bimodal e as modas são: Mo = 39 e Mo = 42.

c) Como o número de termos da sequência é par, a mediana corresponde à média aritmética dos termos centrais.

Assim: $Md = \frac{40+41}{2} = \frac{81}{2} = 40{,}5.$

d) Os desvios são:

$$d_1 = 36 - 40{,}3 = -4{,}3 \qquad d_6 = 41 - 40{,}3 = 0{,}7$$
$$d_2 = 37 - 40{,}3 = -3{,}3 \qquad d_7 = 42 - 40{,}3 = 1{,}7$$
$$d_3 = 39 - 40{,}3 = -1{,}3 \qquad d_8 = 42 - 40{,}3 = 1{,}7$$
$$d_4 = 39 - 40{,}3 = -1{,}3 \qquad d_9 = 43 - 40{,}3 = 2{,}7$$
$$d_5 = 40 - 40{,}3 = -0{,}3 \qquad d_{10} = 44 - 40{,}3 = 3{,}7$$

O desvio médio $\overline{d}$ é igual a: $\overline{d} = \frac{4{,}3+3{,}3+2 \cdot 1{,}3+0{,}3+0{,}7+2 \cdot 1{,}7+2{,}7+3{,}7}{10} = \frac{21}{10} = 2{,}1.$

e) A variância σ^2 é a média aritmética da soma dos quadrados dos desvios

$$\sigma^2 = \frac{(-4,3)^2 + (-3,3)^2 + (+1,3)^2 + (+1,3)^2 + (-0,3)^2 + (0,7)^2 + (1,7)^2 + (1,7)^2 + (2,7)^2 + (3,7)^2}{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{18,49 + 10,89 + 1,69 + 1,69 + 0,09 + 0,49 + 2,89 + 2,89 + 7,29 + 13,69}{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{60,1}{10} = 6,01$$

f) O desvio padrão σ é a raiz quadrada da variância, logo: $\sigma = \sqrt{6,01} \cong 2,45$.

14 Às vésperas de um jogo decisivo, o técnico de uma equipe de basquete deve optar pela escalação de um dentre dois jogadores, Guto ou Giovanni. As duas tabelas seguintes mostram o desempenho de cada jogador nos últimos cinco jogos em que participaram:

Guto

Jogo	Número de pontos
1	20
2	22
3	18
4	20
5	20

(fonte fictícia)

Giovanni

Jogo	Número de pontos
1	30
2	14
3	20
4	12
5	24

(fonte fictícia)

a) Calcular a média de cada um por jogo.
b) Calcular o desvio padrão de cada um nesses cinco jogos.
c) Você, como técnico desse time, se tivesse que escalar um desses jogadores, num jogo onde a simples vitória lhe daria o título de campeão, qual deles escalaria?

Resolução:

a) A média por jogo de cada jogador é:

$$\bar{X}_{Guto} = \frac{20+22+18+20+20}{5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ pontos} \quad \text{e} \quad \bar{X}_{Giovanni} = \frac{30+14+20+12+24}{5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ pontos}$$

b) O desvio padrão de cada um é:

Guto

Desvios	Desvio padrão
$d_1 = 20 - 20 = 0$ $d_2 = 22 - 20 = 2$ $d_3 = 18 - 20 = -2$ $d_4 = 20 - 20 = 0$ $d_5 = 20 - 20 = 0$	$\sigma^2 = \frac{0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2 + 0^2}{5} = \frac{0+4+4+0+0}{5} = \frac{8}{5} = 1,6 \Rightarrow \sigma \cong 1,27$

Giovanni

Desvios	Desvio padrão
$d_1 = 30 - 20 = 10$ $d_2 = 14 - 20 = -6$ $d_3 = 20 - 20 = 0$ $d_4 = 12 - 20 = -8$ $d_5 = 24 - 20 = 4$	$\sigma^2 = \frac{10^2 + (-6)^2 + 0^2 + (-8)^2 + 4^2}{5} = \frac{100+36+0+64+16}{5} = \frac{216}{5} = 43,2 \Rightarrow \sigma \cong 6,57$

c) O jogador escolhido seria Guto, pois ele apresenta maior regularidade na sua pontuação.

FRENTE 2

15 **UFPR 2016** Dado um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ com *n* elementos, definimos a média $\overline{x}$ e o desvio padrão d de X por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \qquad d = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

Uma informação útil para quem analisa um conjunto de dados como X é que a maioria desses dados pertence ao intervalo $C = [\overline{x} - 2d, \overline{x} + 2d]$. Sendo $X = \left\{\frac{5}{2}, 4, \frac{7}{2}, 3\right\}$ um conjunto de dados:

a) Calcule a média $\overline{x}$ e o desvio padrão d.
b) Verifique quais dados do conjunto X pertencem ao intervalo C.

Resolução:

a) A média é igual a: $\overline{x} = \frac{\frac{5}{2} + 4 + \frac{7}{2} + 3}{4} = \frac{\frac{5+8+7+6}{2}}{4} = \frac{\frac{26}{2}}{4} = \frac{13}{4} = 3{,}25$.

O desvio padrão é:

$$d = \sqrt{\frac{\left(\frac{5}{2} - 3{,}25\right)^2 + (4 - 3{,}25)^2 + \left(\frac{7}{2} - 3{,}25\right) + (3 - 3{,}25)^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(2{,}5 - 3{,}25)^2 + (0{,}75)^2 + (3{,}5 - 3{,}25) + (-0{,}25)^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(-0{,}75)^2 + (0{,}75)^2 + (0{,}25) + (-0{,}25)^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{0{,}5625 + 0{,}5625 + 0{,}0625 + 0{,}0625}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{1{,}25}{4}} \cong \frac{1{,}12}{2}$$

$$d \cong 0{,}56$$

b) O intervalo $C = [\overline{x} - 2d, \overline{x} + 2d]$ equivale ao intervalo real:

$$C = [3{,}25 - 2 \cdot 0{,}56;\ 3{,}25 + 2 \cdot 0{,}56] = [2{,}13;\ 4{,}37].$$

Logo, todos os elementos do conjunto X pertencem ao intervalo C.

Medidas de posição e dispersão para dados agrupados

Se a situação a ser analisada sobre uma variável quantitativa apresenta seus valores agrupados em intervalos de classes, não há como saber a distribuição dos valores em cada faixa. Assim, para associar e calcular as medidas até aqui estudadas, devemos supor que, em cada intervalo, os valores foram distribuídos de forma simétrica ao redor do ponto médio de cada um deles. De uma forma prática, deve-se admitir que todos os "n" valores do intervalo são o seu próprio ponto médio.

Para entender como calcular essas medidas, atente-se aos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

16 A tabela abaixo mostra a distribuição de frequências das estaturas, em centímetros, de uma amostra de estudantes do Ensino Fundamental II.

Classe (estatura em centímetros)	Frequência (número de alunos)
150,5 $\vdash$ 156,5	4
156,5 $\vdash$ 160,5	5
160,5 $\vdash$ 168,5	8
168,5 $\vdash$ 178,5	3

(fonte fictícia)

a) Qual a estatura média dos estudantes dessa amostra?
b) Qual o desvio padrão dessa amostra?

Resolução:

Classe é um subconjunto de um rol. Pode ser “unitária”, quando apresenta um único elemento do rol ou não, quando apresenta vários elementos consecutivos de um rol no intervalo dado.
No exercício, a 1ª classe 150,5 – 156,5 possui 4 elementos que podem ter alturas aleatórias, tais como 150,5, 152,7, 154,0 e 156,3, mas não sabemos exatamente quais são. O que sabemos é que:

1ª classe: $150{,}5 \leq$ (altura de 4 alunos) $< 156{,}5$
2ª classe: $156{,}5 \leq$ (altura de 5 alunos) $< 160{,}5$
3ª classe: $160{,}5 \leq$ (altura de 8 alunos) $< 168{,}5$
4ª classe: $168{,}5 \leq$ (altura de 3 alunos) $\leq 156{,}5$.

Para resolver qualquer exercício desse tipo, devemos obter uma classe unitária correspondente a cada classe. Para isso, basta achar o ponto médio (média aritmética) das classes dadas e trabalhar com esses valores.

Classe (estatura em centímetros)	Ponto médio (média aritmética)	Frequência (número de alunos)
$150{,}5 \vdash 156{,}5$	$\frac{150{,}5+156{,}5}{2}=\frac{307}{2}=153{,}5$	4
$156{,}5 \vdash 160{,}5$	$\frac{156{,}5+160{,}5}{2}=\frac{317}{2}=158{,}5$	5
$160{,}5 \vdash 168{,}5$	$\frac{160{,}5+168{,}5}{2}=\frac{329}{2}=164{,}5$	8
$168{,}5 \vdash 178{,}5$	$\frac{168{,}5+178{,}5}{2}=\frac{347}{2}=173{,}5$	3

(fonte fictícia)

a) A estatura média corresponde à média aritmética dos valores, assim:

$$\overline{X}=\frac{4\cdot 153{,}5+5\cdot 158{,}5+8\cdot 164{,}5+3\cdot 173{,}5}{4+5+8+3}=\frac{614{,}0+792{,}5+1\,316{,}0+520{,}5}{20}=\frac{3\,243}{20}=162{,}15\text{ cm}$$

b) A variância é igual a:

$$\sigma^2=\frac{4\cdot(153{,}5-162{,}15)^2+5\cdot(158{,}5-162{,}15)^2+8\cdot(164{,}5-162{,}15)^2+3\cdot(173{,}5-162{,}15)^2}{20}$$

$$\sigma^2=\frac{4\cdot(-8{,}65)^2+5\cdot(-3{,}65)^2+8\cdot(2{,}35)^2+3\cdot(11{,}35)^2}{20}$$

$$\sigma^2=\frac{299{,}29+66{,}6125+44{,}18+386{,}4675}{20}$$

$$\sigma^2=\frac{796{,}55}{20}=39{,}8275$$

Logo, o desvio padrão dessa amostra é $\sigma=\sqrt{39{,}8275}\cong 6{,}31$ cm.

17 Um colégio fez, no final do ano letivo, uma pesquisa com os 90 alunos do 3º ano do Ensino Médio para avaliar o grau de satisfação da turma Cada aluno atribuiu uma nota de 0 a 10, tendo a chance de recomendar o colégio a outra pessoa
Os resultados estão apresentados na tabela a seguir:

Nota	Frequência absoluta
$0 \vdash 2$	4
$2 \vdash 4$	14
$4 \vdash 6$	29
$6 \vdash 8$	37
$8 \vdash\!\dashv 10$	6

(fonte fictícia)

De acordo com essas informações, determine o desvio padrão das notas e qual é a classe modal.

FRENTE 2

Resolução:

Admitindo que as 4 notas do primeiro intervalo sejam 1 (ponto médio do intervalo 0 a 2), que as 14 notas do segundo intervalo sejam 3 (ponto médio do intervalo 2 a 4) e assim por diante.
Dessa forma, considerando os pontos médios 1, 3, 5, 7 e 9 de cada intervalo, podemos calcular a nota média:

$$\overline{X}=\frac{1\cdot 4+3\cdot 14+5\cdot 29+7\cdot 37+9\cdot 6}{4+14+29+37+6}=\frac{4+42+145+259+54}{90}=\frac{504}{90}=5,6$$

Para calcular os desvios, a variância e o desvio padrão, deve-se usar o mesmo critério

Desvios absolutos

$d_1=|1-5,6|=4,6$

$d_2=|3-5,6|=2,6$

$d_3=|5-5,6|=0,6$

$d_4=|7-5,6|=1,4$

$d_5=|9-5,6|=3,4$

Desvio médio: $\overline{d}=\frac{4,6+2,6+0,6+1,4+3,4}{5}=\frac{12,6}{5}=2,52$

Variância: $\sigma^2=\frac{(-4,6)^2\cdot 4+(-2,6)^2\cdot 14+(-0,6)^2\cdot 29+(1,4)^2\cdot 37+(3,4)^2\cdot 6}{4+14+29+37+6}=$

$$=\frac{84,64+94,64+10,44+72,52+69,36}{90}=\frac{331,6}{90}\cong 3,685$$

Desvio padrão: $\sigma\cong\sqrt{3,685}\cong 1,92$

Entendemos que a "classe modal" é o intervalo [6, 8], por ser o intervalo de maior frequência.

18 No histograma a seguir estão representados o "peso" de um lote de 200 bezerros antes e após o desmame.

"Peso" dos bezerros (em kg)

Porcentagem

35, 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0

20% 35% 30% 15%

60 80 100 120 140 "peso" (kg)

a) Quantos bezerros tinham menos de 120 kg?
b) Qual o "peso" médio de um bezerro?
c) Qual o "peso" modal de um bezerro?
d) Qual o desvio padrão dos "pesos" dessa distribuição?

Resolução:

Do gráfico, temos:

"Peso" (kg)	Ponto médio	Frequência absoluta
60 ⊢ 80	70	20% de 200 = 40
80 ⊢ 100	90	35% de 200 = 70
100 ⊢ 120	110	30% de 200 = 60
120 ⊢ 140	130	15% de 200 = 30

(fonte fictícia)

a) Tinham menos de 120 kg: 40 + 70 + 60 = 170 bezerros.
b) O "peso" médio de um bezerro é:

$$\overline{X}=\frac{70\cdot 40+90\cdot 70+110\cdot 60+130\cdot 30}{40+70+60+30}=\frac{2800+6300+6600+3900}{200}=\frac{19600}{200}=98\text{ kg}$$

c) O peso modal é 90 kg (ponto médio da classe de maior frequência)

d) O desvio padrão dos “pesos” da distribuição é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(70-98)^2 \cdot 40 + (90-98)^2 \cdot 70 + (110-98)^2 \cdot 60 + (130-98)^2 \cdot 30}{40+70+60+30}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-28)^2 \cdot 40 + (-8)^2 \cdot 70 + 12^2 \cdot 60 + 32^2 \cdot 30}{200}} = \sqrt{\frac{75200}{200}} = \sqrt{376} \cong 19{,}4 \text{ kg}$$

Revisando

1 Enem 2018 Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente

O mínimo de pontos que esse estudante precisa ob ter na quarta avaliação para ser aprovado é

A 29,8.
B 71,0.
C 74,5.
D 75,5.
E 84,0.

2 Enem 2015 Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

A 20,70.
B 20,77
C 20,80.
D 20,85.
E 20,90

3 EPCar 2019 Em uma turma de 5 alunos, as notas de um teste de matemática são números inteiros tais que a média aritmética e a mediana são iguais a 5, e nenhum aluno errou todas as questões.

Sabendo que esse conjunto de notas é unimodal, com moda igual a 8, então a diferença entre a maior nota e a menor nota é um número que é divisor de

A 14
B 15
C 16
D 18

4 FGV SP 2018 A média aritmética das notas de cinco provas de estatística é 6,4. Retirando-se a prova com a menor nota, a nova média aritmética sobe para 7,0. Agora, retirando-se a prova com a maior nota, a nova média aritmética das três provas remanescentes abaixa para 6,5. Se a moda das notas das cinco provas é 6,0, então, necessariamente, a nota de uma das cinco provas é

A 6,8.
B 7,2
C 7,4.
D 7,5.
E 8,0.

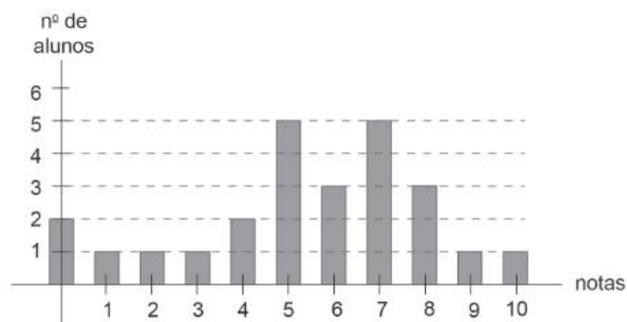
5 UFJF/Pism 2018 Uma professora fez uma pesquisa com 10 alunos de uma de suas turmas, sobre quanto tempo em média, em horas, eles passavam na internet por dia. Os dados foram colocados na tabela abaixo:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Horas	4	6	8	2	3	4	6	5	6	3

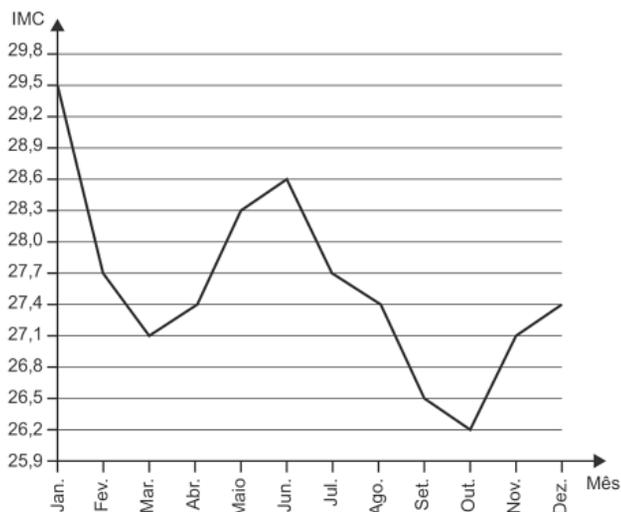
Marque a alternativa com os valores corretos da média, moda e mediana

A média 4; moda 4; mediana 5.
B média 4,5; moda 6; mediana 4,7
C média 4,7; moda 4; mediana 4,5.
D média 4,7; moda 6; mediana 4,5
E média 4,5; moda 6; mediana 5.

6 PUC-Rio 2018 O gráfico de barras abaixo mostra a distribuição das notas de uma turma de alunos em uma prova de matemática. A nota é sempre um número inteiro de 0 a 10.

FRENTE 2

Assim, por exemplo, 2 alunos tiraram zero, e 1 aluno tirou dez.

a) Quantos alunos tiraram nota maior ou igual a 7?
b) Se a nota mínima para aprovação é 5, qual é a porcentagem de alunos aprovados?
c) Qual é a mediana das notas dos alunos desta turma? Lembre que a mediana é a nota N tal que pelo menos a metade dos alunos tira nota menor ou igual a N, e que pelo menos a metade dos alunos tira nota maior ou igual a N.

7 **Enem PPL 2018** O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa é definido como o quociente entre a massa dessa pessoa, medida em quilograma, e o quadrado da sua altura, medida em metro. Esse índice é usado como parâmetro para verificar se o indivíduo está ou não acima do peso ideal para a sua altura. Durante o ano de 2011, uma pessoa foi acompanhada por um nutricionista e passou por um processo de reeducação alimentar. O gráfico indica a variação mensal do IMC dessa pessoa, durante o referido período. Para avaliar o sucesso do tratamento, o nutricionista vai analisar as medidas estatísticas referentes à variação do IMC.

De acordo com o gráfico, podemos concluir que a mediana da variação mensal do IMC dessa pessoa é igual a

A 27,40
B 27,55.
C 27,70
D 28,15
E 28,45

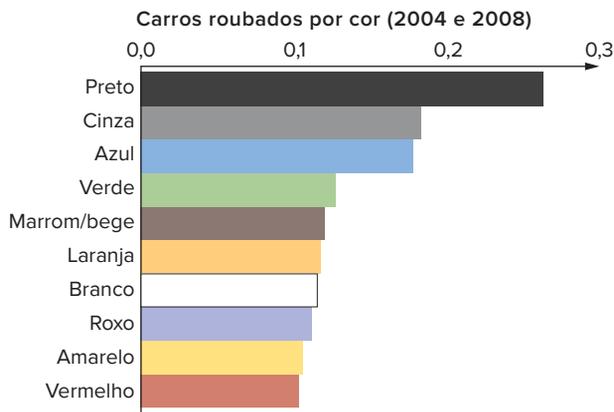
8 Foram perguntadas as idades dos 10 primeiros alunos matriculados em determinado curso noturno e obteve-se a seguinte sequência de idades: 17, 20, 19, 18, 21, 16, 18, 21, 21 e 19.

Obtenha:

a) A média das idades.
b) A mediana.
c) A moda.
d) A variância.
e) O desvio padrão.

9 Um estudo conduzido por Ben Vollaard, da Univer sidade de Tilburg na Holanda, descobriu que carros com cores chamativas têm menor probabilidade de serem roubados. Entre os motivos está o menor valor de revenda Além de diminuir o valor de revenda, uma cor chamativa facilita na hora de reconhecer o veículo roubado.

O histograma a seguir apresenta a porcentagem de carros roubados entre 2004 e 2008, separados por cores, com até três anos de uso, nos Países Baixos:

Fonte: http://www.jalopnik.com.br/conteudo/carros-rosa-nunca-sao-roubados

Qual, dentre as opções a seguir, apresenta um indicador estatístico que pode ser obtido a partir das informações contidas nesse histograma?

A variância
B desvio padrão
C média
D mediana
E moda

10 **Enem 2016** Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

A I.
B II.
C IV.
D V
E VII.

Exercícios propostos

1 Enem 2016 O procedimento de perda rápida de “peso” é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três “pesagens” antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos “pesos”. As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três “pesagens”, os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

A I e III.
B I e IV.
C II e III.
D II e IV.
E III e IV.

2 Famerp 2018 Sendo x um número inteiro, a mediana do conjunto {3, 7, 2,   3, 13, 9,   1, x} de oito números é igual a $\frac{7}{2}$
Dessa forma, x é igual a

A 7
B 3
C 4.
D 6.
E 5

3 UFPR 2018 Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

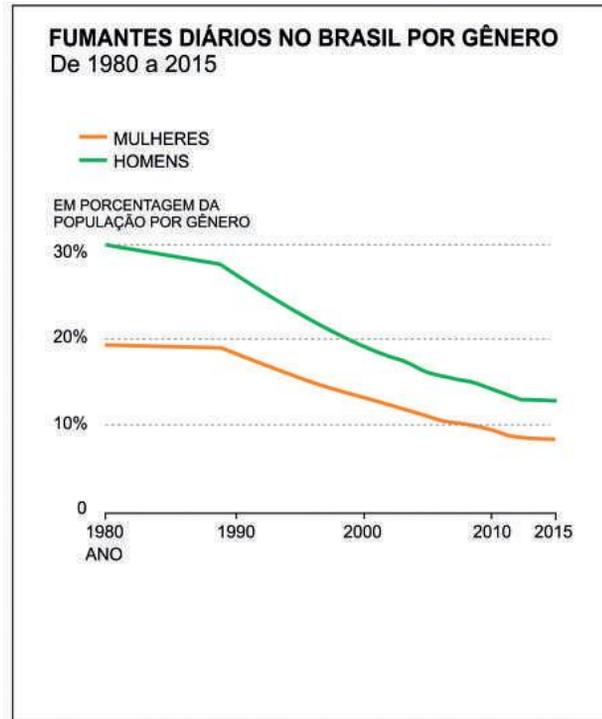
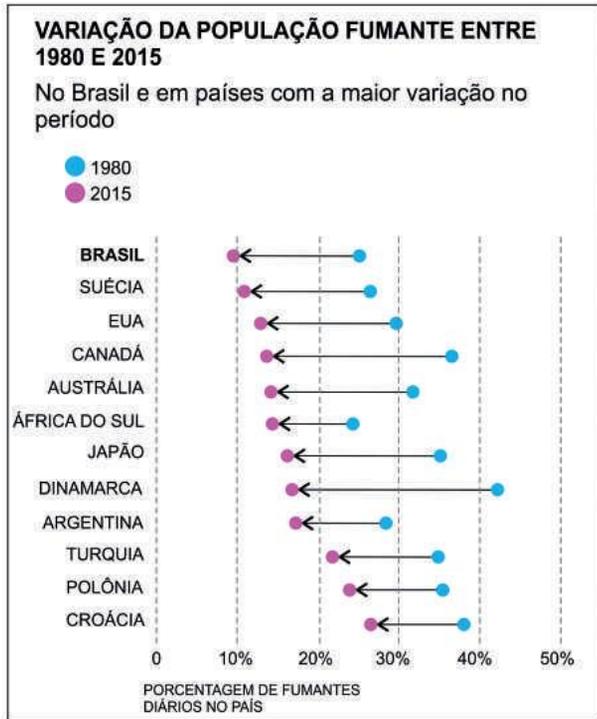
Lanchonete	Preço
A	R$ 10,75
B	R$ 6,00
C	R$ 9,50
D	R$ 11,00
E	R$ 5,25
F	R$ 7,00
G	R$ 10,50
H	R$ 8,00

a) Calcule a média e a mediana dos preços apresentados na tabela
b) Leonardo decidiu acrescentar duas lanchonetes em sua pesquisa Ao considerar todos os 10 estabelecimentos, a média de preços passou a ser de R$ 8,45. Sabendo que essas duas novas lanchonetes cobram o mesmo preço pela jarra de suco, calcule esse valor

4 **FGV-SP 2018** Uma lista de quatro números inteiros tem média 7 e diferença entre o maior e o menor dos números igual a 24. A moda e a mediana da lista são, ambas, iguais a 8. Assim, o desvio padrão da lista é igual a

A $\sqrt{69}$ B $\sqrt{70}$ C $\sqrt{71}$ D $\sqrt{72}$ E $\sqrt{73}$

5 **Insper 2018** Observe os gráficos.

(https://www.nexojornal.com.br)

Utilizando apenas a análise dos dados expressos nos gráficos, é possível concluir corretamente que

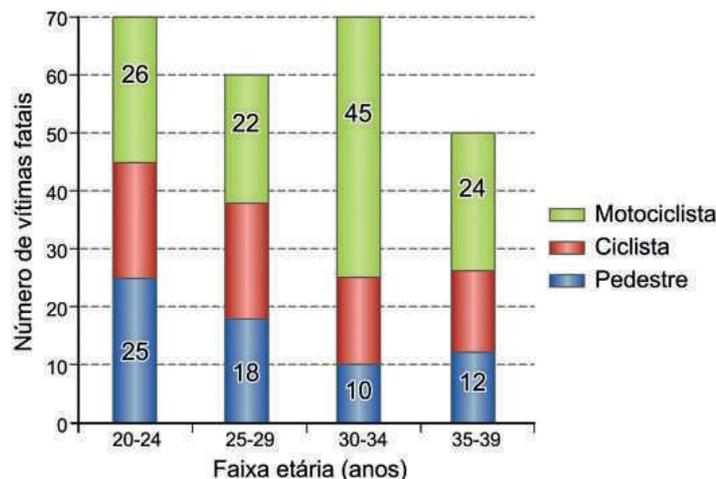
A a África do Sul foi o país que teve a maior redução na porcentagem de fumantes diários de 1980 para 2015

B em 2015 o Brasil tinha mais fumantes diários do que os EUA

C no Brasil houve uma redução maior no percentual de homens fumantes do que no de mulheres fumantes de 1980 para 2015.

D o país com maior número de fumantes em 1980 era a Dinamarca e, em 2015, passou a ser a Croácia

E o Japão sempre teve mais fumantes do que o Brasil no período de 1980 a 2015

6 **Unesp 2018** O gráfico indica o número de vítimas fatais no trânsito de uma grande cidade em 2017. Os dados estão distribuídos por quatro faixas etárias e por três categorias de locomoção dessas vítimas: pedestres, ciclistas e motociclistas.

Nesse ano, a porcentagem de vítimas fatais que se deslocavam de bicicleta e tinham menos de 30 anos, em relação ao total de vítimas das quatro faixas etá rias e das três categorias de locomoção, foi de

A 15,6%.
B 21,6%.
C 30%.
D 12,5%.
E 27,2%.

7 **Enem 2015** Um concurso é composto por cinco eta pas Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate ba seia-se na maior pontuação na quinta etapa

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é

A A, B, C, E, D.
B B, A, C, E, D.
C C, B, E, A, D.
D C, B, E, D, A.
E E, C, D, B, A.

8 **Enem 2019** Os alunos de uma turma escolar foram di vididos em dois grupos Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol Sabe-se que o gru po de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol A tabela seguinte apresenta informações so bre as alturas dos alunos da turma

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega de sala

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

A basquete, basquete, basquete, basquete.
B futebol, basquete, basquete, basquete.
C futebol, futebol, basquete, basquete.
D futebol, futebol, futebol, basquete.
E futebol, futebol, futebol, futebol

9 **FGV-SP 2017** Removendo um número do conjunto {11, 12, 17, 18, 23, 29, 30} formamos um novo conjunto com média aritmética dos elementos igual a 18,5 A media na dos elementos desse novo conjunto é igual a

A 26,5.
B 26,0
C 20,5
D 17,5
E 14,5

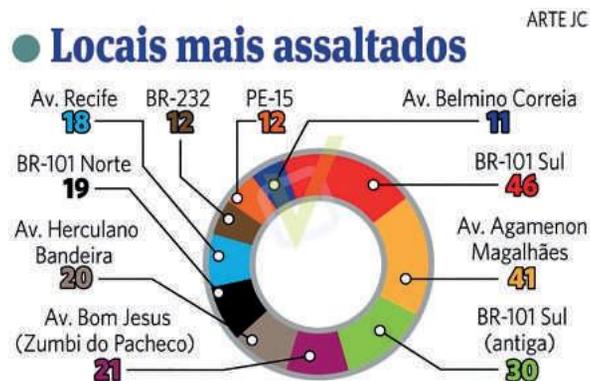
10 **PUC-Campinas** A tabela a seguir mostra os resultados de uma pesquisa sobre a faixa salarial dos funcionários de uma empresa que usam bicicletas para ir ao trabalho.

Faixa salarial em reais	Número de funcionários
350 ⊢ 450	380
450 ⊢ 550	260
550 ⊢ 650	200
650 ⊢ 750	180
750 ⊢ 850	120
850 ⊢ 950	60
Total	1200

O salário médio desses trabalhadores é

A R$ 400,00.
B R$ 425,00.
C R$ 480,00.
D R$ 521,00.
E R$ 565,00.

11 **UPE/SSA 2017** Segundo matéria do Caderno Cidades do *Jornal do Commercio*, publicada em 8 de maio de 2016, um relatório oficial de assaltos a coletivos entre janeiro e abril de 2016 apontou os locais e as linhas de ônibus que mais sofreram esse tipo de violência no período citado.

Com base nessas informações, analise o gráfico publicado na referida matéria.

O relatório vai além. Aponta que a maioria das investidas, é claro, acontece à noite – mas não tarde da noite –, e quando há mais gente nas ruas: no segundo pico, entre 18h e 20h, e no terceiro pico: de 21h às 22h. Confira vídeo no *Blog* **De Olho no Trânsito sobre a linha do medo**.

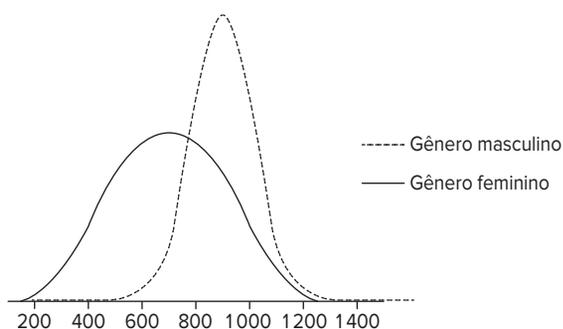
(jc.com.br/deolhonotransito)

De acordo com o gráfico, a média, a mediana e a moda do número de assaltos por local são respectivamente:

A 19; 20 e 12
B 23; 19,5 e 12.
C 19; 12 e 46.
D 23; 12 e 19.
E 19,5; 12 e 18.

12 **FCMMG 2017** Apesar da aparente igualdade entre os sexos, os salários entre homens e mulheres continuam sendo diferentes. Uma forma de estudar o preconceito em relação às mulheres no mercado de trabalho consiste na comparação de valores salariais de ambos os gêneros. No Brasil, pesquisas sinalizam que a participação das mulheres no mercado de tra balho tem aumentado e isso se reflete também na remuneração delas. Contudo, observa-se que os homens ganham em média 30% a mais.

As curvas seguintes seguem a distribuição normal, relacionadas com as médias salariais líquidas por gênero em determinada localidade brasileira.

A linha pontilhada representa a situação do gênero masculino e a linha contínua, do gênero feminino. A variável representada no eixo horizontal indica o valor salarial em reais.

Pelos dados dessa pesquisa, pode-se concluir que:

A O salário médio do gênero feminino, na localidade estudada, vale 700 reais e o do gênero masculino vale 910 reais, aproximadamente.

B A possibilidade de uma mulher, nesta localidade, receber mais que 1400 reais é inexistente.

C Os homens residentes nesta localidade recebem mais que 400 reais mensais.

D O salário médio dos trabalhadores desta localida de é de 800 mensais.

13 **Enem 2012** Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de sua pro priedade. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m^2 e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m^2).

A variância das produções dos talhões expressa em $(\text{sacas/hectare})^2$ é

A 20,25

B 4,50

C 0,71

D 0,50

E 0,25

14 **Enem PPL 2019** Um fiscal de certa empresa de ônibus registra o tempo, em minuto, que um motorista novato gasta para completar certo percurso. No Quadro 1 figuram os tempos gastos pelo motorista ao realizar o mesmo percurso sete vezes. O Quadro 2 apresenta uma classificação para a variabilidade do tempo, segundo o valor do desvio padrão.

Quadro 1

Tempos (em minuto)	48	54	50	46	44	52	49

Quadro 2

Variabilidade	Desvio padrão do tempo (min)
Extremamente baixa	$0 < \sigma \leq 2$
Baixa	$2 < \sigma \leq 4$
Moderada	$4 < \sigma \leq 6$
Alta	$6 < \sigma \leq 8$
Extremamente alta	$\sigma > 8$

Com base nas informações apresentadas nos quadros, a variabilidade do tempo é

A extremamente baixa

B baixa

C moderada

D alta

E extremamente alta

15 **ESPM-SP** Considere todos os pares ordenados (x, y) do produto cartesiano $A \cdot B$ em que A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5}. Tomando se todos os 12 produtos $x \cdot y$, podemos afirmar que a média, a moda e a mediana desse conjunto são respectivamente:

A 9,5; 7,5; 5,5.

B 7,5; 5,5; 3,0.

C 7,5; 3,0; 5,5.

D 5,5; 5,5; 5,5.

E 7,5; 3,0; 6,0

16 **FGV-SP 2018** A média aritmética dos salários de 550 funcionários de uma empresa é R$ 4.000,00.

Em uma negociação salarial, duas propostas foram feitas:

Proposta A: dar um aumento de R$ 450,00 por funcionário.

Proposta B: dar um aumento de 12% para cada salário.

Sejam:

S_1 a soma dos salários a serem pagos se for aceita a proposta A.

S_2 soma dos salários a serem pagos se for aceita a proposta B.

A diferença em valor absoluto entre S_1 e S_2 é:

A R$ 16 500,00

B R$ 12 000,00

C R$ 14 100,00

D R$ 13 800,00

E R$ 15 750,00

17 **Enem 2014** Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

18 **Enem 2014** Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400.000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1 No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014 O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2

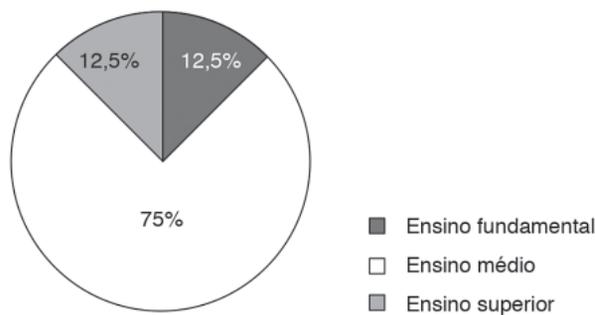
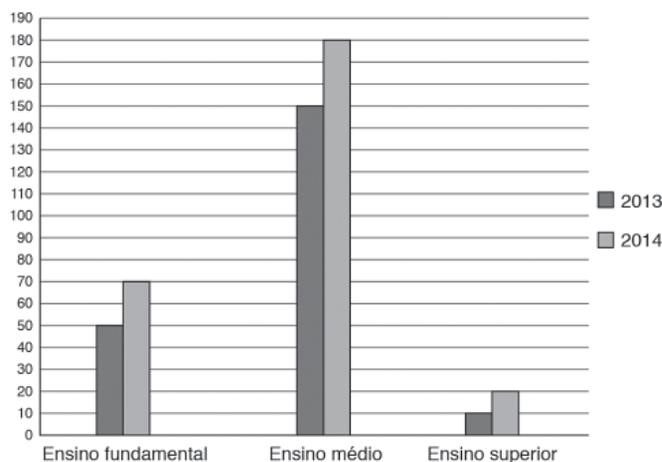



Gráfico 1

Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

A R$ 114285,00
B R$ 130000,00
C R$ 160000,00
D R$ 210000,00
E R$ 213333,00

19 **EPCar 2020** No dia 21 de maio de 2019, comemorou-se 70 anos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar.

A Escola Preparatória de Cadetes do Ar é uma instituição militar de ensino médio, com missão de preparar os Alunos para ingresso no Curso de Oficiais Aviadores por meio do Curso Preparatório de Cadetes do Ar (CPCAr).

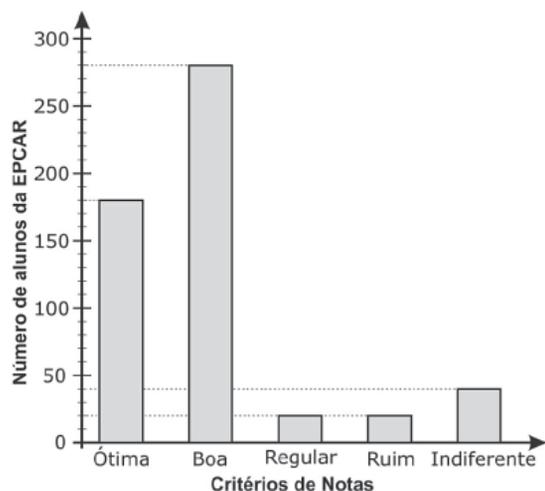
Disponível em: <http://www2.fab.mil.br/epcar/>. Acesso em 30 de março de 2019.

A sua história teve início em 1949, com a criação do Curso Preparatório de Cadetes do Ar (   ) [Esta Escola] tem procurado cumprir sua missão de formar e honrar as suas tradições no ensino, com os pés no passado, as mãos no presente e os olhos no futuro.

Disponível em <http://www2.fab.mil.br/epcar/>. Acesso em 30 de março de 2019

Depois das comemorações dos 70 anos da EPCAR, foi feita uma pesquisa de opinião com os seus alunos sobre as atividades que ocorreram durante as comemorações.
Essas atividades foram avaliadas conforme critérios estabelecidos no seguinte quadro:

Nota	Critérios de Notas
5	ÓTIMA
4	BOA
3	REGULAR
2	RUIM
1	INDIFERENTE

Os resultados obtidos estão registrados no gráfico abaixo:

Se, nessa pesquisa, cada aluno opinou apenas uma vez, então, é **INCORRETO** afirmar que

A o número que representa a quantidade de alunos que participou dessa pesquisa possui mais de 20 divisores naturais.
B a nota média atribuída pelos alunos foi BOA.
C exatamente 30% dos alunos considerou a programação ÓTIMA.
D mais de 10% dos alunos opinaram com INDIFERENTE ou REGULAR em relação à programação.

20 A tabela a seguir apresenta as notas de um candidato em suas provas de um concurso público para auditor fiscal do tesouro nacional:

Matéria	Nota
Português	7,9
Matemática financeira	8,6
Estatística	6,7
Contabilidade	6,3
Direito civil	8,2
Direito tributário	6,7

A nota média, a nota mediana e a nota modal desse candidato, são, respectivamente:

A 7,4; 7,3; 6,7
B 6,7; 7,3; 6,9
C 7,7; 7,4; 6,9
D 6,7; 7,3; 6,9
E 7,4; 7,4; 6,7

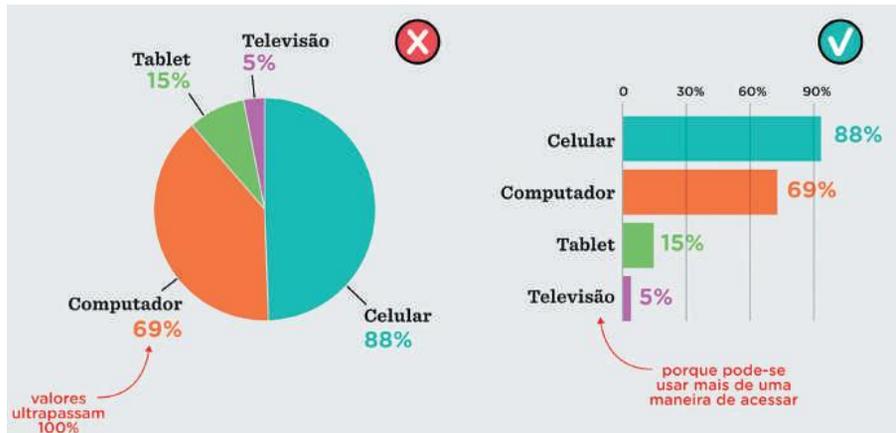
Texto complementar

Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar

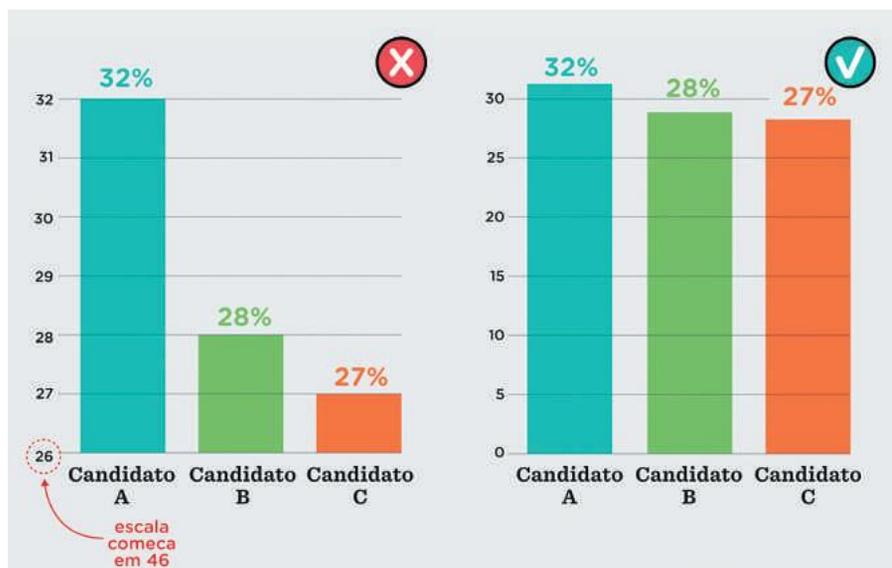
Gabriel Zanlorenssi, Rodolfo Almeida e Gabriel Maia

Escalas enganosas, declarações imprecisas e contas que não fecham: existem diversas maneiras de levar a interpretações erradas por meio de gráficos. Conheça algumas

A visualização de dados pode ser uma ferramenta útil para apresentar um conjunto de dados, e traduzir visualmente informações numéricas Mas ela também pode ser usada de maneira enganosa (mesmo que bem-intencionada). Veja abaixo alguns detalhes frequentes em gráficos enganosos e como notá-los:

Contas que não fecham

Em gráficos de *pizza*, o tamanho de cada fatia representa a proporção de cada categoria Como partes de um todo, a soma dos seus valores percentuais deve resultar em 100% (a totalidade do conjunto)

Nestes gráficos, por exemplo, vemos os meios de acesso à internet utilizados pelos brasileiros. Como as pessoas podem utilizar mais de um meio — e podiam responder mais de uma opção na pesquisa —, a representação em uma *pizza* não é correta, pois os valores ultrapassam o todo de 100% (já que uma pessoa pode ser contada mais de uma vez nos dados) Neste caso, é preferível utilizar barras independentes para cada categoria (que não sugerem a ideia de totalidade)

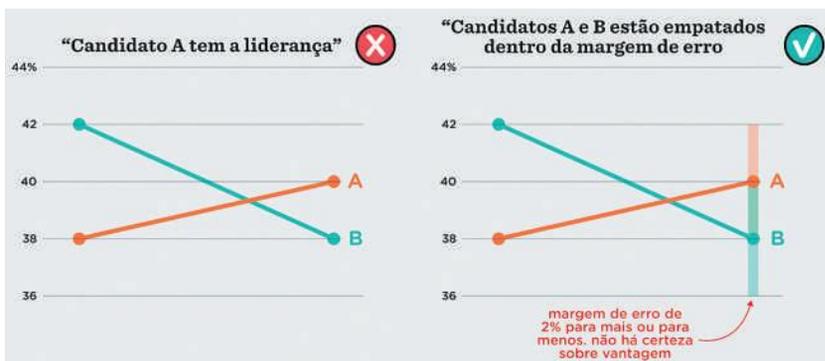
Escalas que não começam no 0

Em uma pesquisa de intenção de votos de uma eleição hipotética, o candidato A tem 32% das intenções de voto, enquanto o candidato B tem 28% e o candidato C tem 27%. A diferença entre os valores é pequena.

No entanto, se esses valores forem mostrados em um gráfico de barras cuja escala não começa no 0, essa diferença é dramatizada, dando uma impressão de que é muito maior do que realmente é. No geral, é importante se manter atento para os valores de uma escala.

Valores não deflacionados

Um erro bastante comum em gráficos que mostram valores monetários ao longo do tempo é não deflacionar os dados — ou seja, não ajustar os valores pela inflação, considerando a desvalorização da moeda. Esses ajustes são fundamentais para longos períodos de tempo.

Nestes gráficos, por exemplo, vemos a evolução do preço da gasolina, em R$ por litro Observe como eles indicam tendências opostas. Isso porque, à esquerda, está demonstrado o preço nominal (ou seja, o valor que o consumidor vê na bomba) e, à direita, o preço real (deflacionado). Para fazer qualquer afirmação sobre se a gasolina está mais cara ou mais barata, deve-se utilizar o preço real.

Margens de erro

Para alguns tipos de pesquisas, especialmente as com grande número de entrevistados, existe uma margem de erro na precisão dos dados. No caso das pesquisas eleitorais, essa incerteza costuma ser de 2 pontos percentuais para mais ou para menos em cada valor. Isso quer dizer que, onde se afirma "2", por exemplo, o valor na verdade pode ser qualquer coisa entre "0" e "4"

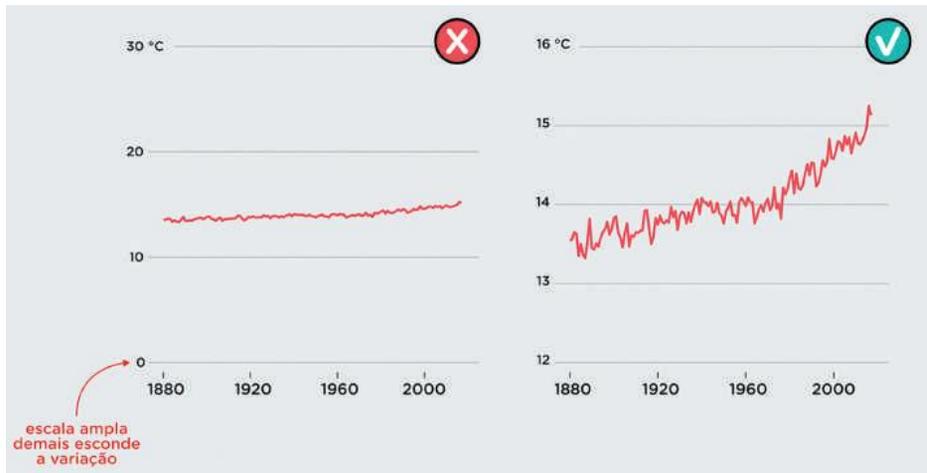
Esse é um detalhe importante para evitar que se façam afirmações como "candidato A lidera a pesquisa de intenções de voto com 40%, seguido de B com 38%". Como a vantagem de um candidato sobre o outro está dentro da margem de erro, não é possível afirmar com certeza que há alguma vantagem. Preferencialmente, também é recomendado demonstrar essa margem de erro nos gráficos.

Dados absolutos × Taxas

Existem alguns dados que são diretamente relacionados a outros e deve-se ter essa relação em mente para fazer comparações Por exemplo: número de homicídios e tamanho da população

Se quisermos descobrir qual estado brasileiro é o mais violento, e visualizar o número de homicídios em cada estado, teremos o gráfico da esquerda, que indica São Paulo como o segundo estado mais violento (em 2015).

Porém, devemos considerar o tamanho de sua população para entender o quão violento ele é proporcionalmente a ela. Isso é visualizado no gráfico à direita, que usa a taxa de "homicídios a cada 100 mil habitantes".

Escalas inadequadas

É comum encontrar gráficos de linhas que parecem indicar retas, levando a entender que não há mudança nos dados.

Nos exemplos acima, que mostram a temperatura global ao longo do tempo, a escala utilizada no gráfico da esquerda é ampla demais e esconde (ou atenua) a variação nos dados, dando a impressão de que não há mudança. Já o gráfico da direita utiliza uma escala mais adequada, dando conta da variação, sem também dramatizar demais esse aumento.

Uma alternativa, apropriada para este dado em questão, seria mostrar o quanto o dado variou em relação à média já que, se tratando de temperatura global, um aumento de apenas um grau já tem consequências climáticas significativas

Sazonalidade

Existem alguns dados que apresentam padrões de variação sazonais. Isso quer dizer que eles repetem alguns padrões em determinadas épocas (por exemplo, desemprego cai em dezembro e janeiro e sobe em outros períodos do ano).

É importante perceber isso quando olhamos para gráficos que isolam um determinado período do tempo (como o gráfico hipotético à esquerda), levando a crer que um dado está caindo, quando na verdade, se olharmos o panorama geral, ele está subindo dentro da variação sazonal esperada (como mostra o gráfico à direita).

Isso é útil também para ter cautela com afirmações que comparam algum dado sazonal, afirmando que aumentou ou diminuiu em relação ao mês anterior quando o correto é comparar com o mesmo mês, em outro ano

Fontes: Pnad 2015 (IBGE); ANP (Agência Nacional do Petróleo), 2017; DataSUS 2015; e Departamento de Meteorologia dos EUA. ZANLORENSSI, Gabriel et.al. Nexo Jornal, 22 jun. 2018. Disponível em: <https://www.nexojornal.com.br/grafico/2018/03/31/Como-mentir-com-gr%C3%A1ficos-7-detalhes-que-podem-te-enganar> Acesso em 12 jan 2021.

Resumindo

Medidas de posição ou de tendência central

Observe a tabela referente à idade de 25 estudantes de uma sala de um curso pré-vestibular

17	17	17	17	18	18	18	18	18	18	18	18	19
19	19	19	19	19	20	20	20	21	21	21	21	

Média aritmética

Representada por $\overline{X}$, é o quociente entre a soma de todos os valores da amostra e o número total de amostras.

$$\overline{X} = \frac{17 \cdot 4 + 18 \cdot 8 + 19 \cdot 6 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 4}{4 + 8 + 6 + 3 + 4} = \frac{68 + 144 + 114 + 60 + 84}{25} = \frac{470}{25} = 18,8$$

Moda

A moda (Mo) consiste no valor x_i de maior frequência absoluta n_i ou relativa f_i.

No exemplo das idades dos estudantes, temos que: Mo = 18.

Mediana

Consiste no valor do termo central da sequência (quando a quantidade de termos for ímpar) e da média aritmética dos termos centrais (quando a quan tidade de termos for par)

No exemplo das idades dos estudantes, a sequência tem 25 termos, logo, a mediana dessa sequência de valores corresponde ao valor do 13º termo.

$$\left(\underbrace{17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18,}_{12\text{ termos}}\ \underbrace{19}_{\text{Mediana}}\ \underbrace{, 19, 19, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 21, 21, 21}_{12\text{ termos}}\right)$$

Medidas de dispersão

Variância

A variância (V ou σ^2) de uma amostra é igual ao quadrado do desvio padrão da mesma amostra:

$$V = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i \quad \overline{X})\ n}{n}$$

Desvio padrão

O desvio padrão (σ) de uma amostra é igual à raiz quadrada da média quadrática das diferenças entre cada um dos dados (x_i) e a média aritmética $\overline{x}$ desses dados:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sqrt{\frac{(X_1 \quad \overline{X})^2 + (X_2 \quad \overline{X})^2 + (X_3 \quad \overline{X})^2 + \quad + (X_n \quad \overline{X})^2}{n}}$$

Quer saber mais?

Filme

- **O homem que mudou o jogo**. Direção: Bennett Miller, 2011. Classificação indicativa: 10 anos.

  Billy Beane (Brad Pitt) é o gerente do time de beisebol Oakland Athletics. Com pouco dinheiro e com as ideias do matemático Peter Brand (Jonah Hill), ele desenvolveu um sofisticado programa de estatísticas para o clube, chegando às finais e tornando o Oakland uma das principais equipes do esporte nos anos 1980

Sites

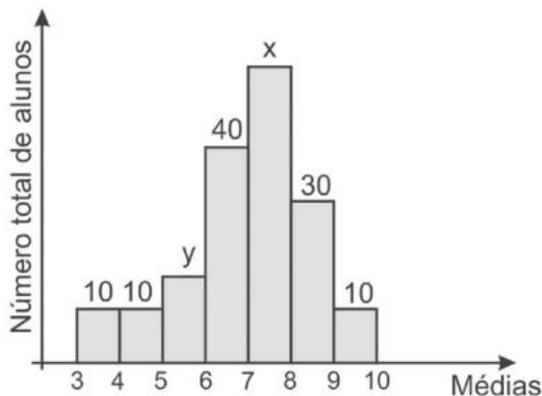
- Página do IBGE Disponível em: <http://p p4ed com/HPOJW>

  Você vai encontrar dados interessantes sobre o Brasil e sua gente, sobre economia e desenvolvimento, agricultura e urbanidades.

- Página do Censo 2010 (último feito no Brasil) Disponível: <http://p.p4ed.com/HPOJE>.

  São milhares de resultados que revelam muitos hábitos do povo brasileiro.

Exercícios complementares

1 EPCar 2020 No Curso Preparatório de Cadetes do Ar (CPCAR) existem 8 turmas de 25 alunos que ao final do 3º trimestre de certo ano apresentaram as médias em matemática, registradas no gráfico abaixo:

Neste ano, 60% dos alunos do CPCAR obtiveram mé dia maior ou igual a 7. Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) x% do total de alunos apresentaram média maior ou igual a 6.

( ) y% do total de alunos apresentaram média menor que 6.

( ) A nota mediana deste resultado é maior que 7,3.

Sobre as proposições, tem-se que

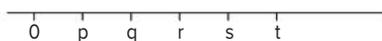
A todas são verdadeiras.
B todas são falsas.
C apenas duas são falsas
D apenas uma é falsa.

2 FGV-SP 2018

a) Nos últimos N dias, a média aritmética diária na produção de tênis de uma empresa foi de 70 uni dades. Hoje, a produção de 90 unidades elevou a média aritmética para 75 unidades diárias. Qual é o valor de N?

b) Uma empresa produz computadores em três cidades diferentes. Mensalmente, a soma dos computadores produzidos nas três cidades é o triplo da produção de computadores de uma das cidades. É correto afirmar que a mediana das três quantidades é igual à média aritmética das três quantidades?

3 FGV-SP 2018

a) Na reta numérica dada abaixo, p, q, r, s e t são cinco números inteiros pares e consecutivos e $q + s = 24$. Qual é a média aritmética desses cinco inteiros?

b) Se y é o menor número inteiro positivo tal que o produto dele por 3150 é o quadrado de um núme ro inteiro, qual é o valor de y?

4 UPE/SSA 2018 Trezentos candidatos se submeteram ao teste de seleção para vaga de emprego em uma grande empresa sediada em Pernambuco. Os resultados estão agrupados na tabela a seguir:

DESEMPENHO DOS CANDIDATOS NO TESTE DE SELEÇÃO	
Pontuação no teste de seleção	Número de candidatos
80 ⊢ 90	20
90 ⊢ 100	100
100 ⊢ 110	120
110 ⊢ 120	50
120 ⊢ 130	10

Com base nessas informações, os valores aproximados da variância e do desvio padrão são respectivamente:

A 103 e 10,15.
B 102,5 e 10,09.
C 94,6 e 9,72.
D 84,9 e 9,21.
E 76 e 8,71.

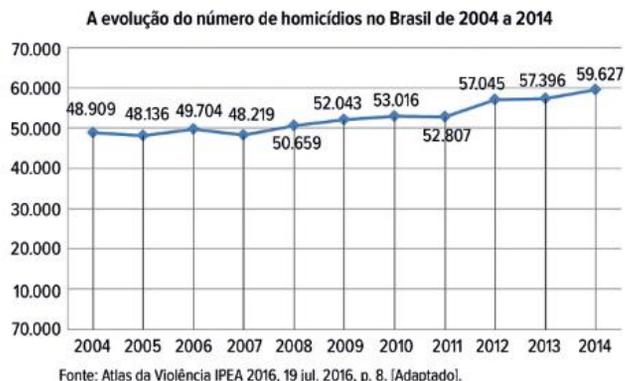
5 EPCar 2018 Na tabela a seguir estão relacionados os salários de todos os funcionários das classes A, B e C de uma empresa cuja média salarial é R$ 1.680,00.

Classes	Salários	Quantidade de funcionários
A	900 ⊢ 1500	20
B	1500 ⊢ 2100	x
C	2100 ⊢ 2700	10

Se a mediana para a distribuição de frequências obtida acima é *m*, então a soma dos algarismos de *m* é igual a

A 10 B 12 C 15 D 18

6 UFSC 2017 O gráfico abaixo representa a evolução do número de homicídios no Brasil em função do tempo, no período de 2004 a 2014.

FRENTE 2

Com base nos dados do gráfico, responda aos itens **a** e **b**.

a) Identifique entre que anos consecutivos foi regis trado o maior aumento no número de homicídios.

b) Determine o aumento percentual identificado no **item a**

c) O estudo apresentado no Atlas da Violência IPEA 2016 ressalta que, embora os homens represen tem a vasta maioria das vítimas de homicídio no Brasil, de 2004 a 2014 houve um crescimento de 11,6% da taxa de homicídios entre mulheres, apesar das políticas públicas desenvolvidas para minimizar o problema, como a Lei Maria da Penha e as medidas de prevenção à violência domés tica institucionalizadas desde 2006 Determine o número de mulheres assassinadas por dia no Brasil, tomando como referência o ano de 2014 (365 dias), em que 4757 mulheres foram vítimas de morte por agressão.

d) O estudo apresentado no Atlas da Violência IPEA 2016 divide a população em dois grupos disjun tos, um de negros (pretos e pardos) e outro de não negros (indivíduos brancos, amarelos e in dígenas). De 2004 a 2014, há uma discrepância alarmante na evolução da taxa de homicídios entre esses dois grupos: enquanto a de negros cresceu 18,2%, a de não negros caiu 14,6%. Isso fez com que, em 2014, para cada não negro morto, 2,4 indivíduos negros fossem mortos. Através de uma fração irredutível, determine a probabilidade de que na ocorrência aleatória de um homicídio a vítima seja um indivíduo não negro

7 **UFSC 2017** Em relação às proposições abaixo, é correto afirmar que:

01 Os juros médios no cartão de crédito chegaram, em fevereiro de 2016, ao maior patamar desde ou tubro de 1995, segundo levantamento da Anefac A taxa mensal atingiu 14,72%. Logo, o montante a ser pago por um consumidor que usou R$ 2000,00 no rotativo do cartão de crédito por 30 dias é de R$ 2294,40, sem que se levem em conta os outros encargos referentes ao atraso no pagamento da dívida financiada

02 Em 1987, o governo criou a Unidade Referencial de Preços (URP), que corrigia o salário dos três meses seguintes a partir de uma taxa prefixada com base na média geométrica da inflação dos três meses anteriores Para os trabalhadores, teria sido mais vantajoso se o governo tivesse utilizado como base a média aritmética da inflação dos três meses an teriores, tendo em vista que a média aritmética é sempre maior ou igual à média geométrica, para quaisquer números positivos dados.

04 $\sum_{n=1}^{k}(2n+2)$ é uma forma de representar a soma dos números que calculamos na expressão $2n+2$ quando substituímos *n* por 1, depois por 2, depois por 3 e assim sucessivamente, até $n=k$ O valor de k para que $\sum_{n=1}^{k}(2n+2)=130$ é 10.

08 Considere uma sucessão infinita de círculos concêntricos em que cada círculo tem diâmetro igual ao dobro do diâmetro do círculo seguinte. Se o primeiro círculo tem raio de 3 cm, então a soma das áreas desses círculos é 18π cm^2.

16 Suponha que na tabela estejam as estaturas da Mafalda e da sua turma (personagens da Mafalda).

Disponível em: <http://blogmaniadegibi.com/2011/12/conheça-mafalda/>. Acesso em: 20 out. 2016.

Personagem	Altura (cm)
Miguelito	117,5
Susanita	125,4
Libertad	107,3
Mafalda	120
Manolito	116,4
Guille	108,7
Filipe	117,5
Mamã (mãe)	169
Papá (pai)	179,2

Com base nos dados acima, é correto afirmar que a estatura média dos personagens da Mafalda é de 129 cm

Soma:

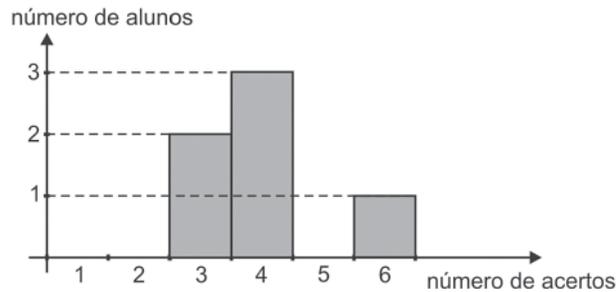
8 **EEAR 2016** A distribuição de frequência abaixo refere-se à exportação de soja realizada por uma Cooperativa no mês de abril

x_i	Toneladas exportadas	f_i
1	10 ⊢ 20	3
2	20 ⊢ 30	2
3	30 ⊢ 40	8
4	40 ⊢ 50	10
5	50 ⊢ 60	7
		$\sum f_i = 30$

Dados fictícios.

Com base nos dados apresentados, a mediana da distribuição pertence à

A 2ª classe
B 3ª classe
C 4ª classe
D 5ª classe

9 **AFA 2016** Um cursinho de inglês avaliou uma turma completa sendo que parte dos alunos fez a avaliação A, cujo resultado está indicado no gráfico abaixo.

Os demais alunos fizeram a avaliação B e todos tiveram 4 acertos. Assim, o desvio padrão obtido a partir do gráfico acima ficou reduzido à metade ao ser apurado o resultado da turma inteira. Essa turma do cursinho de inglês tem

A mais de 23 alunos.
B menos de 20 alunos.
C 21 alunos.
D 22 alunos.

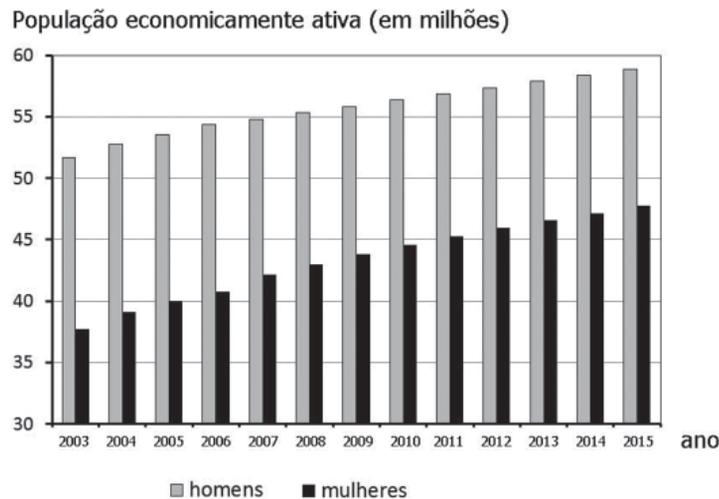
10 **FGV-SP 2016** A tabela mostra a série de um indicador econômico de um país, em bilhões de US$, nos 12 meses de 2013.

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
21	24	20	23	22	22	18	17	16	17	16	18

a) Calcule a média, a(s) moda(s), a mediana e a maior taxa mensal de crescimento (em porcentagem) dessa série

b) Sabe-se que, em janeiro de 2014, esse indicador econômico atingiu um valor positivo para o qual a nova série (de janeiro de 2013 até janeiro de 2014) passou a ter mediana de 18 bilhões de US$, e um número inteiro de bilhões de US$ como média mensal Calcule o desvio médio (DM) dessa nova série

Dado: Desvio Médio $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{X}|}{n}$, sendo $\overline{X}$ a média aritmética

11 **UFRGS 2016** O gráfico a seguir representa a população economicamente ativa de homens e mulheres no Brasil de 2003 a 2015.

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

A no ano de 2009, a população economicamente ativa de mulheres era cerca de 50% da população economicamente ativa de homens.

B de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de homens cresceu mais do que a de mulheres.

C em relação a 2005, a população economicamente ativa de mulheres em 2011 cresceu cerca de 5%.

D de 2003 a 2015, em termos percentuais, a população economicamente ativa de mulheres cresceu mais do que a de homens.

E em relação a 2007, a população economicamente ativa de homens em 2015 cresceu cerca de 3%.

12 **FGV 2016** A lei de Benford, também chamada de "lei do primeiro dígito", sugere que, em vários conjuntos de dados numéricos, a ocorrência dos algarismos de 1 a 9 no início dos números (da esquerda para a direita em cada número) do conjunto de dados não é igualmente provável. A lei se verifica em diversos conjuntos de dados reais como, por exemplo, o conjunto das populações dos diversos municípios de um país, o conjunto dos dados numéricos contidos nas contas de energia elétrica da população de um município, o conjunto dos comprimentos dos rios de um país etc. Quando a lei de Benford se aplica aos dados analisados, a probabilidade P(n) de que o algarismo n seja o primeiro algarismo em um dado numérico qualquer do conjunto de dados será $P(n) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Por exemplo, se a lei se aplica, a probabilidade de que o algarismo 1 (n = 1) seja o primeiro (da esquerda para a direita) em um número sorteado ao acaso do conjunto de dados é igual a log 2, ou seja, aproximadamente 30%, já que $\log 2 \cong 0,30$.

Admita que os dados numéricos indicados na tabela 1 tenham sido retirados da declaração de imposto de renda de um contribuinte. Também admita que a Receita Federal tenha a expectativa de que tais dados obedeçam, ainda que aproximadamente, à lei de Benford.

Tabela 1

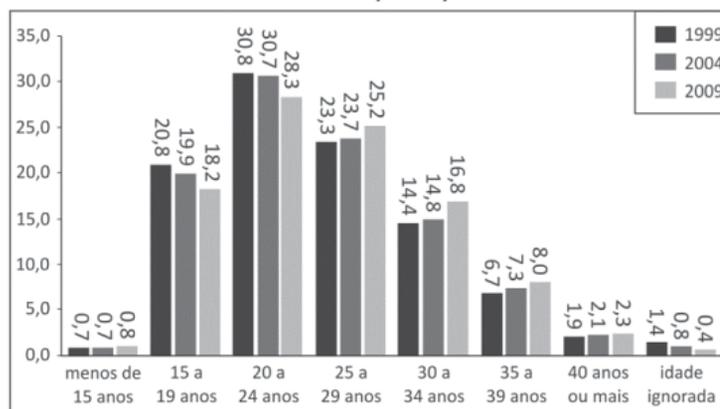
1526	2341	5122	242	1444	788	4029	333	426	1981
2589	503	1276	5477	229	579	1987	719	1236	2817
456	886	1424	470	113	342	345	433	192	343

a) Complete a tabela, registrando a frequência do primeiro dígito (da esquerda para a direita) dos dados da tabela 1 para os casos em que n = 2, n = 3 e n = 4. Registre também a frequência relativa desses algarismos (ver exemplo para o caso em que n = 1).

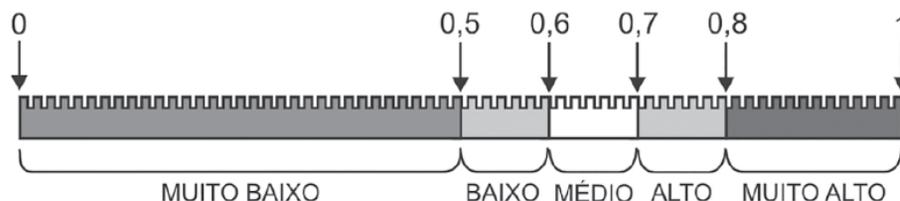
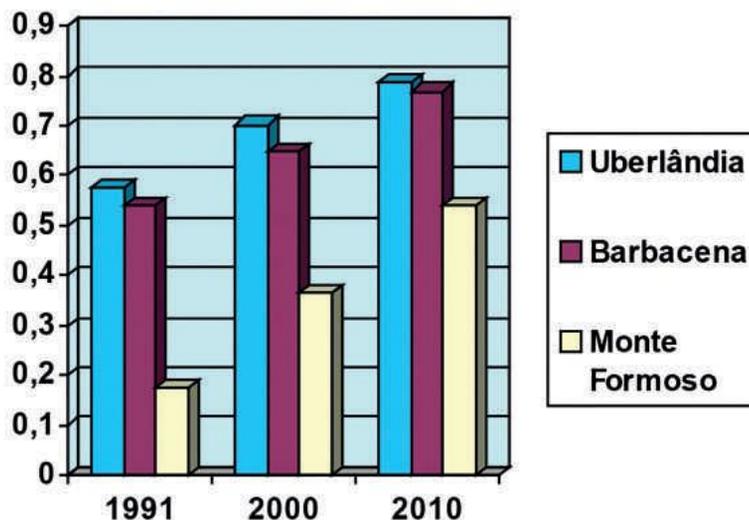
n	1	2	3	4
Frequência de n	9			
Frequência relativa de n	$\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$			

b) Admita que uma declaração de imposto de renda vai para a "malha fina" (análise mais detalhada da Receita Federal) se a diferença, em módulo, entre a frequência relativa do primeiro dígito, em porcentagem, e a probabilidade dada pelo modelo da lei de Benford, também em porcentagem, seja maior do que quatro pontos percentuais para algum n. Argumente, com dados numéricos, se a declaração analisada na tabela 1 deverá ou não ir para a "malha fina".

Adote nos cálculos log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48.

13 **Fuvest 2015** Examine o gráfico.

IBGE. Diretoria de Pesquisa, Coordenação de População e Indicadores Sociais, Estatísticas do Registro Civil, 1999/2004/2009. Adaptado.

Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar corretamente que a idade
A mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi maior que 27 anos.
B mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi menor que 23 anos.
C mediana das mães das crianças nascidas em 1999 foi maior que 25 anos
D média das mães das crianças nascidas em 2004 foi maior que 22 anos
E média das mães das crianças nascidas em 1999 foi menor que 21 anos

14 AFA 2015 No Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil 2013 constam valores do Índice de Desenvol-vimento Humano Municipal (IDHM) de todas as cidades dos estados brasileiros.
O IDHM é um número que varia entre 0 e 1 Quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano de um município, conforme escala a seguir

Abaixo estão relacionados o IDHM de duas cidades de Minas Gerais em condições extremas, Monte Formoso e Uberlândia, e uma em situação intermediária, Barbacena

Analisando os dados acima, afirma se que
I o município de maior crescimento do IDHM, nos períodos considerados, é Monte Formoso.
II na última década, Barbacena apresentou maior evolução do IDHM que Uberlândia
III uma tabela que relaciona cidade, época e faixa de IDHM pode ser representada corretamente como:

	Monte Formoso	Barbacena	Uberlândia
1991	Muito baixo	Baixo	Baixo
2000	Muito baixo	Alto	Alto
2010	Baixo	Alto	Alto

São corretas
A apenas I e II
B apenas II e III
C apenas I e III
D I, II e III

15 **FGV-SP 2014 (Adapt.)** Observe a notícia abaixo e utilize as informações que julgar necessárias.

VAREJO MIRA PREVENÇÃO DE PERDAS

Com retomada de inflação, setor ganha importância para manter lucro

Índice de perdas no varejo

Em %, sobre o faturamento líquido do setor

R$ 18,5 milhões

é a perda em valores do varejo brasileiro em 2011

Perdas por segmento	Em %
Supermercado	1,96
Farmácias e drogarias	0,38
Outros*	0,19
Média do varejo	1,76

Causas das perdas	
Furto externo	19
Furto interno	16
Erros administrativos	16
Fornecedores	10
Quebra operacional**	32
Outros ajustes	10

Quem participou da pesquisa	
Empresas	275
Lojas	4.486
Centros de distribuição	413

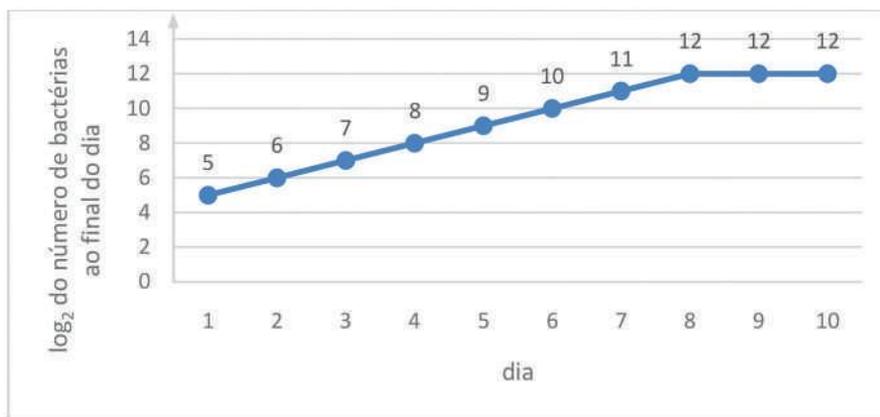
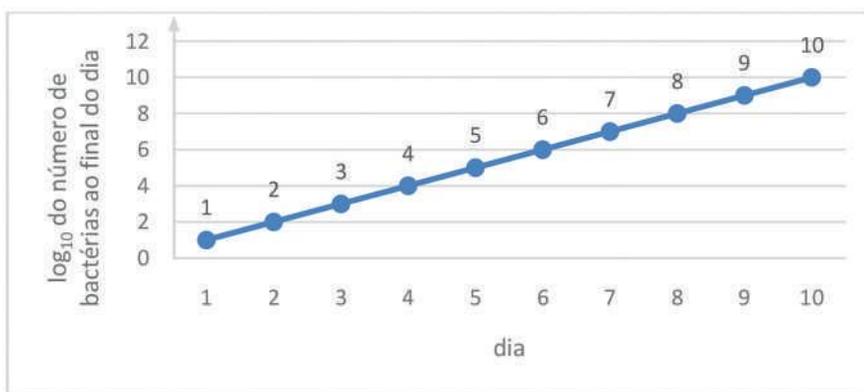
(*) O grupo "outros" inclui varejo da construção civil e lojas de conveniência e roupa, mas não na totalidade desses segmentos
(**) Quebra operacional inclui produtos danificados por clientes, por funcionários, com validade vencida, embbalagens vazias com conteúdo furtado Fonte: Provar (Programa do Varejo) da USP

a) Suponha que a partir de 2010 os índices de perdas no varejo, no Brasil e nos EUA, possam ser expressos por funções polinomiais do 1º grau, $y = ax + b$, em que $x = 0$ representa o ano 2010, $x = 1$, o ano 2011, e assim por diante, e y representa o índice de perdas expresso em porcentagem. Determine as duas funções.

b) Em que ano a diferença entre o índice de perdas no varejo, no Brasil, e o índice de perdas no varejo, nos EUA, será de 1%, aproximadamente? Dê como solução os dois anos que mais se aproximam da resposta.

16 **FGV-SP 2014** Um biólogo inicia o cultivo de três populações de bactérias (A, B e C) no mesmo dia. Os gráficos seguintes mostram a evolução do número de bactérias ao longo dos dias.

População de bactérias A

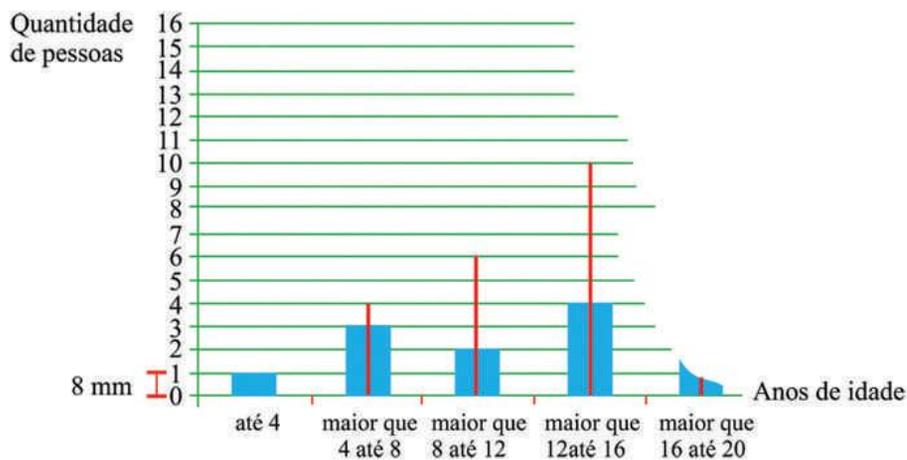
População de bactérias B

População de bactérias C

A partir da informação dos gráficos, responda:

a) Em que dia o número de bactérias da população C ultrapassou o da população A?

b) Qual foi a porcentagem de aumento da população de bactérias B, entre o final do dia 2 e o final do dia 6?

c) Qual foi a porcentagem de aumento da população total de bactérias (colônias A, B e C somadas) entre o final do dia 2 e o final do dia 5?

17 **FGV-SP 2013** O gráfico de barras indica como informação principal o número de pessoas atendidas em um pronto-socorro, por faixa etária, em um determinado dia. Outra informação apresentada no gráfico, por meio das linhas verticais, é a frequência acumulada. Em virtude de um rasgo na folha em que o gráfico estava desenhado, as informações referentes à última barra, e apenas elas, foram perdidas, como se vê na figura.

FRENTE 2

A média de idade do total de pessoas de 0 a 20 anos que frequentou o pronto-socorro nesse dia foi 12,4 anos. Nessas condições, na folha intacta do gráfico original, o comprimento da linha vertical posicionada na última barra, que indica a frequência acumulada até 20 anos de idade, em centímetros, era igual a

A 8,8
B 9,6.
C 10,4.
D 11,2
E 12,0.

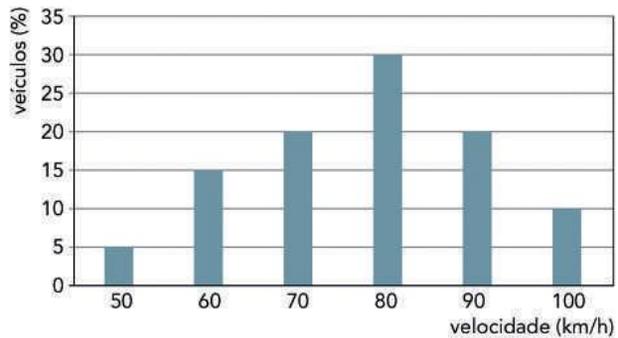
18 **UFBA** O quadro a seguir apresenta todas as medalhas ganhas por países da América do Sul durante os jogos olímpicos de Atenas realizados no ano de 2004 Dos doze países sul-americanos, apenas um não partici pou do evento

País	Número de medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Total
Brasil	5	2	3	**10**
Argentina	2	0	4	**6**
Chile	2	0	1	**3**
Paraguai	0	1	0	**1**
Venezuela	0	0	2	**2**
Colômbia	0	0	2	**2**
Total	**9**	**3**	**12**	**24**

Com base nas informações apresentadas e considerando-se o quadro de medalhas, é correto afirmar:

01 Do total de medalhas conquistadas, 37,5% foram de ouro
02 A média de medalhas de prata conquistadas pelos seis países do quadro é igual a 0,5.
04 O desvio-padrão do número de medalhas de bronze conquistadas pelos seis países do quadro é igual a $\sqrt{\frac{5}{3}}$
08 A mediana do número de medalhas conquistadas pelos seis países do quadro é igual a 2.
16 Dos países sul-americanos participantes do evento, 50% não ganharam medalha de ouro.
32 Considerando-se que o número de medalhas de bronze conquistadas pelo Brasil, nesse evento, foi 50% menor que o obtido na Olimpíada de 2000, então o Brasil conquistou menos que seis medalhas de bronze na Olimpíada de 2000.

Soma:

19 **Uerj 2016** Técnicos do órgão de trânsito recomendaram velocidade máxima de 80 km/h no trecho de uma rodovia onde ocorrem muitos acidentes. Para saber se os motoristas estavam cumprindo as recomendações, foi instalado um radar móvel no local. O aparelho registrou os seguintes resultados percentuais relativos às velocidades dos veículos ao longo de trinta dias, conforme o gráfico abaixo:

Determine a média de velocidade, em km/h, dos veículos que trafegaram no local nesse período.

20 Uma pesquisa feita com 500 funcionários de uma determinada empresa foi solicitada pelo plano de saúde que atende a esses funcionários. Entre as informações dessa pesquisa constava o número de dependentes de cada funcionário.

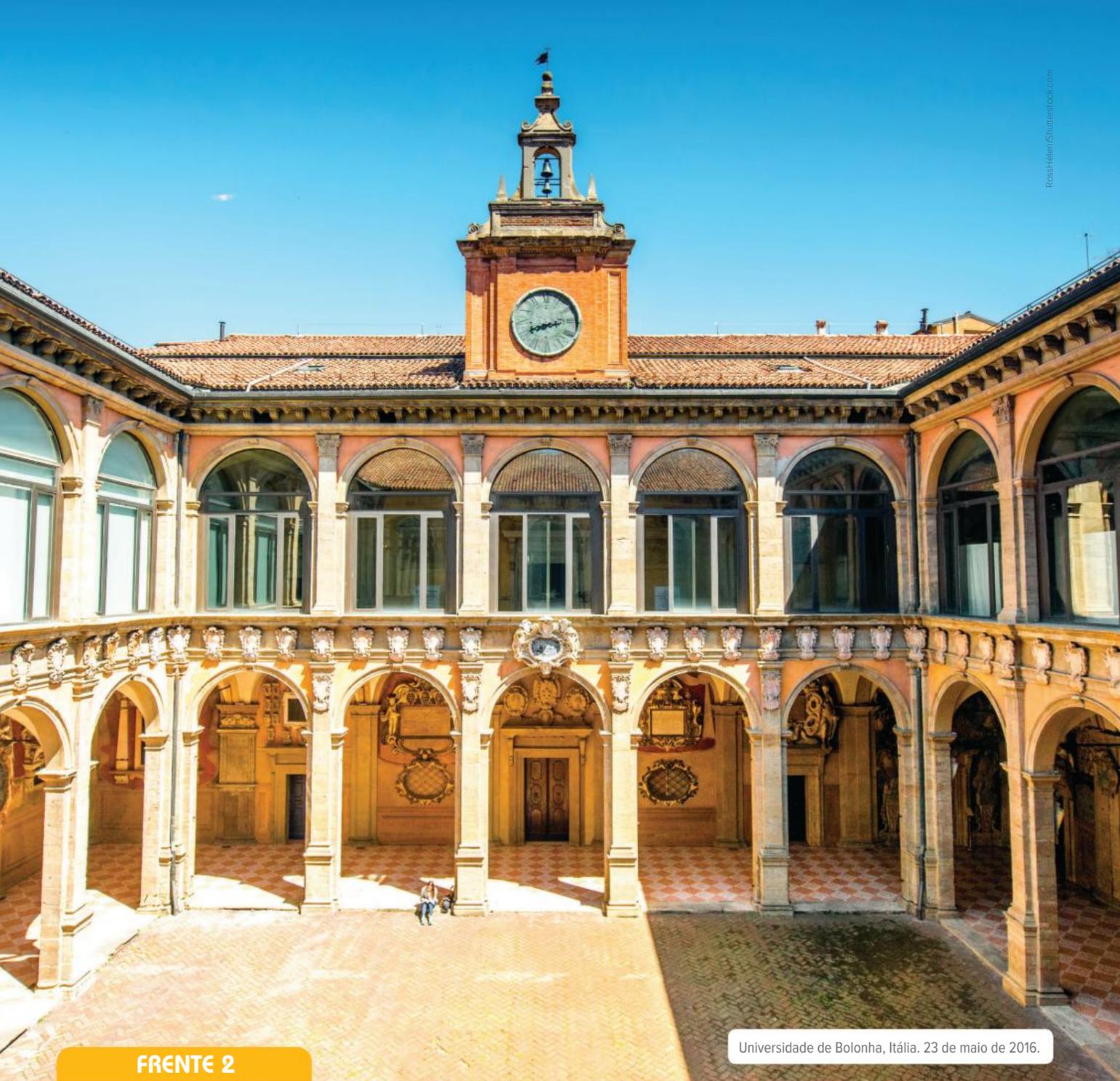
REDPIXEL.PL/Shutterstock.com

Os resultados desse item foram organizados de acordo com a tabela de distribuição de frequências a seguir:

Número de dependentes	Número de funcionários
0	120
1	95
2	90
3	95
4	35
5	30
6	20
7	15

De acordo com a tabela pode-se inferir que o número médio e o número mediano de dependentes por funcionários dessa empresa são, respectivamente, iguais a

A 2 e 2,15.
B 0,94 e 90
C 3,5 e 0
D 2,15 e 2
E 2,15 e 3,5

RossHelen/Shutterstock.com

Universidade de Bolonha, Itália. 23 de maio de 2016.

FRENTE 2

CAPÍTULO

8

Números complexos

Até o final do século XV algumas equações algébricas de 3º grau eram dadas como impossíveis por grandes matemáticos. No início do século seguinte, na Universidade de Bolonha, o italiano Scipione del Ferro desenvolveu um método para resolver equações do tipo $x^3 = px + q$, que anos depois levou à solução geral de equações de 3º e 4º graus.

Esse período histórico foi marcado por muitas disputas acadêmicas na busca de fama e prestígio entre os matemáticos que protagonizaram essas descobertas.

Destacou-se o italiano Bombelli, que demonstrou que muitas das equações do 2º grau só podiam ser resolvidas pelos métodos de Cardano e Tartáglia, se consideradas as raízes quadradas de números negativos, que mais tarde foram chamadas, pelo francês Descartes, de imaginárias.

Assim, surgiram os números complexos, cujos significados e representações evoluíram nos anos que se seguiram, tanto pela notação da unidade imaginária, proposta por Euler, quanto das interpretações geométricas e trigonométricas, por Gauss, Wessel, Argand e Moivre.

A urgência de soluções para equações de grau elevado

No período histórico do final da Idade Média e início da Renascença, a Europa passava por profundas mudanças políticas, sociais e culturais. O comércio internacional ganhou força e, com isso, a necessidade de guardar e transferir dinheiro voltou a ser imprescindível para a dinâmica da economia ocidental.

Enquanto os centros urbanos tornavam-se mais importantes que as regiões rurais concentrando uma população formada principalmente por artesãos, operários e comerciantes, surgiam os primeiros bancos, responsáveis pelas operações de câmbio e empréstimos a juros.

Aos poucos, banqueiros e mercadores enriqueciam e conquistavam maior poder político, emprestando dinheiro aos senhores feudais que, por sua vez, endividavam-se cada vez mais para não abrir mão dos seus luxos e, também, financiar as despesas de suas Cruzadas.

A prática dos seguros e dos empréstimos a juros trouxe novos problemas matemáticos para a sociedade. Muitos desses problemas por vezes se traduzem em equações algébricas de grau elevado, o que ia além do conhecimento matemático da época.

Endividados, os senhores feudais viam-se obrigados a ceder politicamente, adotando medidas favoráveis ao comércio e à educação, como a criação de universidades, por exemplo.

O problema da compra parcelada

No estudo da Matemática Financeira, o conceito de juros é algo que só pode ser aplicado a valores devidos. Se a capitalização de juros incidisse sobre valores que já foram pagos, as dívidas nunca seriam quitadas.

Por esse motivo, quando se compra algo a prazo e com parcelas periódicas, a capitalização dos juros incide apenas sobre o saldo devedor.

Assim, sejam:

- **D** uma dívida inicial que deverá ser paga em *n* parce las periódicas,
- **x** uma taxa percentual fixa de juros capitalizados a cada período,
- **($p_1, p_2, p_3, ..., p_n$)** a série das parcelas que amortizam a dívida até sua quitação e
- **S** o saldo devedor.

Se a primeira parcela p_1 for paga no ato da compra, então o saldo devedor depois desse pagamento fica expresso por:

$$S = D - p_1$$

Durante o período entre os pagamentos p_1 e p_2 o saldo devedor S capitaliza com o incremento de juros equivalen tes a $x\% \cdot S$

$$S + \frac{x}{100} \cdot S$$

Fatorando a expressão:

$$S + \frac{x}{100} \cdot S = S \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

Fazendo $1 + x\% = F$ aproveita-se o conceito do fator de correção para simplificar a expressão:

$$S \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = S \cdot F$$

Substituindo S pela sua expressão original, tem-se o novo saldo devedor S':

$$S' = S \cdot F = (D \quad p_1) \cdot F$$

Uma vez passado o período de capitalização, chega o momento de pagar a segunda parcela, fazendo com que o saldo devedor passe a ser expresso por:

$$S'' = (D \quad p_1) \cdot F \quad p_2$$

Agora, durante o período entre a 2ª e a 3ª parcela ocorre novamente o incremento dos juros, levando a uma nova expressão para o saldo devedor:

$$S''' = ((D \quad p_1) \cdot F \quad p_2) \cdot F$$

Se a taxa de juros não sofrer alteração, esse padrão se repete até que todas as *n* parcelas sejam pagas.

Perceba que durante o período de pagamento das parcelas de uma compra em que são cobrados juros, o saldo devedor fica representado por uma expressão dinâmica, onde novos termos algébricos são incorporados de acordo com a passagem do tempo. Isto ocorre até o momento da quitação da dívida, quando o saldo devedor deve ficar igual a zero. Assim, tem-se a equação:

$$(...(((D - p_1) \cdot F - p_2) \cdot F - p_3) \cdot F...) - p_n = 0$$

Quando se deseja encontrar a taxa de juros adequada a uma situação dessas, percebe-se que o grau da equação aumenta de acordo com o número de parcelas.

Duas parcelas

Se o problema consiste na compra de uma mercadoria que à vista sai por R$ 1.000,00, mas que será paga em duas parcelas de R$ 550,00 cada, sendo uma no ato e outra após 30 dias, por exemplo, então a equação é de 1º grau:

$$(1000 \quad 550) \cdot F \quad 550 = 0$$
$$450 \cdot F \quad 550 = 0$$
$$9 \cdot F \quad 11 = 0$$

Resolvendo a equação do 1º grau:

$$9 \cdot F \neq 11 \quad 0$$
$$9 \cdot F = 11$$
$$F = \frac{11}{9} \cong 1{,}2222$$

Substituindo a expressão para o fator de correção:

$$1 + \frac{x}{100} \cong 1{,}2222$$
$$\frac{x}{100} \cong 0{,}2222$$
$$x \cong 22{,}22$$

Portanto, nessa compra, a taxa de juros cobrada é de aproximadamente 22,22%.

Três parcelas

Se a mesma compra for paga em 3 parcelas mensais de R$ 400,00 cada, por exemplo, a equação é de 2º grau (quadrática):

$$((1000 \quad 400) \cdot F \quad 400) \cdot F \quad 400 = 0$$
$$(600 \cdot F \quad 400) \cdot F \quad 400 = 0$$
$$600 \cdot F^2 \quad 400 \cdot F \quad 400 = 0$$
$$3 \cdot F^2 \quad 2 \cdot F \quad 2 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$3 \cdot F^2 \quad 2 \cdot F \quad 2 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 4 + 24 = 28$$

$$F = \frac{-(\ \ 2)\ \ \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} \begin{cases} \nearrow F = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3} \cong 1{,}21525 \\ \searrow F = \dfrac{1\ \ \sqrt{7}}{3} \cong -0{,}54858 \end{cases}$$

Como F > 0, substituindo a expressão para o fator de correção:

$$1 + \frac{x}{100} \cong 1{,}21525 \Rightarrow \frac{x}{100} \cong 0{,}21525 \Rightarrow x \cong 21{,}525$$

Portanto, nessa compra, a taxa de juros cobrada é de, aproximadamente, 21,5%.

Quatro parcelas

Até aqui, o conhecimento matemático da Idade Média era suficiente para resolver as equações. Mas o problema da mesma compra em quatro parcelas de, por exemplo, R$ 300,00 cada, leva a uma equação de 3º grau (cúbica):

$$(((1000 \quad 300) \cdot F \quad 300) \cdot F \quad 300) \cdot F \quad 300 = 0$$
$$((700 \cdot F \quad 300) \cdot F \quad 300) \cdot F \quad 300 = 0$$
$$(700 \cdot F^2 \quad 300 \cdot F \quad 300) \cdot F \quad 300 = 0$$
$$700 \cdot F^3 \quad 300 \cdot F^2 \quad 300 \cdot F \quad 300 = 0$$
$$7 \cdot F^3 \quad 3 \cdot F^2 \quad 3 \cdot F \quad 3 = 0$$

Perceba que os casos usados como exemplo são mais simples, pois não há variação no valor das parcelas de cada compra, tampouco nos períodos entre os pagamentos. Equações mais sofisticadas surgem quando as parcelas e os períodos variam.

! Atenção

O estudo dos polinômios e equações polinomiais com grau maior que 2 está totalmente interligado ao estudo dos números complexos, de modo que a dialética desses assuntos levou pensadores da matemática como Descartes, Leibniz, Euler e Gauss, por exemplo, a formular e tentar provar o que hoje chamamos de **teorema fundamental da Álgebra**:

"Toda equação polinomial de grau $n \geq 1$ possui pelo menos um número complexo (que torna possível obter uma raiz de índice par de um número negativo) como solução."

Inicialmente afirmada pelo matemático alemão Peter Roth em 1580, a primeira demonstração totalmente correta desse fato algébrico só foi publicada em 1814, por Jean-Robert Argand.

Museu do Louvre, Paris

René Descartes

Museu Alemão de Tecnologia, Berlim

Leonhard Euler

Museu Estatal Pushkin de Belas Artes, Moscou

Carl Friedrich Gauss

Museu de História Natural, Londres

Jean-Robert Argand

Equações de terceiro grau

A corrida pela descoberta dos métodos gerais para a resolução das equações algébricas de grau maior que 2 começou quando, pouco antes de falecer em meados do século XVI, del Ferro ensinou sua técnica recém-descoberta da solução das equações do tipo $x^3 = px + q$ para um de seus alunos, chamado Antônio Maria Fior

Em vez de publicar a descoberta de seu professor, Fior preferiu desafiar o grande matemático da época, Niccolò Fontana, também conhecido pelo apelido de Tartáglia

Disputas públicas entre matemáticos eram bastante comuns à época e um bom desempenho nos confrontos poderia garantir uma posição na cátedra da universidade Mas, para a infelicidade do desafiante, quase no final do prazo, Tartáglia também conseguiu deduzir um processo similar ao descoberto por Scipione e resolver todos os problemas que lhe foram propostos Fior não conseguiu resolver os seus e a notícia da vitória de Tartáglia chegou a Milão, onde vivia um dos maiores intelectuais da época, Girolamo Cardano.

Cardano pediu que Tartáglia lhe ensinasse os métodos que havia descoberto para resolver os casos particulares das equações de 3º grau Tartáglia revelou por meio de versos, mas sem dar a demonstração, como resolver as equações do terceiro grau do tipo do tipo $x^3 = px + q$, que são incompletas, pois não apresentam termo do segundo grau.

Os versos de Tartáglia para essas equações levavam a uma solução da equação que, em termos algébricos, fica expressa pela seguinte fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} \quad \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano procurou por uma demonstração satisfatória e começou então a dedicar-se às equações de 3º grau completas que hoje representamos por:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Cardano não só conseguiu encontrar um processo para resolver essas equações como incentivou seu assistente Lodovico Ferrari a trabalhar em processos similares para as equações do 4º grau (quárticas):

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Ferrari de fato encontrou a solução das equações do 4º grau e mostrou a Cardano que, pouco depois, publicou uma das mais importantes obras da história da matemática, intitulada *Ars Magna*.

Essa obra de Cardano contém os métodos, os primeiros descobertos, para a resolução das equações completas de 3º e 4º graus, atribuindo todos os devidos créditos aos matemáticos: Tartáglia, del Ferro e Ferrari.

Wellcome Collection Londres

Girolamo Cardano

Museu do Estado Amsterdã

Niccolò Fontana (Tartáglia)

Roya Society Londres

Scipione del Ferro

Museu de Capodimonte, Nápoles

Lodovico Ferrari

Com a publicação, Cardano ficou conhecido com o maior matemático de sua época. Tartáglia sentiu-se traído, pois sua fórmula acabou ficando conhecida como fórmula de Cardano. Ferrari tornou-se professor na Universidade de Bolonha.

Revisando conhecimentos

O método de Cardano empregava diversas técnicas algébricas para resolver equações de 3º grau, como:

- Técnicas de resolução de equações quadráticas.
- Identidades polinomiais de 2º e 3º grau
- Mudanças de variáveis
- Sistemas de equações do tipo: soma e produto.

Por isso, recomenda se revisar as teorias que fundamentam esses modelos matemáticos.

Fórmula quadrática

Chama se equação quadrática ou do 2º grau toda sentença matemática aberta do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0$$

Nessa sentença temos os parâmetros **a**, **b** e **c**, que são números reais denominados:

a → coeficiente principal
b → coeficiente secundário
c → termo independente

Equações quadráticas podem apresentar até duas soluções distintas, que podem ser obtidas pela fórmula quadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por apresentar a operação de radiciação, as soluções das equações do 2º grau obtidas da fórmula quadrática são chamadas de raízes da equação:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 \quad 4ac$ dentro da raiz é o discriminante da equação Trata se também de um importante parâmetro real da equação, que costuma ser representado por Δ, uma letra grega maiúscula de nome delta

O valor de Δ discrimina o número de soluções reais da equação

- Se $\Delta > 0$ então a equação admite duas soluções reais e distintas
- Se $\Delta = 0$ então a equação admite apenas uma solução real
- Se $\Delta < 0$ então a equação **não** admite solução real

Calcular previamente o valor do discriminante da equação pode poupar tempo na resolução das equações quadráticas, principalmente no caso em que esse valor é negativo

Assim, toda equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ pode ser resolvida em até dois passos.

O primeiro passo é obter o discriminante: $\Delta = b^2 \quad 4ac$ e, quando seu valor não for negativo, o segundo passo é efetuar os cálculos da expressão simplificada: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Caso o discriminante seja negativo então não há como efetuar a radiciação no universo dos números reais e, por isso, o conjunto solução da equação é vazio.

Veja o exemplo da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ em que:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

Como o número -4 não possui raiz quadrada real, o conjunto solução da equação é vazio:

$$S = \varnothing$$

Exercício resolvido

1 Encontre os discriminantes das seguintes equações do segundo grau e, se possível, os números reais que são suas soluções:

a) $2x^2 \quad 5x \quad 3 = 0$ **b)** $9x^2 \quad 6x + 1 = 0$ **c)** $x^2 + x + 2 = 0$ **d)** $x^2 + 4x + 2 = 0$

Resolução:

a) $2x^2 \; {=}5x \; {\Rightarrow} 3 \;\; 0$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = \quad 5 \\ c = -3 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 \quad 4ac = (\quad 5)^2 \quad 4 \cdot 2 \cdot (\quad 3) = 25 + 24 = 49$$

Como $\Delta > 0$, a equação possui duas soluções reais:

$$x = \frac{\pm b \quad \Delta\sqrt{\;}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-2}{4} = \quad \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \quad \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

b) $9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação possui apenas uma solução real:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(\;\pm 6) \quad \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

c) $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 \quad 4ac = 1^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \quad 8 = \quad 7$$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui solução real: $S = \varnothing$

d) $x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 \quad 4ac = 4^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 \quad 8 = 8$$

Como $\Delta > 0$, a equação possui duas soluções reais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{2})}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = \;\pm 2 \quad \sqrt{2} \\ \searrow x_2 = -2 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ -2 + \sqrt{2}, \; -2 - \sqrt{2} \right\}$$

Identidades do 2º grau

Entre as principais identidades do 2º grau estudadas no Ensino Fundamental e Médio estão os trinômios quadrados perfeitos, que resultam do:

- Quadrado da soma: $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
- Quadrado da diferença: $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

Essas identidades matemáticas têm grande utilidade no estudo da Álgebra, da Aritmética e da Geometria, pois exprimem sentenças verdadeiras quaisquer que sejam os valores de suas variáveis *a* e *b*.

Veja como a fatoração de um trinômio quadrado perfeito pode ser usada para resolver uma equação do 2º grau como, por exemplo:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Com a = x e b = 3 na identidade do quadrado da diferença, tem-se:

$$(a \quad b)^2 = (x \quad 3)^2 \equiv x^2 \quad 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \equiv x^2 \quad 6x + 9$$

Observando que o trinômio obtido é exatamente 4 unidades maior que o 1º membro da equação proposta, soma-se o número 4 a ambos os membros da equação:

$$x^2 - 6x + 5 + 4 = 0 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 4$$

Então, fatora-se o 1º membro da equação obtida e pode-se começar o processo de isolar a incógnita:

$$x^2 - 6x = 9 \quad 4$$
$$(x - 3)^2 = 4$$
$$x = 3 \pm \sqrt{4}$$
$$x = 3 \pm 2 \begin{cases} x_1 = 3 + 2 = 5 \\ x_2 = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Portanto: $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow S = \{1, 5\}$

Exercício resolvido

2 Encontre os valores de *a*, *b* e *c* que satisfazem à iden tidade: $ax^2 + bx + c \equiv (2x \quad 3)^2 \quad 4$

Resolução:

Desenvolvendo o quadrado da diferença no segundo membro da identidade:

$$(2x \quad 3)^2 \quad 4 \equiv (2x)^2 \quad 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 \quad 4 \equiv$$
$$\equiv 4x^2 \quad 12x + 9 \quad 4 \equiv 4x^2 \quad 12x + 5$$

Portanto: a = 4, b = −12 e c = 5.

Identidades do 3º grau

As principais identidades de 3º grau estudadas no Ensino Fundamental e Médio são os produtos notáveis conhecidos como:

- O cubo da soma: $(a + b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- O cubo da diferença: $(a \quad b)^3 \equiv a^3 \quad 3a^2b + 3ab^2 \quad b^3$

E os casos de fatoração conhecidos como:

- A soma de cubos: $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 \quad ab + b^2)$
- A diferença de cubos: $a^3 \quad b^3 \equiv (a \quad b)(a^2 + ab + b^2)$

Todas essas expressões são sentenças verdadeiras quaisquer que sejam *a* e *b*

Veja como a fatoração pode ajudar a resolver equações completas de 3º grau como, por exemplo:

$$x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0$$

Nessa equação, é possível reorganizar os termos de modo a ficar com uma diferença de cubos no 1º membro:

$$x^3 \quad x^2 + 2x \quad 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 \quad 8 = x^2 \quad 2x$$

Então, fatora se cada membro da equação obtida de acordo com seus respectivos casos.

Com a = x e b = 2 na identidade da diferença de cubos, tem-se que o 1º membro da equação fica:

$$a^3 \quad b^3 \equiv x^3 \quad 8 \equiv (x \quad 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) \equiv$$
$$\equiv (x \quad 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Já no 2º membro basta colocar o fator comum *x* em evidência:

$$x^2 - 2x \equiv x(x - 2)$$

Depois de aplicadas as identidades, a equação proposta fica expressa por:

$$(x \quad 2)(x^2 + 2x + 4) = x(x \quad 2)$$

Observando que (x 2) é fator de ambos os membros da equação, conclui se que se x 2 = 0, então, a sentença toda *é verdadeira*, pois zero multiplicado por qualquer número resulta em zero.

Assim, conclui-se que uma das soluções é x = 2.

Agora, no caso da expressão (x 2) ser diferente de zero, pode-se dividir ambos os membros da equação obtida por (x 2) e, assim, obter uma equação quadrática:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x \quad 2)} = \frac{x(x-2)}{(x \quad 2)}$$
$$x^2 + 2x + 4 = x$$
$$x^2 + x + 4 = 0$$

O discriminante dessa equação quadrática é:

$$\Delta = b^2 \quad 4ac = 1^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot 4 = 1 \quad 16 = -15$$

Como $\Delta < 0$, conclui-se que a equação não possui mais soluções reais.

Portanto: $x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow S = \{2\}$.

Exercício resolvido

3 Se os números reais *a*, *b*, *c* e *d* satisfazem à identidade $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv (5x + 2)^3$, então:

A a < b < c < d
B d < c < b < a
C d < c < a < b
D a < d < c < b
E b < a < c < d

Resolução:

Desenvolvendo o cubo da soma no segundo membro da identidade:

$$(5x + 2)^3 \equiv (5x)^3 + 3 \cdot (5x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5x \cdot 2^2 + 2^3 \equiv$$
$$\equiv 125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$$

Portanto: a = 125, b = 150, c = 60 e d = 8

Alternativa: **C**

No processo de resolução das equações de 3º grau, descoberto por del Ferro e Tartáglia, há uma passagem que envolve a identidade do cubo da soma em uma forma variante, em que os termos centrais do segundo membro têm seus fatores comuns colocados em evidência:

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + \underbrace{3a^2b + 3ab^2}_{\text{fator comum: } 3ab} + b^3$$

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

Assim, a verdade algébrica expressa por essa identidade pode ser enunciada como:

"O cubo da soma de 2 termos equivale ao triplo do produto dos termos, vezes sua soma, mais a soma de seus cubos."
$(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$

Mudança de variável

Aproveitando o recurso da atribuição algébrica, as mudanças de variável proporcionam uma alternativa bas tante útil na resolução de equações de grau maior ou igual a 2, como as equações biquadradas, por exemplo, que são equações quárticas incompletas que possuem apenas os termos de grau par.

Veja como uma mudança de variável permite, por exemplo, resolver a seguinte equação quártica como se fosse uma equação quadrática:

$$x^4 \quad 3x^2 \quad 4 = 0$$

Como a atribuição $y = x^2$ implica $y^2 = (x^2)^2 = x^4$, as potên cias pares da variável *x* podem ser substituídas pela primeira e a segunda potência da variável *y*, criando a equação:

$$\begin{array}{ccc} x^4 & 3x^2 & 4 = 0 \\ \downarrow & \downarrow & \\ y^2 & 3y & 4 = 0 \end{array}$$

O discriminante dessa equação é: $\Delta = (-3)^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot (-4) = = 9 + 16 = 25$

Então, da fórmula quadrática:

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow y_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \searrow y_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{array}$$

Nesse momento é importante estar atento ao fato de que os números 4 e –1 são soluções da equação na variável *y*, não da equação proposta na variável *x*.

Então, como $x^2 = y$, há dois casos para analisar:

$$y_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = +2 \\ \searrow x_2 = \quad 2 \end{array}$$

$$y_2 \Longrightarrow 1 \quad x^2 \Rightarrow \quad 1 \notin \quad x \quad \mathbb{R}$$

Portanto: $x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow 4 \quad 0 + \quad S \quad \{\ 2, \quad 2\}$

A mudança de variável também pode ser um recurso para resolver equações quadráticas como, por exemplo:

$$x^2 \quad 8x + 7 = 0$$

Nessa equação, a atribuição $x = y + 4$ implica:

$$(y + 4)^2 \quad 8(y + 4) + 7 = 0$$

Efetuando o quadrado da soma e a propriedade distributiva:

$$y^2 + 8y + 16 - 8y - 32 + 7 = 0$$

Cancelando os temos +8y e −8y, pode-se isolar y^2 obtendo-se:

$$y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{9} \begin{array}{l} \nearrow y_1 = +3 \\ \searrow y_2 = -3 \end{array}$$

Então, como $x = y + 4$ tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 4 = 3 + 4 = 7 \\ x_2 = y_2 + 4 = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Portanto: $x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow S = \{7, 1\}$.

Nos exemplos mostrados aqui, cada equação foi resolvida com apenas uma mudança de variável. Mas os processos elaborados por Cardano e Tartáglia para resolver uma equação cúbica pode fazer uso de mais mudanças de variáveis.

Exercício resolvido

4 Fazendo $x = y - 2$ na equação $x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = 0$, obtém-se a equação:

A $y^2 - y = 0$
B $y^3 - y = 0$
C $y^3 + y = 0$
D $y^3 - 1 = 0$
E $y^3 + 1 = 0$

Resolução:

Com a mudança de variável tem-se:

$$(y \quad 2)^3 + 6(y \quad 2)^2 + 12(y \quad 2) + 9 = 0$$

$$(y^3 \quad 3 \cdot y^2 \cdot 2 + 3 \cdot y \cdot 2^2 \quad 2^3) + 6(y^2 \quad 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2) + + 12(y \quad 2) + 9 = 0$$

$$y^3 \quad 6y^2 + 12y \quad 8 + 6y^2 \quad 24y + 24 + 12y \quad 24 + 9 = 0$$

$$y^3 + 1 = 0$$

Alternativa: **E**

Observação:

A solução real de $y^3 + 1 = 0$ é $y = -1$

Então, como $x = y \quad 2$, conclui-se que uma solução real da equação $x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = 0$ é $x = -1 \quad 2 = \quad 3$

Sistemas de equações do tipo: soma e produto

São sistemas não lineares de equações em que dados os números reais **s** e **p**, deseja-se encontrar outros números *x* e *y* tais que: $\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = p \end{cases}$

Sistemas assim equivalem a uma única equação do 2º grau cujas soluções são os números *x* e *y*

Considere uma nova variável **t** que pode assumir tanto o valor de *x* quanto de *y*; assim:

- Se $t = x$, então $t \quad x = 0$.
- Se $t = y$, então $t \quad y = 0$

Multiplicando essas duas equações, temos:

$$(t - x) \cdot (t - y) = 0$$

Aplicando a propriedade distributiva e reorganizando os termos dessa equação, obtemos:

$$(t - x) \cdot (t - y) = 0 \Leftrightarrow t^2 - t \cdot y - t \cdot x + x \cdot y = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2 - t \cdot (x + y) + x \cdot y = 0$$

Então, observando as igualdades do sistema proposto, chega-se à equação quadrática equivalente:

$$\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = p \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - s \cdot t + p = 0$$

Assim, para encontrar dois números reais cuja soma seja igual a 10 e o produto igual a 7, por exemplo, basta resolver uma equação quadrática:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - 10t + 7 = 0$$

O discriminante da equação na variável *t* é:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 100 - 28 = 72$$

Então, supondo $x > y$, da fórmula quadrática, tem-se:

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{72}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x = 5 + 3\sqrt{2} \\ y = 5 - 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Porém, não é sempre possível encontrar dois números reais que satisfaçam sistemas como esses, pois o discriminante da equação quadrática equivalente pode ser negativo. Observe o próximo exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - t + 2 = 0$$

O discriminante da equação na variável *t* é:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

Como $\Delta < 0$, conclui-se não haver números reais *x* e *y* tais que sua soma seja 1 e seu produto 2.

! Atenção

Para determinar dois números conhecendo a soma e o produto de ambos, basta resolver uma equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -(\text{Soma dos números procurados}) \\ c = +(\text{Produto dos números procurados}) \end{cases}$$

Assim, a equação será:

$$1 \cdot x^2 - (\text{Soma}) \cdot x + (\text{Produto}) = 0$$

As soluções dessa equação são os números procurados.

Exercícios resolvidos

5 Encontre dois números reais cuja soma é 6 e o produto é 4.

Resolução:

Sendo $x \geq y$ os números procurados, tem-se o sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$

A equação quadrática equivalente é $t^2 - 6t + 4 = 0$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 36 - 16 = 20$$

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \begin{cases} x = 3 + \sqrt{5} \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Verificando a solução:

$$\begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6 \\ x \cdot y = (3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

6 Sendo *x* e *y* os números reais que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$ então:

A $x : y = 6$
B $x : y = -6$
C $x : y = -2$
D $x : y = 2$
E $y : x = 6$

Resolução:

Elevando à 2ª potência ambos os membros da 2ª equação do sistema, obtemos:

$$(x \cdot y)^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot y^2 = 16$$

Então, fazendo $X = x^2$ e $Y = y^2$, temos o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = 10 \\ X \cdot Y = 16 \end{cases}$$

A equação quadrática equivalente é $t^2 - 10 \cdot t + 16 = 0$.

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 100 - 64 = 36$$

$$t = \frac{\pm(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6}{2} \begin{cases} X = 8 \\ Y = 2 \end{cases}$$

De $x^2 = 8$ tem-se: $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

De $y^2 = 2$ tem-se: $y = \pm\sqrt{2}$

O produto $x \cdot y$ é positivo, então os números procurados possuem o mesmo sinal.

Assim: $\begin{cases} x = +2\sqrt{2} \Rightarrow y = +\sqrt{2} \Rightarrow x : y = 2 \\ x = -2\sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \Rightarrow x : y = 2 \end{cases}$

Alternativa: **D**

O método de Cardano e Tartáglia

Em seu trabalho, Cardano mostra como transformar as equações cúbicas completas em equações incompletas do tipo adequado ao processo que Tartáglia havia lhe ensinado.

A ideia é relativamente simples, envolvendo apenas uma mudança de variável, porém há uma quantidade considerável de cálculos envolvidos.

Uma equação do 3º grau completa possui coeficientes *a*, *b*, *c* e *d*, não nulos, tais que:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

A atribuição $x = y - \frac{b}{3a}$ gera uma equação na variável *y* desprovida do termo de 2º grau.

Veja como isso ocorre em um exemplo com coeficientes numéricos:

$$x^3 \quad 6x^2 + 18x \quad 13 = 0$$

Nessa equação cúbica, tem-se: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 18 \\ d = \quad 13 \end{cases}$

Com esses valores a mudança de variável, proposta por Cardano, fica expressa pela seguinte atribuição:

$$x = y - \frac{b}{3a} \Rightarrow x = y - \frac{-6}{3 \cdot 1} \Leftrightarrow x = y + 2$$

Assim, fazendo $x = y + 2$ na equação original obtém-se:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^3 & - & 6x^2 & + & 18x & - & 13 & = & 0 \\ (y+2)^3 & + & 6(y+\ 2)^2 & + & = 18(y\quad 2) & & 13 & & 0 \\ \overbrace{y^3 + 6y^2 + 12y + 8} & + & 6\overbrace{(y^2\quad 4y+\ 4)} & + & 18(y\quad 2) & = & 13 & & 0 \\ y^3 + 6y^2 + 12y + 8 & - & 6y^2 - 24y - 24 & + & 18y + 36 & - & 13 & = & 0 \end{array}$$

Cancelando os temos $+6y^2$ e $-6y^2$, pode-se isolar y^3 obtendo-se: $y^3 = \quad 6y \quad 7$.

Equação cúbica incompleta

Uma vez eliminado o termo do 2º grau em uma equação cúbica, aplica-se o método que Tartáglia ensinou a Cardano. Esse método resolve as equações do tipo:

$$x^3 = px + q$$

Em termos algébricos, o primeiro passo do método de Tartáglia consiste na comparação dos termos da equação $x^3 = px + q$ com os da identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$. Assim:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{(a+b)^3} & \equiv & 3ab \cdot & \underbrace{(a+b)} & + & \underbrace{(a^3+b^3)} \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ x^3 & = & p \cdot & x & + & q \end{array}$$

Aqui, a atribuição $x = a + b$ implica as igualdades: $\begin{cases} 3ab = p \\ a^3 + b^3 = q \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccccc} (x)^3 & \equiv & \underbrace{3ab} & \cdot (x) & + & \underbrace{a^3 + b^3} \\ & & \downarrow & & & \downarrow \\ x^3 & = & p & \cdot\ x & + & q \end{array}$$

De fato, o que Tartáglia propõe é encontrar o valor de *x* em duas partes, *a* e *b*, sabendo que essas partes devem satisfazer o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ 3ab = p \end{cases}$

Para resolver o sistema, dividem-se ambos os membros da segunda equação por 3: $ab = \frac{p}{3}$.

Depois, elevam-se ao cubo ambos os membros do que foi obtido:

$$(ab)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \Leftrightarrow a^3b^3 = \frac{p^3}{27}$$

Então, substitui se a 2ª equação do sistema pela sua nova versão cúbica, ficando com um sistema de equações do tipo soma e produto:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ a^3 \cdot b^3 = \frac{p^3}{27} \end{cases}$$

Para facilitar a observação desse fato, podem ser feitas mais 2 atribuições: $\begin{cases} A = a^3 \\ B = b^3 \end{cases}$.

Com essas mudanças de variáveis o sistema terá a seguinte forma: $\begin{cases} A + B = q \\ A \cdot B = \frac{p^3}{27} \end{cases}$

A equação quadrática equivalente ao sistema é $t^2 \ \cdot q \cdot t \ \left(\frac{p^3}{27}\right) = 0$.

Lembrando que, nessa equação, os valores de *p* e *q* são conhecidos e a variável *t* representa, simultaneamente, os valores de A e B. Então, se o discriminante não for negativo, será possível determinar os números reais A e B, por meio da fórmula quadrática.

Depois de encontrados esses valores, a solução *x* da equação cúbica incompleta fica expressa pela soma de suas raízes cúbicas, $\begin{cases} x = a + b \\ a = \sqrt[3]{A} \\ b = \sqrt[3]{B} \end{cases}$.

Assim, tem-se finalmente que: $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

! Atenção

De acordo com os teoremas da Álgebra, uma equação cúbica pode possuir de uma a três soluções reais diferentes, e o método de Cardano e Tartáglia, descrito neste capítulo, mostra apenas como encontrar uma delas.

Para encontrar as outras soluções reais, quando elas existirem, fazemos uso de um algoritmo para divisão de polinômios conhecido como dispositivo prático de Briot-Ruffini que, a partir da equação original e da solução encontrada pelo método de Cardano e Tartáglia, produz uma equação quadrática cujas soluções coincidem com as demais soluções da equação cúbica original.

Esse processo será bastante executado no estudo dos próximos capítulos.

Voltando ao exemplo anterior, em que uma equação cúbica completa foi proposta:

$$x^3 \quad 6x^2 + 18x \quad 13 = 0$$

Por meio da atribuição $x = y + 2$ houve uma mudança de variável que levou à equação incompleta:

$$y^3 = -6y - 7$$

Comparando essa equação com a identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$ tem-se as seguintes atribuições:

$$y = a + b \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = -7 \\ 3ab = \quad 6 \end{cases}$$

Dividindo por 3 a segunda equação: $3ab = -6 \Leftrightarrow ab = \quad 2$

Elevando ao cubo: $(a \cdot b)^3 = (\quad 2)^3 \Leftrightarrow a^3 \cdot b^3 = \quad 8$.

Fazendo $a^3 = A$ e $b^3 = B$ obtém-se o sistema soma e produto: $\begin{cases} A + B = -7 \\ A \cdot B = \quad 8 \end{cases}$

A equação do 2º grau equivalente ao sistema é $t^2 + 7t \quad 8 = 0$.

Resolvendo pela fórmula quadrática:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 49 + 32 = 81$$

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 9}{2} \begin{matrix} \nearrow A = 1 \\ \searrow B = \quad 8 \end{matrix}$$

Lembrando que, das soluções da equação quadrática, tanto faz qual é o valor de A e qual é o valor de B, pois a solução da equação do 3º grau incompleta é igual à soma das raízes cúbicas de A e B:

$$y = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-8} + \ 1 = (\quad 2) \quad 1$$

Assim, substituindo $y = -1$ na atribuição $x = y + 2$, que promoveu a primeira mudança de variável do problema, obtém-se finalmente uma das soluções da equação original:

$$x = -1 + 2 = 1$$

Portanto, uma das soluções da equação $x^3 - 6x^2 + 18x \quad 13 = 0$ é $x = 1$

Exercícios resolvidos

7 Encontre uma solução real para a equação $x^3 = 6x + 9$.

Resolução:

Fazendo $x = a + b$ e comparando a equação à identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$ tem-se:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ 3ab = 6 \Leftrightarrow ab = 2 \Leftrightarrow a^3b^3 = 8 \end{cases}$$

Fazendo $a^3 = A$ e $b^3 = B$, tem-se:

$$\begin{cases} A + B = 9 \\ A \cdot B = 8 \end{cases} \Rightarrow t^2 \ 9t = 8 \quad 0$$

Resolvendo a equação quadrática equivalente ao sistema:

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 81 - 32 = 49$$

$$t = \frac{\pm\ 9) \quad \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow A = 8 \\ \searrow B = 1 \end{matrix}$$

Assim, $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$. Portanto, $x = 3$ é uma solução real da equação proposta

8 Encontre uma solução real para a equação a seguir:

$$x^3 - 15x - 30 = 0$$

Resolução:

Isolando o termo de 3º grau, obtemos $x^3 = 15x + 30$. Fazendo $x = a + b$ e comparando a equação à identidade $(a + b)^3 \equiv 3ab(a + b) + (a^3 + b^3)$ tem-se:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 30 \\ 3ab = 15 \Leftrightarrow ab = 5 \Leftrightarrow a^3b^3 = 125 \end{cases}$$

Fazendo $a^3 = A$ e $b^3 = B$, tem-se:

$$\begin{cases} A + B = 30 \\ A \cdot B = 125 \end{cases} \Rightarrow t^2 \quad 30t + 125 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática equivalente ao sistema:

$$\Delta = (\quad 30)^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot 125 = 900 \quad 500 = 400$$

$$t = \frac{\pm(\quad 30) \quad \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm 20}{2} \begin{matrix} \nearrow A = 25 \\ \searrow B = 5 \end{matrix}$$

De $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ tem-se que $x = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5}$ é uma solução real da equação proposta.

9 Encontre uma solução real para a equação $x^3 \quad 3x^2 \quad 15x \quad 18 = 0$.

Resolução:

Por tratar se de uma equação completa, deve ser feita a mudança de variável proposta por Cardano:

$$x = y \quad \frac{b}{3a} \Rightarrow \quad x \quad y \quad \frac{(-3)}{3 \cdot 1} \Leftrightarrow x = y + 1$$

Então, fazendo $x = y + 1$:

$$(y+1)^3 \quad 3(y+1)^2 \quad 15(y+1) \quad 18 = 0$$
$$(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) \quad 3(y^2 + 2y + 1) \quad 15(y+1) \quad 18 = 0$$
$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 - 15y - 15 - 18 = 0$$

Cancelando os termos $+3y^2$ e $-3y^2$ e isolando o termo y^3 obtemos $y^3 = 18y + 35$.

Fazendo $y = a + b$ e comparando a equação à identidade $(a+b)^3 \equiv 3ab(a+b) + (a^3 + b^3)$ tem-se:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ 3ab = 18 \Leftrightarrow ab = 6 \Leftrightarrow a^3b^3 = 216 \end{cases}$$

Fazendo $a^3 = A$ e $b^3 = B$, tem-se:

$$\begin{cases} A + B = 35 \\ A \cdot B = 216 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 35t + 216 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática equivalente ao sistema:

$$\Delta = (\ 35)^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot 216 = 1225 \quad 864 = 361$$

$$t = \frac{-(\ 35) \quad \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{35 \pm 19}{2} \begin{matrix} \nearrow A = 27 \\ \searrow B = 8 \end{matrix}$$

Assim, $y = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 3 + 2 = 5$. Substituindo $y = 3$ na atribuição $x = y + 1$, que promoveu a 1ª mudança de variável do problema, obtém-se finalmente uma das soluções da equação original: $x = 5 + 1 = 6$.

Portanto, $x = 6$ é uma solução real da equação proposta.

A necessidade dos números complexos

Coleção Particular
Rafael Bombelli

Muitas equações quadráticas como $x^2 + 1 = 0$, por exemplo, não possuem soluções que sejam números reais, o que não parecia preocupar os matemáticos até o século XVI, quando um matemático italiano publicou uma obra em três volumes intitulada *L'Algebra*, que também discute a resolução de equações de 3º grau Seu nome era Raphael Bombelli: o pai dos números complexos

Na obra, Bombelli discute a resolução da equação $x^3 = 15x + 4$ pelo método de Tartáglia e, comparando-a com a identidade $(a+b)^3 \equiv 3ab(a+b) + (a^3 + b^3)$, faz $x = a + b$ para obter o sistema:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 4 \\ 3ab = 15 \Leftrightarrow ab = 5 \Leftrightarrow a^3b^3 = 125 \end{cases}$$

Com $A = a^3$ e $B = b^3$ temos: $\begin{cases} A + B = 4 \\ AB = 125 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 + 4t \quad 125 \quad 0$

Até aqui tudo parece ocorrer normalmente, a não ser pelo fato de essa equação apresentar um discriminante negativo ($\Delta < 0$): $\Delta = (\ 4)^2 \quad 4 \cdot 1 \cdot 125 = 16 \quad 500 = \quad 484$.

Em casos como esse, a equação do 2º grau que equivale ao sistema não admite solução real. Inicialmente, os matemáticos da época pensaram que, consequentemente, a equação cúbica original também não deveria admitir.

Se Bombelli não tivesse observado que $x = 4$ é uma solução real da equação $x^3 = 15x + 4$, ele provavelmente não teria descoberto os números complexos ($4^3 = 15 \cdot 4 + 4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 64 = 60 + 4$).

Então, sabendo que $x = 4$ era de fato solução da equação $x^3 = 15x + 4$, Bombelli decidiu continuar o processo simplesmente deixando indicada a raiz quadrada do número negativo. Assim:

$$t^2 \quad 4t + 125 = 0 \Rightarrow \Delta = \quad 484$$

$$t = \frac{-(\ 4) \quad \sqrt{\ 484}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-484}}{2}$$

Assim: $x = \sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{\ 484}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 \quad \sqrt{\ 484}}{2}}$.

Convencido de que a expressão aritmética obtida para o valor de x da equação $x^3 = 15x + 4$ de fato representava o número 4, Bombelli tomou algumas liberdades em relação à operação da raiz quadrada, a fim de adequá-la aos radicandos negativos.

$$\sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{-484}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{-484}}{2}} = 4$$

Admitindo que a raiz quadrada fosse uma operação distributiva em relação à multiplicação de números com sinais diferentes, novas regras para a radiciação foram estabelecidas

Fator a	Fator b	Como era	Como ficou
Positivo	Positivo	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
Positivo	Negativo	Indefinido	$\sqrt{a{=}b} \quad \sqrt{a} \quad \sqrt{b}$
Negativo	Positivo	Indefinido	$\sqrt{a{=}b} \quad \sqrt{a} \quad \sqrt{b}$
Negativo	Negativo	$\sqrt{a \cdot b} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a \cdot b} \neq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

! Atenção

Observe que a propriedade distributiva da raiz quadrada sobre o produto de números com mesmo sinal permanece, de modo que distribuir a raiz quadrada no produto de números negativos não é válido. Muitos erros são cometidos no estudo dos números complexos quando, por distração, isso acontece.

Nesse ponto evolutivo da Matemática, a propriedade distributiva da raiz quadrada em relação à multiplicação $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, que só era válida se os fatores *a* e *b* fossem positivos, passou também a ser utilizada nos casos em que apenas um dos fatores é negativo

Então, com seu conceito da radiciação estendido, Bombelli admitiu que:

$$\sqrt{-484} = \sqrt{484 \cdot (-1)} = \sqrt{484} \cdot \sqrt{-1} = 22 \cdot \sqrt{-1}$$

Sendo assim, as soluções da equação $t^2 - 4t + 125 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = -484$, podem ser expressas de forma simplificada:

$$t = \frac{-(\ 4) \quad \sqrt{\ 484}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 22\sqrt{\ 1}}{2} = \frac{2(2 \pm 11\sqrt{\ 1})}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 + 11\sqrt{-1} \\ \searrow 2 \quad 11\sqrt{\ 1} \end{matrix}$$

Nesse momento, Bombelli concebeu os dois primeiros números complexos da História, mas ainda era longo o caminho que esclareceu a igualdade $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 4$.

Saiba mais

Observe que os primeiros números complexos observados que se tem notícia foram concebidos em pares: $2 + 11\sqrt{-1}$ e $2 - 11\sqrt{-1}$.

Como esses pares de números complexos são produzidos pela fórmula quadrática, eles somente diferem no sinal (+) ou ( ) na parte de seus valores que depende da raiz quadrada do número negativo.

Veja outros exemplos:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\ 1 \quad \sqrt{\ 3}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{\ 1 \quad \sqrt{\ 3}}{2}$$

$$x^2 \quad 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{-8}}{2} = 1 + \sqrt{-2} \text{ e } x_2 = \frac{2 \quad \sqrt{\ 8}}{2} = 1 \quad \sqrt{\ 2}$$

$$x^2 - 4x + 7 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4 + \sqrt{-12}}{2} = 2 + \sqrt{-3} \text{ e } x_2 = \frac{4 - \sqrt{-12}}{2} = 2 \quad \sqrt{\ 3}$$

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{0 + \sqrt{\ 36}}{2} = 0 + 3\sqrt{\ 1} \text{ e } x_2 = \frac{0 \quad \sqrt{\ 36}}{2} = 0 \quad 3\sqrt{\ 1}$$

Os números complexos x_1 e x_2 produzidos como soluções de uma mesma equação quadrática, com coeficientes reais, são denominados conjugados um do outro

Assim, o número $\frac{\ 1 \quad \sqrt{\ 3}}{2}$ é o conjugado do número $\frac{\ 1 \quad \sqrt{\ 3}}{2}$ que, por sua vez, também é o conjugado $\frac{\ 1 \quad \sqrt{\ 3}}{2}$.

Além do fato de serem produzidos em pares conjugados, no processo de Tartáglia esses números complexos surgem para que deles sejam extraídas as raízes cúbicas.

O próximo desafio de Rafael Bombelli era encontrar as raízes cúbicas dos números complexos conjugados $2 + 11\sqrt{-1}$ e $2 \quad 11\sqrt{\ 1}$ para provar que a soma de suas raízes cúbicas era igual a 4. Para isso ele admitiu a existência de dois números reais *a* e *b* tais que:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{\ 1}} = a \quad b\sqrt{\ 1}$$
$$\sqrt[3]{2 \quad 11\sqrt{\ 1}} = a \quad b\sqrt{\ 1}$$

Sabendo que a soma das raízes cúbicas dos números complexos encontrados deveria ser igual a 4, Bombelli concluiu que o número real *a* deveria ser igual a 2, logo:

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{\ 1} \quad a \quad b\sqrt{\ 1} &\quad 4 \\ 2a &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Assim, faltava apenas encontrar o número *b* tal que $(2 + b\sqrt{\ 1})^3 \ 2 \quad 11\sqrt{\ 1}$.

Da identidade do cubo da soma, temos que:

$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot b\sqrt{\ 1} \quad 3 \ 2\ (b\sqrt{\ 1})^2 + \ (b\sqrt{\ 1})^3 = 2 + 11\sqrt{\ 1}$$
$$8 \ + \ 12 \cdot b\sqrt{\ 1} \quad 6\ b^2(\sqrt{\ 1})^2 + \ b^3(\sqrt{\ 1})^3 = 2 + 11\sqrt{\ 1}$$

Nesse momento, Bombelli novamente precisou admitir algumas propriedades a respeito desse novo número $\sqrt{-1}$, que mais tarde seria denominado unidade imaginária. Assim, foram estipulados os valores de suas primeiras potências:

$$\begin{cases} \text{Seu quadrado} \rightarrow (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ \text{Seu cubo} \rightarrow (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \end{cases}$$

Atenção

A aceitação da existência das raízes quadradas dos números negativos implicou diretamente na extensão do significado da operação de radiciação dos radicais com índices pares, de modo que as propriedades a seguir também são válidas nas raízes quartas, sextas, oitavas etc.

Em relação ao cancelamento da raiz quadrada com o expoente 2, no conjunto dos números reais ocorre que:

- Se $x \geq 0$ então $(\sqrt{x})^2 = x$.
- Se $x \geq 0$ então $\sqrt{x^2} = x$.
- Se $x < 0$ então $\sqrt{x^2} = -x$.
- Se $x < 0$ então $(\sqrt{x})^2$ não é uma expressão definida.

Mas no universo dos números complexos, sendo *x* um número real positivo, negativo ou nulo, tem-se que:

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $(\sqrt{x})^2 = x$

Essas duas últimas propriedades ditam como proceder com as raízes quadradas de números reais e não devem ser aplicadas quando $x \notin \mathbb{R}$.

Dando continuidade à busca do valor do número real *b*:

$$8 + 12b\sqrt{\ 1} \ 6b^2(\sqrt{\ 1})^2 \quad b^3(\sqrt{\ 1})^3 \quad 2 \quad 11\sqrt{\ 1}$$
$$8 + 12b\sqrt{-1} + 6b^2(-1) + b^3(-\sqrt{-1}) = 2 + 11\sqrt{-1}$$
$$8 + 12b\sqrt{-1} - 6b^2 - b^3\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$
$$(8 - 6b^2) + (12b - b^3)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Bombelli resolveu comparar separadamente as partes que são múltiplas e não são múltiplas do número $\sqrt{\ 1}$.

Da comparação entre as partes não múltiplas:

$$8 \quad 6b^2 = 2 \Leftrightarrow b = \pm 1$$

Com $b = 1$ tem-se a confirmação da igualdade entre as partes múltiplas da unidade imaginária:

$$b = 1 \Rightarrow (12b - b^3)\sqrt{-1} = (12 - 1)\sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$$

Então, com $a = 2$ e $b = 1$, Bombelli verificou que:

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$$

E por um processo análogo concluiu também que:

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Então, finalmente, o matemático italiano conseguiu mostrar que o método de Tartáglia encontrava corretamente a solução real da equação cúbica $x^3 = 15x + 4$, mas que o processo todo passava pela extração da raiz quadrada de um número negativo, bem como a extração das raízes cúbicas de dois números complexos conjugados:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$
$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$
$$x = 4$$

A unidade imaginária

Já no século XVII os números complexos eram bem aceitos e amplamente utilizados pelos matemáticos europeus. Embora não houvesse consenso em relação às interpretações analítica ou geométrica da raiz quadrada de -1, o valor representado por $\sqrt{-1}$ ficava indicado nas resoluções apenas como recurso algébrico, que desapareceria com um posterior cancelamento dos termos $-\sqrt{-1}$ e $+\sqrt{-1}$ na operação de adição. Após o cancelamento era encontrada a solução real de uma equação cúbica.

Somente em 1637 que o matemático e filósofo francês René Descartes referiu-se ao $\sqrt{-1}$ como sendo uma raiz imaginária e, por isso, hoje nos referimos a $\sqrt{-1}$ como sendo a unidade imaginária.

Foi somente no final do século seguinte que o matemático suíço Leonhard Euler sugere o uso do símbolo *i* para representar $\sqrt{-1}$ em uma publicação de 1794. A sugestão foi muito bem aceita por parte dos matemáticos da época. A partir de então as expressões do tipo $\sqrt{-n}$ com $n > 0$, passaram a ser representadas por: $i \cdot \sqrt{n}$ ou $\sqrt{n} \cdot i$.

$$n > 0 \Rightarrow \sqrt{-n} = \sqrt{(-1)\cdot n} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{n} = i\cdot\sqrt{n}$$

Exemplos:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(-1)\cdot 3} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)\cdot 4} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{4} = i\cdot 2 = 2i$$

$$\sqrt{-8} = \sqrt{8\cdot(-1)} = \sqrt{8}\cdot\sqrt{-1} = 2\sqrt{2}\cdot i$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9\cdot(-1)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = 3i$$

$$\sqrt{-16} = 4i$$

$$\sqrt{-25} = 5i$$

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos

Multiplicando a unidade imaginária por algum número real diferente de zero, obtém-se um número denominado imaginário puro. Os números a seguir são exemplos de imaginários puros:

$$i\cdot\sqrt{3} \qquad 2i \qquad 2\sqrt{2}\,i \qquad 3i \qquad 0{,}4i \qquad \frac{5}{6}i$$

O conjunto dos números imaginários puros será indicado por $i \cdot \mathbb{R}^*$.

Somando um número imaginário puro com um número real, obtém-se sempre um número complexo e, além disso, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais está contido no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Saiba mais

Quando dois conjuntos numéricos A e B são tais que $A \subset B$, o conjunto B herda todas as propriedades aritméticas válidas do conjunto A, além de apresentar novas propriedades a respeito de seus elementos, desde que elas não entrem em contradição com alguma propriedade herdada.

O fato de $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, por exemplo, garante que todas as propriedades aritméticas válidas em $\mathbb{N}$ também devem ser válidas em $\mathbb{Z}$ que, por sua vez, possui propriedades inconcebíveis em $\mathbb{N}$, como a regra de sinais para o produto de suas unidades positiva (+1) e negativa (–1). Assim:

$$(+1)\cdot(+1) = +1$$
$$(-1)\cdot(+1) = -1$$
$$(+1)\cdot(-1) = -1$$
$$(-1)\cdot(-1) = +1$$

Da mesma forma, como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos herda a regra de sinais válida no conjunto $\mathbb{R}$, mas apresenta algumas regras a mais, para suas unidades imaginárias positiva (+i) e negativa (–i). Assim:

$$(+1)\cdot(+i) = +i$$
$$(-1)\cdot(+i) = -i$$
$$(+1)\cdot(-i) = -i$$
$$(-1)\cdot(-i) = +i$$
$$(+i)\cdot(+i) = +i^2 = -1$$
$$(-i)\cdot(+i) = -i^2 = +1$$
$$(+i)\cdot(-i) = -i^2 = +1$$
$$(-i)\cdot(-i) = +i^2 = -1$$

Para construir um número complexo, basta que sejam escolhidos dois números reais, multiplicar um deles pela unidade imaginária e somar o outro número ao resultado. Os números reais escolhidos podem ser iguais ou diferentes, nulos ou não nulos.

Todo par ordenado de números reais (a, b) define um número complexo z no que chamamos de forma algébrica pela expressão:

$$z = a + bi$$

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos pode ser definido, a partir da forma algébrica de seus elementos:

$$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = \quad 1\}$$

Essa definição obedece a seguinte nomenclatura:
Parte real de z: Re(z) = a
Parte imaginária de z: Im(z) = b
Unidade imaginária: $i = \sqrt{-1}$
Um número complexo z também pode ser representado de forma algébrica por:

$$z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$$

! Atenção

Embora a unidade imaginária não pertença ao conjunto dos números reais ($i \notin \mathbb{R}$), a parte imaginária de um número complexo é de fato um número real

As partes reais e imaginárias de um número complexo podem ser interpretadas como sendo as respectivas quantidades de unidades reais (1) e imaginárias (i). Assim, no número complexo 3 + 4i, por exemplo, o número 3 indica a quantidade de unidades reais e o número 4 indica a quantidade de unidades imaginárias

$$z = 3 + 4i = 3 \cdot (1) + 4 \cdot (i) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = 3 \\ \text{Im}(z) = 4 \end{cases}$$

Conjugado de um número complexo

Bombelli percebeu a existência dos números complexos encontrando-os aos pares De acordo com a história da Matemática, os dois primeiros números complexos encontrados foram:

$$z_1 = 2 + 11i$$
$$z_2 = 2 \quad 11i$$

Estes números, z_1 e z_2, possuem a mesma parte real:

$$\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) = 2$$

Mas suas partes imaginárias têm sinais opostos:

$$\text{Im}(z_1) = +11$$
$$\text{Im}(z_2) = \quad 11$$

Tais características decorrem do fato de esses números surgirem como soluções de uma mesma equação quadrática, com discriminante negativo ($\Delta < 0$).

Logo depois de encontrados os números complexos conjugados z_1 e z_2, foi necessário encontrar também suas raízes cúbicas:

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$$
$$\sqrt[3]{2 \quad =11i} \quad 2 \quad i$$

Observe que os números encontrados também mantêm as mesmas características:

$$\text{Re}(2 + i) = \text{Re}(2 - i) = 2$$
$$\text{Im}(2 + i) = +1$$
$$\text{Im}(2 - i) = -1$$

Dois números complexos com essas características são classificados como conjugados um do outro. Assim, sendo z um número complexo, indica-se por $\bar{z}$ o seu conjugado e, dessa forma, tem-se que:

$$\begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z}) \\ \text{Im}(z) + \text{Im}(\bar{z}) = 0 \end{cases}$$

O conjugado de um número complexo é uma operação dual:

$$z = \bar{w} \Leftrightarrow w = \bar{z}$$
$$\bar{\bar{z}} = z$$

Sendo assim, é correto dizer, por exemplo, que:

- o conjugado de 2 + 11i é 2 – 11i $\rightarrow \overline{2 + 11i} = 2 - 11i$
- o conjugado de 2 – 11i é 2 + 11i $\rightarrow \overline{2 - 11i} = 2 + 11i$

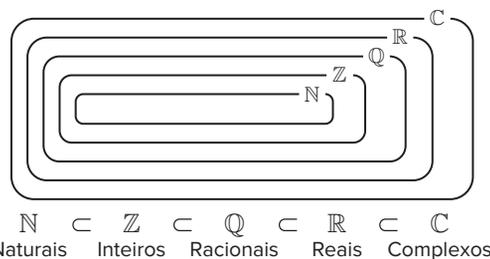
De forma genérica, sendo *a* e *b* dois números reais quaisquer:

$$z = a + b \cdot i \Leftrightarrow \bar{z} = a \quad b \cdot i$$

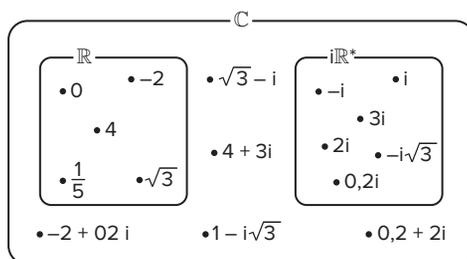
Particularmente, o conjugado de um número real é ele mesmo, pois com partes imaginárias nulas, tem se: $a + 0 \cdot i = a - 0 \cdot i$, para todo a real. Exemplo:

$$\bar{6} = \overline{6 + 0i} = 6 - 0i = 6$$

Relações de inclusão

Com o advento do conjunto dos números complexos, a relação de inclusão entre todos os conjuntos numéricos estudados até aqui fica representada no seguinte diagrama:

Subconjuntos de $\mathbb{C}$

Dois importantes subconjuntos de $\mathbb{C}$ merecem destaque em relação aos demais. São eles:

- O conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$
- O conjunto dos números imaginários puros: $i \cdot \mathbb{R}^*$

Assim, sendo *a* e *b* os números reais que definem o complexo z = a + bi, tem-se que z é um número real se, e somente se, sua parte imaginária for nula.

$$a + bi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$$

Também, tem-se que z é imaginário puro se, e somente se, sua parte real for nula, mas sua parte imaginária não:

$$a + bi \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b \neq 0$$

Exercício resolvido

10 Sendo *m* um número real e $z = (m^2 \quad 9) + (m^2 \quad 3m)i$ um número complexo, determine *m* tal que:

a) *z* seja um número real;

b) *z* seja um número imaginário puro.

Resolução:

As partes reais e imaginárias do número complexo z são:

$Re(z) = m^2 - 9$

$Im(z) = m^2 - 3m$

a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 3$.

b) $z \in i\ \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = 0 \\ Im(z) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} m^2 \quad 9 = 0 \Leftrightarrow m = \quad 3 \text{ ou } m \quad 3 \\ m^2 \quad 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ e } m \quad 3 \end{cases}$

Portanto, $m = -3$.

Igualdade em $\mathbb{C}$

Os números complexos *z* e *w* são iguais se, e somente se, tiverem as mesmas partes reais e imaginárias.

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(w) \\ Im(z) = Im(w) \end{cases}$$

Quando expressos em formas algébricas, tem-se que:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Exercício resolvido

11 Sendo *x* e *y* números reais, para que os números complexos $x + (y + 1)i$ e $(2x + y) + xi$ sejam iguais é necessário que:

A $x \cdot y = \frac{1}{4}$

B $x \cdot y = \quad \frac{1}{4}$

C $x \cdot y = \frac{1}{2}$

D $x \cdot y = \quad \frac{1}{2}$

E $x \cdot y = -1$

Resolução:

Se $x + (y + 1)i = (2x + y) + xi$ então:

- das partes reais, tem-se que: $x = 2x + y \Leftrightarrow x = -y$;
- das partes imaginárias, que: $y + 1 = x$.

Assim: $y + 1 = -y \Leftrightarrow 2y = -1$.

Portanto, $y = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Daí: $x \cdot y = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Alternativa: **B**

Operações básicas na forma algébrica

Um número complexo fica representado em sua forma algébrica quando se deixam explicitas suas partes real e imaginária.

$$z = Re(z) + Im(z) \cdot i$$

Quando as partes real e imaginária, de um mesmo número complexo, forem frações de mesmo denominador, o número também pode ser representado como uma única fração

O número complexo $z = \frac{2 + i}{5}$, por exemplo, é tal que:

$$\begin{cases} Re(z) = \frac{2}{5} \\ Im(z) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Mesmo assim, recomenda se escrever a forma algébrica separando as frações, $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$, ou ainda utilizando números decimais, $z = 0{,}4 + 0{,}2 \cdot i$.

Adição e subtração em $\mathbb{C}$

Para encontrar a soma de dois ou mais números complexos basta efetuar separadamente a adição das partes reais e a adição das partes imaginárias dos números complexos, de modo que, sendo z e w dois números complexos:

A parte real de z + w é a soma das partes reais de z e w:

$$Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$$

A parte imaginária de z + w é a soma das partes imaginárias de z e w:

$$Im(z + w) = Im(z) + Im(w)$$

Assim, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números reais tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

Da mesma maneira que na adição, encontra-se a diferença entre dois números complexos z e w subtraindo separadamente suas partes reais e imaginárias.

$$Re(z \quad w) = Re(z) \quad Re(w)$$

$$Im(z \quad w) = Im(z) \quad Im(w)$$

Assim, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números reais tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se:

$$z \quad w = (a + bi) \quad (c + di) = a \quad c + bi \quad di = (a \quad c) + (b \quad d)i$$

FRENTE 2

Exercício resolvido

12 Sendo $z = 5 + 7i$ e $w = 2 + i$, assinale a alternativa que apresenta o número complexo com a maior parte imaginária.

A $z + w$
B $z - w$
C $w - z$
D $2w$
E $2z - 5w$

Resolução:

$A \rightarrow z + w = (5 + 7i) + (2 + i) = 5 + 2 + 7i + i = 7 + 8i$

$B \rightarrow z - w = (5 + 7i) - (2 + i) = 5 - 2 + 7i - i = 3 + 6i$

$C \rightarrow w - z = (2 + i) - (5 + 7i) = 2 - 5 + i - 7i = -3 - 6i$

$D \rightarrow 2w = w + w = (2 + i) + (2 + i) = 4 + 2i$

$E \rightarrow 2z \quad 5w = 2 \cdot (5 + 7i) \quad 5 \cdot (2 + i) = 10 \quad 10 + 14i \quad 5i = 9i$

Alternativa: **E**

Tanto a adição quanto a subtração submetem-se à propriedade distributiva da conjugação de números complexos: $z \rightarrow \overline{z}$.

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$
$$\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

Exercícios resolvidos

13 Sendo $z = 2 \quad 3i$ e $w = -1 + 2i$, calcule:

a) $\overline{z} + \overline{w}$
b) $\overline{z + w}$
c) $\overline{z} + w$
d) $z + \overline{w}$
e) $\overline{z + \overline{w}}$

Resolução:

a) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{(2 \quad 3i)} + \overline{(-1 + 2i)} = 2 + 3i \quad 1 \quad 2i = 1 + i$

b) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{(2 \quad 3i) + (\quad 1 + 2i)} = \overline{2 \quad 3i \quad 1 + 2i} = \overline{1 \quad i} = 1 + i$

c) $\overline{z} + w = \overline{(2 \quad 3i)} + (\quad 1 + 2i) = 2 + 3i \quad 1 + 2i = 1 + 5i$

d) $z + \overline{w} = (2 \quad 3i) + \overline{(\quad 1 + 2i)} = 2 \quad 3i \quad 1 \quad 2i = 1 - 5i$

e) $\overline{z + \overline{w}} = \overline{z} + \overline{\overline{w}} = \overline{z} + w = \overline{(2 - 3i)} + (-1 + 2i) = 2 + 3i - 1 + 2i = 1 + 5i$

14 Da igualdade $2z \quad \overline{z} = 2 + 6i$, podemos afirmar que o número complexo $z = a + bi$ é

A $2 + 6i$
B $\quad 2 + 2i$
C $2 + 2i$
D $2 + 3i$

Resolução:

Fazendo $z = a + bi$, com *a* e *b* reais, tem-se $\overline{z} = a \quad bi$.

Assim, a equação fica:

$$2(a + bi) \quad (a \quad bi) = 2 + 6i$$
$$2a + 2bi - a + bi = 2 + 6i$$
$$a + 3bi = 2 + 6i$$

Comparando as partes reais temos que $a = 2$. Comparando as partes imaginárias temos: $3b = 6 \Leftrightarrow b = 2$.

Portanto, $z = 2 + 2i$.

Alternativa: **C**

Particularmente, a soma e a diferença entre um número complexo z e seu conjugado $\overline{z}$ dependem apenas de uma de suas partes.

$z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z) \Leftrightarrow (a + bi) + (a \quad bi) = a + a + bi \quad bi = 2a + 0i = 2a$

$z \quad \overline{z} = 2 \cdot Im(z) \cdot i \Leftrightarrow (a + bi) \quad (a \quad bi) = a \quad a + bi + bi = 0 + 2bi = 2bi$

Multiplicação em ℂ

Efetua-se o produto de dois números complexos na forma algébrica obedecendo à propriedade distributiva da multiplicação. Para não cometer erros é necessário observar que:

O produto de ...	é sempre um ...	Exemplo:
... dois números reais	... número real.	$2 \cdot 3 = 6$
um número real por um imaginário puro	... imaginário puro.	$2 \cdot 3i = 6i$
... dois números imaginários puros	... número real.	$2i \cdot 3i = -6$

Assim, sendo *a*, *b*, *c* e *d* números reais tais que $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se que:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di)$$
$$z \cdot w = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$z \cdot w = ac + (ad + cb)i + bd \cdot (-1)$$
$$z \cdot w = (ac \quad bd) + (ad + bc)i$$

Com $z = 1 + 4i$ e $w = 3 - 2i$, por exemplo, tem-se o produto $z \cdot w = 11 + 10i$. Veja a seguir cada passo desse produto:

$$z \cdot w = (1 + 4i)(3 \quad 2i)$$
$$z \cdot w = \underbrace{3 \quad 2i + 12i}\quad 8i^2$$
$$z \cdot w = 3 + 10i \quad 8 \cdot (\quad 1)$$
$$z \cdot w = 3 + 10i + 8$$
$$z \cdot w = 11 + 10i$$

Exercício resolvido

15 Sendo $x = 2 + 3i$, $y = 4 \quad 5i$ e $z = -1 + i$, assinale a alternativa com a operação cujo resultado é um número imaginário puro

A $x \quad z$
B $y \cdot z$
C $x \cdot y$
D x^2
E z^2

Resolução:

A $\rightarrow x \cdot z = (2 + 3i)(-1 + i) = -2 + 2i - 3i + 3i^2 = -2 - i - 3 = -5 - i$

B $\rightarrow y \cdot z = (4 \quad 5i)(\quad 1 + i) = \quad 4 + 4i + 5i \quad 5i^2 = \quad 4 + 9i + 5 = 1 + 9i$

C $\rightarrow x \cdot y = (2 + 3i)(4 \quad 5i) = 8 \quad 10i + 12i \quad 15i^2 = 8 + 2i + 15 = 23 + 2i$

D $\rightarrow$ Usando a propriedade distributiva: $x^2 = x \cdot x = (2 + 3i)(2 + 3i) = 4 + 6i + 6i + 9i^2 = 4 + 12i \quad 9 = -5 + 12i$

Usando a identidade do quadrado da soma: $x^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i \quad 9 = \quad 5 + 12i$

E $\rightarrow$ Usando a identidade do quadrado da diferença: $z^2 = (-1 + i)^2 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Alternativa: **E**

A multiplicação também se submete à propriedade distributiva da conjugação de números complexos.

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Exercício resolvido

16 Sendo $z = 2 - 3i$ e $w = -1 + 2i$, calcule:

a) $\overline{z} \cdot \overline{w}$ **b)** $\overline{z \cdot w}$ **c)** $\overline{z} \cdot w$ **d)** $z \cdot \overline{w}$ **e)** $\overline{\overline{z} \cdot w}$ **f)** $z \cdot \overline{z}$ **g)** $w \cdot \overline{w}$

Resolução:

a) $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{(2 - 3i)} \cdot \overline{(-1 + 2i)} = (2 + 3i) \cdot (-1 - 2i) = -2 - 4i - 3i - 6i^2 = -2 - 7i + 6 = 4 - 7i$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{(2 \quad 3i) \cdot (\quad 1 + 2i)} = \overline{\quad 2 + 4i + 3i \quad 6i^2} = \overline{\quad 2 + 7i + 6} = \overline{4 + 7i} = 4 \quad 7i$

c) $\overline{z} \cdot w = \overline{(2 \quad 3i)} \cdot (-1 + 2i) = (2 + 3i) \cdot (-1 + 2i) = \quad 2 + 4i \quad 3i + 6i^2 = \quad 2 + i \quad 6 = -8 + i$

d) $z \cdot \overline{w} = (2 - 3i) \cdot \overline{(-1 + 2i)} = (2 - 3i) \cdot (-1 - 2i) = -2 - 4i + 3i + 6i^2 = -2 - i - 6 = -8 - i$

e) $\overline{\overline{z} \cdot w} = \overline{\overline{z}} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{w} = \quad 8 + i$

f) $z \cdot \overline{z} = (2 \quad 3i) \cdot \overline{(2 \quad 3i)} = (2 \quad 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 + 6i \quad 6i \quad 9i^2 = 4 + 9 = 13$

g) $w \cdot \overline{w} = (-1 + 2i) \cdot \overline{(-1 + 2i)} = (-1 + 2i) \cdot (-1 - 2i) = 1 + 2i - 2i - 4i^2 = 1 + 4 = 5$

Particularmente, o produto de um número complexo pelo seu conjugado resulta em um número real, que coincide com a soma dos quadrados de suas partes real e imaginária.

$$z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$$

Demonstração:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a \quad bi) \quad a^2 + \underbrace{abi \quad abi}_{\text{zero}} \quad b^2 i^2 = \quad a^2 + \quad b^2 \ (\quad 1) \quad a^2 \quad b^2$$

Exercício resolvido

17 Sendo *z* o número complexo que satisfaz à equação $2z + 3\overline{z} = 10 + 4i$, então $z \cdot \overline{z}$ é igual a:

A 5 **B** 10 **C** 20 **D** 40 **E** 80

Resolução:

Sendo $z = a + bi$, com *a* e *b* reais, temos que:

$$2(a + bi) + 3(a - bi) = 10 + 4i$$
$$2a + 2bi + 3a - 3bi = 10 + 4i$$
$$5a - bi = 10 + 4i$$

Comparando as partes reais: $5a = 10 \Leftrightarrow a = 2$.

Comparando as partes imaginárias: $-b = 4 \Leftrightarrow b = -4$.

Assim, temos que $z = 2 - 4i \Rightarrow \overline{z} = 2 + 4i$.

Portanto: $z \cdot \overline{z} = (2 - 4i)(2 + 4i) = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$.

Alternativa: **C**

FRENTE 2

Quociente em $\mathbb{C}$

O processo algébrico usado para encontrar o quociente entre dois números complexos parte do fato de que o símbolo *i* representa uma raiz quadrada

$$i = \sqrt{-1}$$

Por isso, a divisão de números complexos em suas formas algébricas é similar ao processo da racionalização de denominadores em expressões do tipo $\frac{a+bi}{c+di}$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais.

Assim, multiplicam-se numerador e denominador da expressão pelo conjugado do denominador:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$

Como o produto de números complexos conjugados resulta em um número real, o denominador da fração pode ser distribuído pelas partes real e imaginária do resultado obtido no numerador da fração.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{ac+bci-adi-bd\,i^2}{c^2-cdi+cdi-d^2\,i^2} = \frac{ac+(bc-ad)i-bd\cdot(-1)}{c^2-d^2\cdot(-1)} =$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Sendo $z = 11 + 10i$ e $w = 3 - 2i$, por exemplo, o quociente $\frac{z}{w}$ é obtido multiplicando-se ambos esses números pelo conjugado do denominador: $\overline{w} = 3 + 2i$. Assim:

$$\frac{z}{w} = \frac{11+10i}{3-2i} = \frac{(11+10i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{33+22i+30i+20i^2}{9+6i-6i-4i^2} = \frac{33+52i-20}{9+4} = \frac{13+52i}{13} = \frac{13}{13} + \frac{52i}{13} = 1+4i$$

Exercícios resolvidos

18 Sendo $z = 3 + 4i$ e $w = 1 + 2i$, calcule:

a) $\frac{z}{w}$

b) $\frac{w}{z}$

c) $\frac{1}{z}$

d) $\frac{1}{w}$

Resolução:

a) $\frac{z}{w} = \frac{3+4i}{1+2i} = \frac{(3+4i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{3-6i+4i-8i^2}{1^2+2^2} = \frac{3-2i+8}{1+4} = \frac{11-2i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$

b) $\frac{w}{z} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i+6i-8i^2}{3^2+4^2} = \frac{3+2i+8}{9+16} = \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$

c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{1\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

d) $\frac{1}{w} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

19 Se $y = 3x$, sendo $x = \frac{1+i}{1-i}$ e $i = \sqrt{-1}$, o valor de $(2x + y)^2$ é:

A 25i

B $-5 + i$

C -25

D 25

E $5 - i$

Resolução:

$$x = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

Portanto, temos que $y = 3i$ e $(2x + y)^2 = (2i + 3i)^2 = (5i)^2 = 5^2 \cdot i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$

Alternativa: **C**

20 **Fuvest** Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{\alpha+2i}$ é zero, então α é

A −4
B −2
C 1
D 2
E 4

Resolução:

$$\frac{2+i}{\alpha+2i}=\frac{(2+i)\cdot(\alpha\quad 2i)}{(\alpha+2i)\cdot(\alpha-2i)}=\frac{2\alpha\quad 4i\alpha\quad i\quad 2i^2}{\alpha^2+2^2}=\frac{2\alpha+(\quad 4\alpha\quad)i\quad 2}{\alpha^2+2^2}=\frac{2\alpha+2}{\alpha^2+4}+\frac{\alpha\quad 4}{\alpha^2+4}i$$

Como Im(z) = 0, temos que: $\frac{\alpha\quad 4}{\alpha^2+4}=0 \Leftrightarrow \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = \quad 4$

Alternativa: **E**

21 Sendo *i* a unidade imaginária e *x* um número real, determine os valores de *x* para os quais o número complexo $\frac{x+4i}{1+xi}$ é:

a) imaginário puro.
b) real

Resolução:

Sendo $z=\frac{x+4i}{1+xi}$, temos:

$$z=\frac{x+4i}{1+xi}=\frac{(x+4i)\cdot(1\quad xi)}{(1+xi)\cdot(1\quad xi)}=\frac{x-x^2i+4i-4xi^2}{1^2+x^2}=\frac{x+(\quad x^2\quad 4)i\quad 4x}{1+x^2}=\frac{5x+(4\quad x^2)i}{1+x^2}\Rightarrow\begin{cases}Re(z)=\frac{5x}{1+x^2}\\ Im(z)=\frac{4\quad x^2}{1+x^2}\end{cases}$$

a) Se *z* é imaginário puro, então Re(z) = 0 e Im(z) ≠ 0. De Re(z) = 0, tem-se $\frac{x}{1+x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$ e, como para x = 0 tem-se Im(z) = 4 ≠ 0, o número complexo z = 4i é imaginário puro.

b) Se *z* é real, então Im(z) = 0. Assim: $\frac{4\quad x^2}{1+x^2}=0 \Leftrightarrow 4 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

! Atenção

O conjunto dos números inteiros possui duas unidades distintas:

- a unidade positiva: +1
- a unidade negativa: 1.

As unidades inteiras são números opostos, ou seja, sua soma é nula: (+1) + (1) = 0

Além disso, os números (+1) e (–1) são os únicos que coincidem com seus inversos multiplicativos:

$$\frac{1}{1}=1 \quad e \quad \frac{1}{1}= \quad 1$$

Já a unidade imaginária tem uma característica diferente e peculiar, que é o fato de seu inverso multiplicativo coincidir com o seu oposto, ou seja, $\frac{1}{i}= \quad i$.

Exercício resolvido

22 **Uece 2015** Se os números complexos z e w estão relacionados pela equação z + wi = i e se $z=1-\frac{1}{i}$, então, w é igual a

A i
B 1 i
C i
D 1 + i

Resolução:

Como o conjugado do número i é o número i: $z=1\quad\frac{1}{i}=1\quad\frac{1\cdot(\quad i)}{i\cdot(\quad i)}=1\quad\frac{-i}{1}=1+i.$

Assim: $z+wi=i \Rightarrow 1+i+wi=i \Leftrightarrow wi= \quad 1 \Leftrightarrow w=\frac{1}{i}=\frac{-1\cdot(\quad i)}{i\cdot(\quad i)}=\frac{i}{1}=i.$

Alternativa: **A**

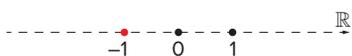
FRENTE 2

Representações geométricas dos números complexos

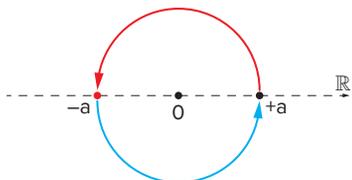
Desde a antiguidade que os números são usados para avaliar comprimentos, mas foram as idéias de René Descartes que nos levaram a usar os pontos de uma reta como representantes dos números reais, no modelo chamado de eixo real.

Tal modelo consiste na escolha de dois pontos distintos de uma mesma reta, atribuindo o valor 0 (zero) a um dos pontos e o valor 1 (um) ao outro ponto. O ponto associado ao zero passa a ser chamado de origem do eixo.

Feito isso, cada um dos demais pontos da reta fica imediatamente associado a um único número real e vice-versa.

O ponto do eixo real associado à unidade negativa (1) fica localizado de modo que a origem (0) seja o ponto médio do segmento determinado pelas duas unidades (+1) e (–1).

A origem do eixo real divide-o em 2 semirretas: uma com todos os pontos associados aos números reais positivos, e a outra com os pontos associados aos números negativos.

Rotações em torno da origem

Da forma como foi proposto, o eixo permite observar a relação entre dois números reais opostos (+a) e (–a) como se cada um deles fosse o resultado da rotação de 180° do outro, em torno da origem.

Assim, interpreta-se que a multiplicação de um número real pela unidade negativa (–1) promove uma rotação de 180° desse número em torno da origem.

(1) · (+a) = a
(1) · (–a) = +a

A equivalência entre a multiplicação pela unidade ne gativa e a rotação de 180° em torno da origem do eixo real é algebricamente expressa com o auxílio da sigla “cis”, que tem origem no estudo das funções trigonométricas seno e cosseno Assim:

$$-1 = \text{cis}(180^\circ)$$

Observe que:

I Multiplicar um número real *r* por (–1) duas vezes suces sivas equivale a multiplicá lo por (+1)

II Tomar uma figura geométrica e efetuar duas rotações sucessivas de 180° dela em torno de um mesmo pon to O equivale a efetuar uma única rotação de 360° da figura em torno de O

III Multiplicar um número por +1 não altera o valor desse número, bem como tomar uma figura e efetuar rotações de 360° não altera a posição da figura.

Assim, também se interpreta a multiplicação de um número real pela unidade positiva (+1) como uma rotação de 360° desse número em torno da origem.

Em termos algébricos, essas observações ficam expressas por:

I (1) · (–1) = +1

II. cis(180°) + cis(180°) = cis(360°)

III. 1 = cis(360°)

Essas novas notações rotacionais para os números também podem ser expressas em radianos:

$$-1 = \text{cis}(\pi)$$
$$+1 = \text{cis}(2\pi)$$

Seguindo esse padrão, a multiplicação pela unidade imaginária também possui uma interpretação rotacional. Observe que:

I Multiplicar pela unidade imaginária (i) duas vezes sucessivas equivale a multiplicar por (–1).

II. Efetuar duas rotações sucessivas de 90° equivale a efetuar uma única rotação de 180°.

Em termos algébricos, estas observações ficam expressas por:

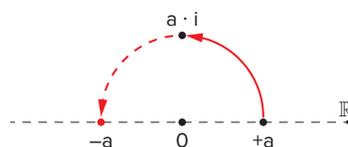
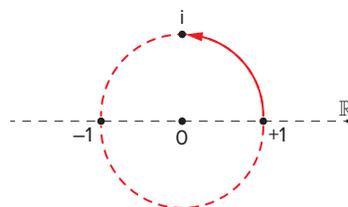
I. (i) · (i) = 1

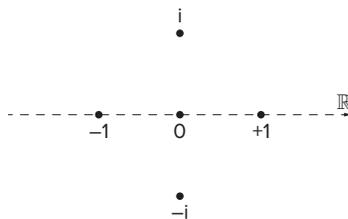
II. cis(90°) + cis(90°) = cis(180°)

Conclui-se então que a multiplicação de um número qualquer pela unidade imaginária deva promover uma rotação de 90° do ponto que representa esse número em torno da origem do eixo real.

$$i = \text{cis}(90^\circ)$$

Rotações de 180° e 360° geram o mesmo resultado, sejam elas no sentido horário ou anti horário, mas as rotações de 90° não. Adota-se então que as rotações indicadas pela sigla cis são sempre feitas nos mesmos sentidos adotados no estudo do ciclo trigonométrico, ou seja:

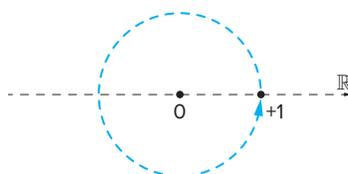
- anti-horário para arcos positivos;
- horário para arcos negativos.

Por isso, representa-se a unidade imaginária por um ponto localizado logo acima da origem de um eixo real horizontal.

Os pontos onde se localizam as unidades (+1), (−1) e (i) estão todos a uma mesma distância da origem do eixo real

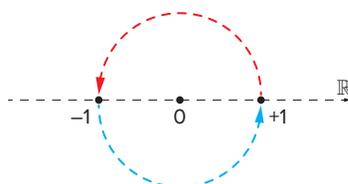
O ponto associado à unidade imaginária negativa (−i) fica localizado de modo que a origem (0) seja o ponto médio do segmento determinado pelas duas unidades imaginárias (+i) e (−i)

Ciclos de potências da unidade imaginária

Tanto as unidades inteiras, positiva e negativa, quanto a unidade imaginária possuem potências de expoente inteiros que formam ciclos periódicos

(Base)^{Exp}	...	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
(+1)		+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
(−1)		+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	
(i)		1	i	+1	+i	1	i	+1	+i	1	i	+1	+i	1	i	

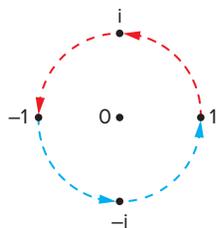
Usando as interpretações rotacionais das multiplicações pelas unidades (+1), (−1) e (+i) é possível perceber de maneira visual cada ciclo da tabela.

Como cada multiplicação por (+1) equivale a uma rotação de 360° em torno da origem, o ciclo de potências da unidade positiva (+1) tem período de um termo:

$(+1)^n = +1$ para todo número inteiro n.

Como cada multiplicação por (−1) equivale a uma rotação de 180° em torno da origem, o ciclo de potências da unidade negativa (−1) tem período de dois termos:

$$\begin{cases} (-1)^n = +1, \text{ se } n \text{ é um número par.} \\ (-1)^n = -1, \text{ se } n \text{ é um número ímpar.} \end{cases}$$

Como cada multiplicação por (+i) equivale a uma rotação de 90° em torno da origem, o ciclo de potências da unidade imaginária (i) tem período de quatro termos:

$$\begin{cases} (i)^n = +1, \text{ se } n \text{ é um múltiplo de 4.} \\ (i)^n = +i, \text{ se } n \text{ deixa resto 1 quando dividido por 4.} \\ (i)^n = \ \ 1, \text{ se } n \text{ deixa resto 2 quando dividido por 4} \\ (i)^n = -i, \text{ se } n \text{ deixa resto 3 quando dividido por 4} \end{cases}$$

FRENTE 2

Assim, sendo r o resto da divisão de um número inteiro n pelo número 4, tem-se que:

$$(i)^n = (i)^r$$

Exercícios resolvidos

23 O valor da soma $S = i + i^2 + i^3 + i^4 + \quad + i^{10}$ é igual a

A $1 + i$
B $-1 + i$
C $1 - i$
D $-1 - i$
E 0

Resolução:

$i^1 = i$ $\qquad i^5 = i^1 = i$ $\qquad i^9 = i^1 = i$
$i^2 = \quad 1$ $\qquad i^6 = i^2 = \quad 1$ $\qquad i^{10} = i^2 = \quad 1$
$i^3 = \quad i$ $\qquad i^7 = i^3 = \quad i$
$i^{40} = 1$ $\qquad i^8 = i^4 = 1$

Somando todas essas igualdades, obtém-se:
$S = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 = -1 + i$
Alternativa: **B**

24 Sendo i a unidade imaginária, calcule o valor da ex pressão $E = i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}$

A 0
B 1
C –1
D i
E – i

Resolução:

Dividindo 2011 por 4 obtém-se resto 3, portanto, $i^{2011} = i^3 = -i$

Dividindo 2012 por 4 obtém-se resto 0, portanto, $i^{2012} = i^0 = 1$.

Dividindo 2013 por 4 obtém-se resto 1, portanto, $i^{2013} = i^1 = i$.

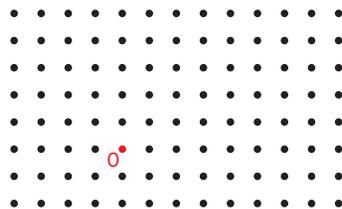
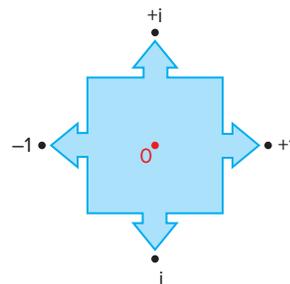
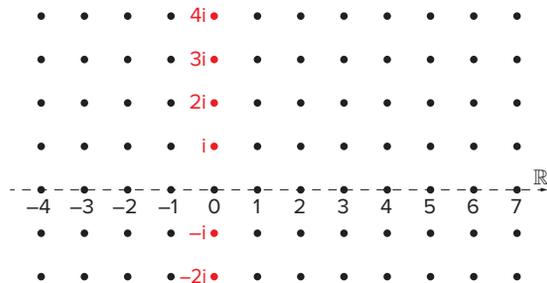
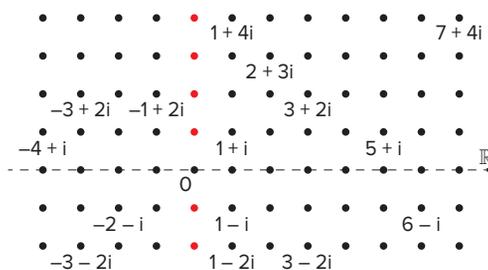
Logo: $E = \quad i^{2011} + i^{2012} + i^{2013} = \quad i + 1 + i = 1$

Alternativa: **B**

Números inteiros de Gauss

No início do século XIX, o astrônomo e matemático alemão Carl Friedrich Gauss publicou alguns artigos a respeito dos números complexos, em que tanto a parte real quanto a parte imaginária eram números inteiros.

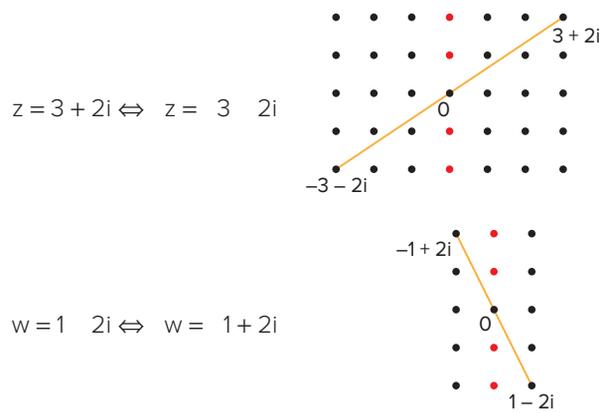
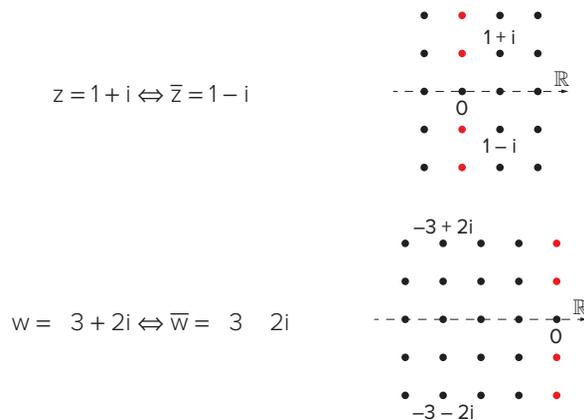
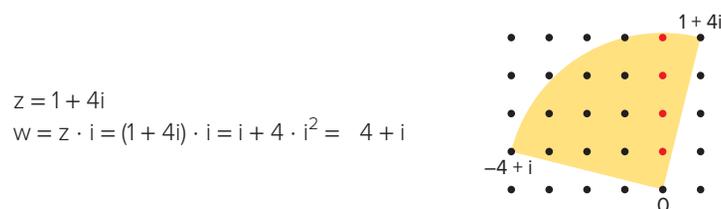
$$\{z = a + b \cdot i \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } i^2 = \quad 1\}$$

Conhecidos hoje como números inteiros de Gauss, esses números podem ser representados geometricamente em uma malha de pontos coplanares alinhados horizontalmente e verticalmente, como vértices de quadrados congruentes e adjacentes:

Uma vez escolhido o ponto da malha que irá representar o número zero, os quatro pontos indicados ficam representando os números:

Dessa forma, os demais números inteiros ficam alinhados sobre um eixo real horizontal e os demais imaginários puros, com parte imaginária inteira, ficam alinhados verticalmente acima e abaixo da origem.

Os pontos da malha, localizados fora das linhas horizontal e vertical que passam pela origem, representam os demais números inteiros de Gauss, ou seja, os complexos $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $i = \sqrt{\quad 1}$ e $a \cdot b \neq 0$ Veja alguns exemplos:

Posições relativas

Diversas propriedades geométricas dos números complexos podem ser observadas nos pontos em destaque na figura anterior.

Números complexos opostos ocupam posições simétricas em relação à origem da malha Exemplos:

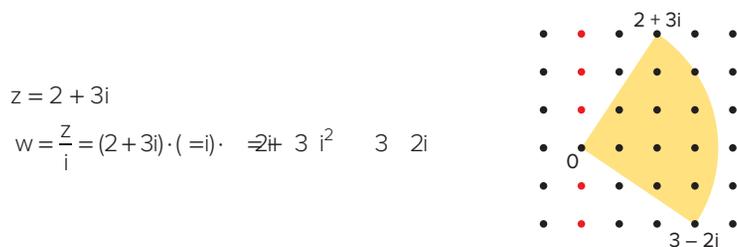
$z = 3 + 2i \Leftrightarrow \quad z = \quad 3 \quad 2i$

$w = 1 \quad 2i \Leftrightarrow \quad w = \quad 1 + 2i$

Números complexos conjugados ocupam posições simétricas em relação ao eixo dos números reais. Exemplos:

Multiplicar um número complexo z pela unidade imaginária (i) equivale a efetuar uma rotação de 90° no sentido anti--horário em torno da origem. Exemplo:

$z = 1 + 4i$

$w = z \cdot i = (1 + 4i) \cdot i = i + 4 \cdot i^2 = \quad 4 + i$

Dividir um número complexo z pela unidade imaginária (i) equivale a efetuar uma rotação de 90° no sentido horário em torno da origem. Exemplo:

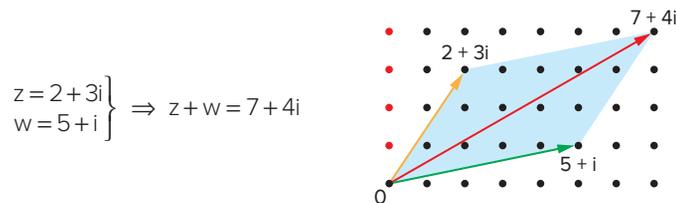
$z = 2 + 3i$

$w = \frac{z}{i} = (2 + 3i) \cdot (=i) \cdot \quad =2i+ \; 3 \; i^2 \quad 3 \quad 2i$

Atenção

Dividir um número complexo z pela unidade imaginária é o mesmo que multiplicar z pelo oposto da unidade imaginária.

$$\frac{z}{i} = z \cdot (-i)$$

Se os números complexos z e w forem associados a dois vetores partindo da origem do sistema, percebe-se que a soma z + w obedece a regra do paralelogramo para a soma vetorial Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} z = 2 + 3i \\ w = 5 + i \end{array}\right\} \Rightarrow z + w = 7 + 4i$$

O plano de Wessel Argand-Gauss

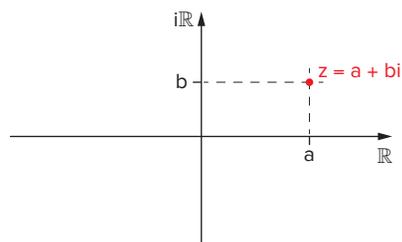
Dois séculos depois da descoberta dos números complexos, o conhecimento de suas propriedades evoluiu até ganharem interpretações geométricas, passando a representar localizações de pontos em um plano.

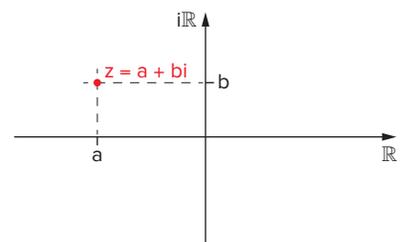
Parte da evolução dessa teoria deve-se à representação cartesiana dos números complexos, proposta pela primeira vez, em 1797, pelo topógrafo norueguês Gaspar Wessel, e posteriormente pelo matemático amador Robert Argand em 1806. Mas, foi um trabalho publicado por Gauss, em 1812, que realmente difundiu o modelo do plano complexo.

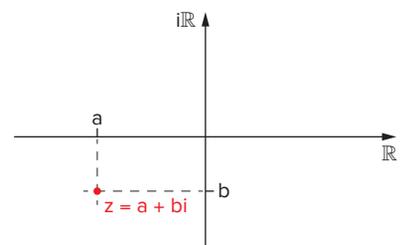
Esse modelo matemático consiste de uma adaptação do plano cartesiano tradicional, em que o eixo das abscissas continua representando o conjunto dos números reais, enquanto o eixo das ordenadas, com exceção da origem, passa a representar o conjunto dos imaginários puros.

Afixo de um número complexo

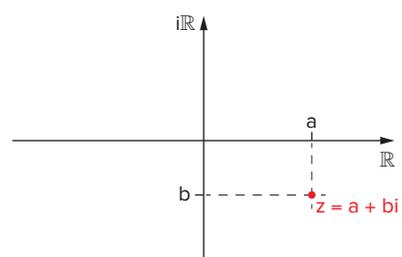
No plano complexo, cada número z = a + bi fica representado por um único ponto que é seu afixo (ou imagem) e cujas coordenadas cartesianas são (a, b). Assim:

Se um número complexo tem partes real e imaginária positivas, então seu afixo se localiza no 1º quadrante do plano complexo.

$Re(z) = a > 0$
$Im(z) = b > 0$

Se um número complexo tem parte real negativa e imaginária positiva, então seu afixo se localiza no 2º quadrante do plano complexo.

$Re(z) = a < 0$
$Im(z) = b > 0$

Se um número complexo tem partes real e imaginária negativas, então seu afixo se localiza no 3º quadrante do plano complexo.

$Re(z) = a < 0$
$Im(z) = b < 0$

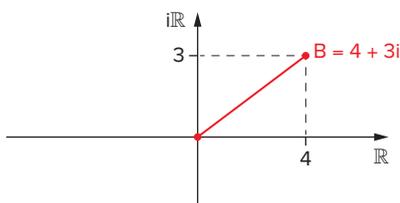
Se um número complexo tem parte real positiva e imaginária negativa, então seu afixo se localiza no 4º quadrante do plano complexo.

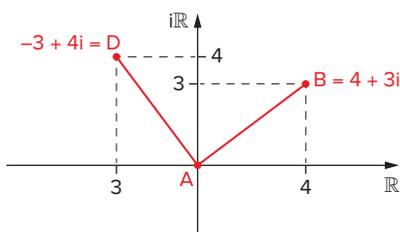
$Re(z) = a > 0$
$Im(z) = b < 0$

Exercícios resolvidos

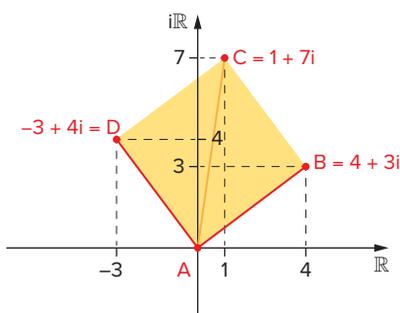
25 No plano complexo, os vértices A e B de um quadrado ABCD são respectivamente representados pelos afixos dos números complexos A = 0 e B = 4 + 3i. Sabendo que o vértice D pertence ao 2º quadrante, pode-se concluir que o vértice C é representado pelo afixo do número:

A $7 + i$
B $1 + 7i$
C $2 + 6i$
D $6 + 2i$
E $3 + 3i$

Resolução:

Representando os pontos A e B no plano complexo, tem-se o lado $\overline{AB}$ do quadrado:

Como multiplicar um número complexo pela unidade imaginária equivale a efetuar uma rotação de 90º no sentido anti horário em torno da origem e o vértice A do quadrado é a origem do sistema, para obter o vértice D no 2º quadrante, basta multiplicar B pela unidade imaginária Assim:

$$D = B \cdot i = (4 + 3i) \cdot i = 4i + 3i^2 = \;\; 3 + 4i$$

Como quadrados também são paralelogramos, o vértice C pode ser obtido somando-se os números complexos B e D.

$$C = B + D = (4 + 3i) + (\;\; 3 + 4i) = (4 \;\;\; 3) + (3 + 4)i = 1 + 7i$$

Alternativa: **B**

26 **FGV-RJ 2012** Considere os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2(1 + i)$, em que i é o número complexo tal que $i^2 = -1$. Represente, no plano complexo, o triângulo cujos vértices são os afixos dos números complexos $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ e $z_1 \cdot z_2$. Calcule a sua área.

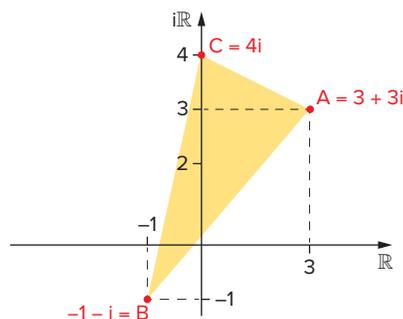
Resolução:

Os vértices do triângulo são os pontos:

$A = z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 + 2i) = 1 + i + 2 + 2i = 3 + 3i$

$B = z_1 - z_2 = (1 + i) - (2 + 2i) = 1 + i - 2 - 2i = -1 - i$

$C = z_1 \cdot z_2 = (1 + i) \cdot (2 + 2i) = 2 + 2i + 2i + 2i^2 = 2 + 4i - 2 = 4i$

Representando o triângulo no plano complexo tem-se:

Os afixos dos números complexos associados aos vértices do triângulo ABC são: A(3, 3), B(1,–1) e C(0, 4). Assim, utilizando a regra de Sarrus, podemos determinar a área do triângulo:

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 12 \;\; 3 \;\;\; 16$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\det| = \frac{1}{2} \cdot |-16| = \frac{16}{2} = 8 \text{ unidades de área}$$

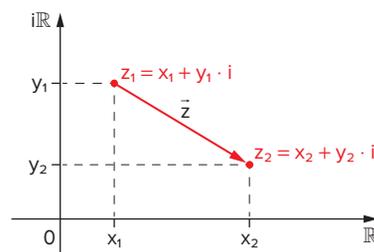
Vetores e números complexos

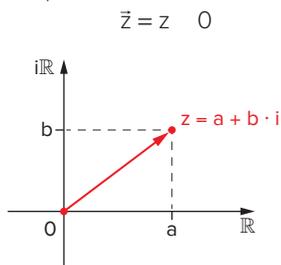
Além da interpretação geométrica do número complexo $z = a + bi$ como um ponto localizado em um sistema de coordenadas cartesianas, existe também a interpretação vetorial para o resultado da subtração de dois números complexos z_1 e z_2. Assim, sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) os respectivos afixos dos complexos z_1 e z_2:

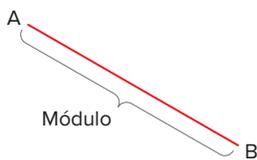
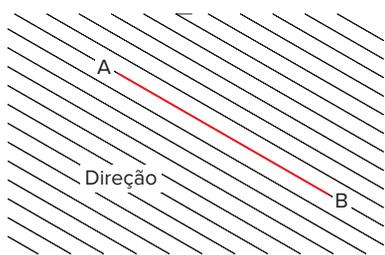
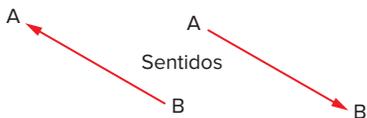
$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$$
$$z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$$

A diferença $z = z_2 - z_1$ pode ser interpretada como sendo o vetor responsável pela translação do ponto (x_1, y_1) para o ponto (x_2, y_2). Nesses casos, a notação vetorial pode ser usada para distinguir as interpretações:

$$\vec{z} = z_2 - z_1$$

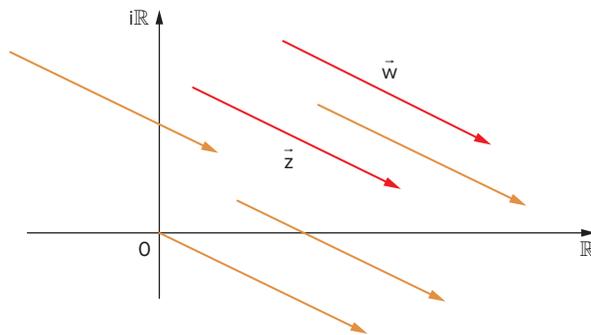
FRENTE 2

Todo número complexo pode ser geometricamente interpretado das duas formas: como localização fixa ou como o deslocamento de um ponto a outro, dependendo da necessidade do problema

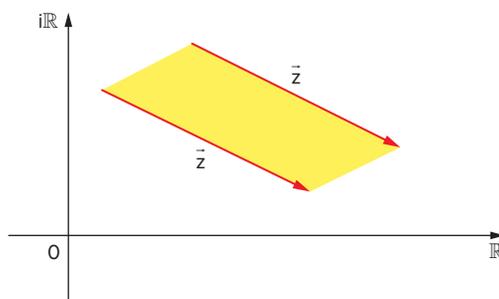
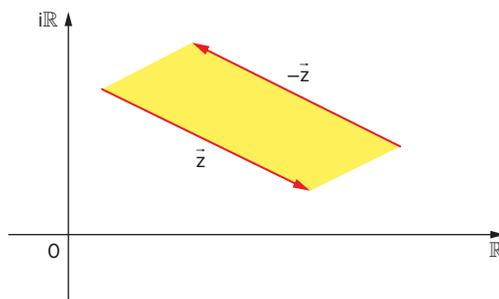
$$\vec{z} = z \quad 0$$

Vetores são entidades matemáticas definidas por três características: módulo, direção e sentido Representando um vetor $\vec{z}$ no plano complexo como um segmento de reta $\overline{AB}$, orientado por uma seta em uma de suas extremidades, tem-se que:

1 O módulo do vetor é dado pelo comprimento do segmento de reta

2 A direção do vetor é dada pelo feixe de retas paralelas ao segmento.

3. O sentido do vetor é dado pela extremidade do segmento onde está a seta.

Igualdade de vetores

A relação de equivalência entre segmentos de reta orientados é denominada equipolência Trata se do conceito que determina a igualdade entre dois ou mais vetores

$$\vec{z} = \vec{w}$$

Vetores não nulos $\vec{z}$ e $\vec{w}$ são iguais ou equipolentes se, e somente se, tiverem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. A localização dos segmentos de reta que os representa no plano complexo não precisa ser necessariamente a mesma, de modo que um mesmo vetor pode ser representado graficamente em várias localizações diferentes.

Verificando que todos os segmentos orientados da figura têm o mesmo comprimento, são paralelos entre si e têm suas setas orientadas no mesmo sentido, é correto afirmar, que todos os segmentos são representações gráficas do mesmo vetor

Quando um mesmo vetor está representado no plano complexo por dois segmentos orientados diferentes as quatro extremidades dos segmentos determinam a figura de um paralelogramo

Quando dois vetores opostos estão representados, as quatro extremidades dos segmentos que os representam também determinam a figura de um paralelogramo.

Exercício resolvido

27 Unifesp Quatro números complexos representam, no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três dos números são $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1 + \frac{5}{2}i$. O quarto número tem as partes real e imaginária positivas. Esse número é

A $2 + 3i$

B $3 + \frac{11}{2}i$

C $3 + 5i$

D $2 + \frac{11}{2}i$

E $4 + 5i$

Resolução:

Se os afixos dos números z_1, z_2, z_3 e z_4 são vértices de um paralelogramo e o afixo de z_4 situa-se no primeiro quadrante, então os vetores z_1 z_2 e z_3 z_4 são equipolentes:

$$z_1 - z_2 = z_3 - z_4 \Leftrightarrow -3 - 3i - 1 = -1 + \frac{5}{2}i - z_4 \Leftrightarrow z_4 = \frac{5}{2}i + 3 + 3i \Leftrightarrow z_4 = 3 + \frac{11}{2}i$$

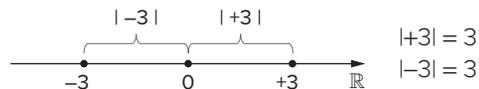
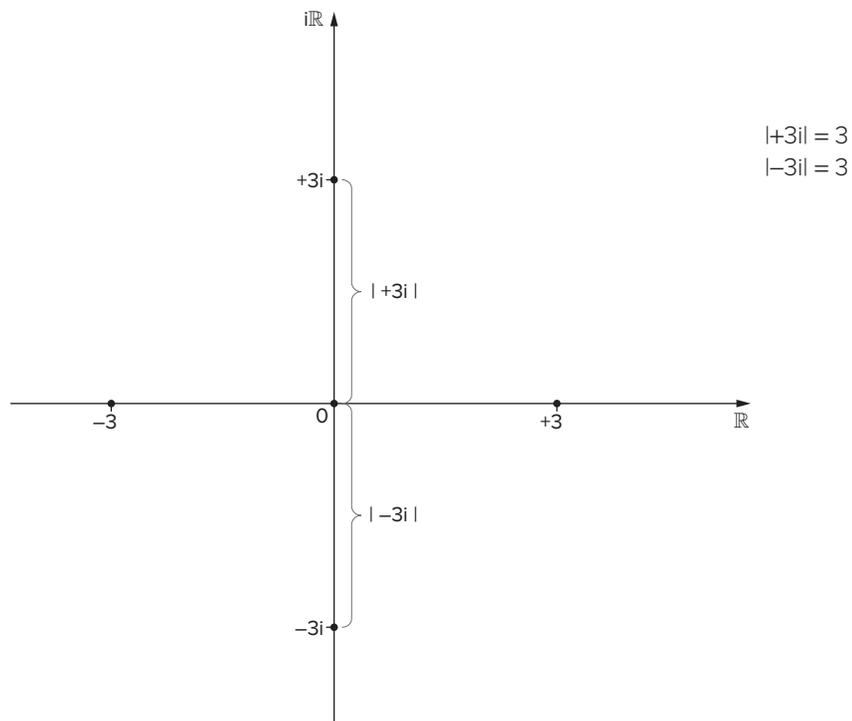
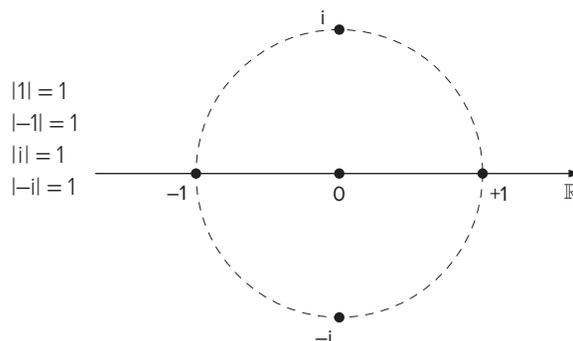
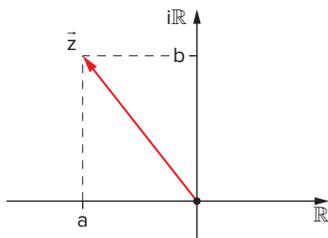
Alternativa: **B**

Módulo de um número complexo

O módulo ou valor absoluto de um número real *x*, positivo ou negativo, é sempre igual ao comprimento do segmento de reta que une a origem do eixo real ao ponto que representa o número *x*. Assim, |x| indica a distância de um ponto do eixo real até sua origem.

| −3 | | +3 |

−3 0 +3 ℝ

|+3| = 3
|−3| = 3

O mesmo ocorre com os números imaginários puros, positivos ou negativos Seus módulos também são comprimentos de segmentos de reta.

Particularmente, todas as unidades do conjunto dos números inteiros de Gauss têm módulo unitário. Observe que os segmentos de reta com extremidades em seus afixos e na origem do eixo real são raios de uma mesma circunferência:

No caso de um número complexo da forma a + bi, com a · b ≠ 0, a interpretação vetorial de z permite representá-lo por uma seta que liga a origem ao afixo (a, b). A figura a seguir representa um número complexo cujo afixo está situado no 2º quadrante do plano complexo: a < 0 e b > 0.

O módulo de um número complexo z é o comprimento da diagonal do retângulo cujos lados são os módulos das partes real e imaginária de z. Assim, do teorema de Pitágoras temos:

$$|\vec{z}|^2 = |a|^2 + |b|^2$$

Como em z = a + bi, a ∈ ℝ e b ∈ ℝ, os quadrados dos números *a* e *b* não podem ser negativos, logo, a indicação de seus módulos é desnecessária. Assim:

$$|\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplos:

a $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b $|-5+12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

c. $|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

d. $|-\sqrt{3} - i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Uma fórmula mais genérica para o módulo de um número complexo pode ser expressa em função de suas partes reais e imaginárias por:

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

Atenção

Números complexos conjugados possuem mesmo módulo:

$$|\bar{z}| = |z|$$

O produto de um número complexo z pelo seu conjugado $\bar{z}$ é igual ao quadrado de seu módulo:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

O módulo do produto é igual ao produto dos módulos:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

O módulo do quociente é igual ao quociente dos módulos:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

O módulo da soma é menor ou igual à soma dos módulos:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Exercícios resolvidos

28 Considere os números reais X e Y, tais que:

- X é o módulo da soma dos números complexos (−4 + 3i) e (2 + i)
- Y é a soma dos módulos dos números complexos (−4 + 3i) e (2 + i).

Nessas condições, é correto afirmar que:

A 2Y − X = 10
B X + 2Y = 10
C Y − 2X = 10
D 2X + Y = 10
E X = Y

Resolução:

Como (−4 + 3i) + (2 + i) = −2 + 4i, tem-se que:

$$X = |-2+4i| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Como $\begin{cases} |-4+3i| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \end{cases}$,

tem-se que $Y = 5 + \sqrt{5}$

Logo: $2Y - X = 2(5 + \sqrt{5}) - 2\sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 10$

Alternativa: **A**.

29 **FGV-SP 2012** O número complexo z = a + bi, com *a* e *b* reais, satisfaz z + |z| = 2 + 8i, com $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$. Nessas condições, $|z|^2$ é igual a:

A 68
B 100
C 169
D 208
E 289

Resolução:

Fazendo z = a + bi, tem-se:

$$z + |z| = 2 + 8i$$
$$a + bi + |a + bi| = 2 + 8i$$
$$a + bi + \sqrt{a^2+b^2} = 2 + 8i$$
$$\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right) + bi = 2 + 8i$$

Comparando as partes imaginárias de ambos os membros, verificamos que b = 8.

Comparando as partes reais, temos que

$a + \sqrt{a^2+8^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+64} = 2 - a$, assim:

$\sqrt{a^2+64} = 2 - a \Rightarrow \left(\sqrt{a^2+64}\right)^2 = (2-a)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 64 = 4 - 4a + a^2 \Leftrightarrow 4a = -60 \Leftrightarrow a = -15$

Logo: $|z|^2 = a^2 + b^2 = (-15)^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$.

Alternativa: **E**.

30 **Unifesp** Os números complexos z_1, $z_2 = 2i$ e $z_3 = a\sqrt{3} + ai$, onde *a* é um número real positivo, representam, no plano complexo, vértices de um triângulo equilátero.

Dado que $|z_1 \quad z_2| = 2$, o valor de *a* é:

A 2
B 1.
C $\sqrt{3}$.
D $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
E $\dfrac{1}{2}$.

Resolução:

A sentença $|z_1 \quad z_2| = 2$ informa que o lado do triângulo equilátero mede 2. Sendo assim, tem-se:

$$|z_3 \quad z_2| \Leftrightarrow 2 \quad |a\sqrt{3} \quad ai \quad 2i| \Leftrightarrow 2 \quad |a\sqrt{3} + (a \quad 2)i| \quad 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (a \quad 2)^2} \quad 2 = 3a^2 \Leftrightarrow a^2 \quad 4a \quad 4 \quad 4$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 \quad 4a \Leftrightarrow 0 = \quad a \quad 1 \text{ ou } a \quad 0$$

Como *a* é um número positivo, tem-se: a = 1.
Alternativa: **B**

Argumento de um número complexo

Dado um número complexo z, considere os arcos tri gonométricos determinados pelo semieixo real positivo e o vetor associado a z. As medidas, em graus ou radianos, desses arcos são chamadas de argumentos do número complexo.

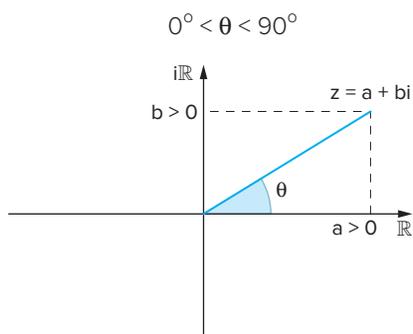
A menor medida não negativa θ, de um argumento de z, é indicada pela sigla Arg e denominada argumento principal de z Assim, tem-se:

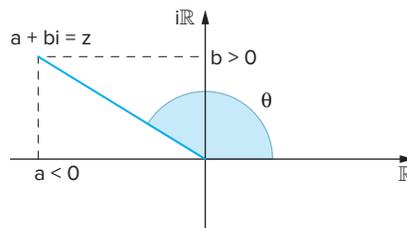
Argumento principal	Em graus	Em radianos
$\theta = \text{Arg}(z)$	$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$	$0 \leq \theta < 2\pi$

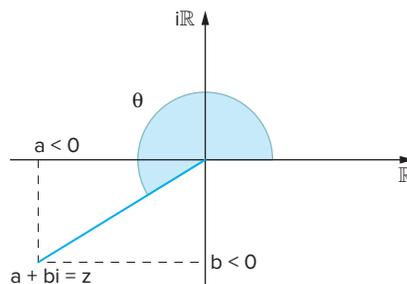
Cada número complexo não nulo possui uma infinidade de argumentos que, em graus, diferem em algum múltiplo de 360°. Assim, as medidas 240°, 120° e 480°, por exemplo, podem ser argumentos de um mesmo número complexo z. Nesse caso, o argumento principal é: $\text{Arg}(z) = 120^\circ$

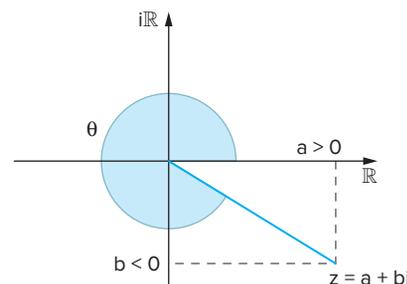
Sendo z um número complexo da forma a + bi, com $a \cdot b \neq 0$, há quatro casos a serem considerados a respeito da medida em graus: $\theta = \text{Arg}(z)$.

- Se o afixo (a, b) pertence ao 1º quadrante, então:

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

- Se o afixo (a, b) pertence ao 2º quadrante, então:

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

- Se o afixo (a, b) pertence ao 3º quadrante, então:

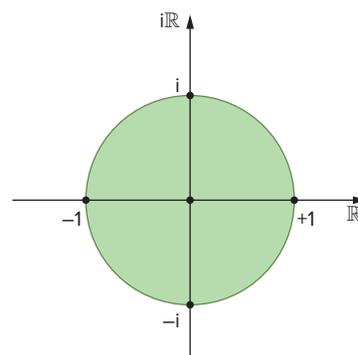
$$180^\circ < \theta < 270^\circ$$

- Se o afixo (a, b) pertence ao 4º quadrante, então:

$$270^\circ < \theta < 360^\circ$$

Particularmente os números reais positivos têm argumento nulo e os números reais negativos têm argumento em graus igual a 180° Exemplos: $\begin{cases} \text{Arg}(+1) = 0^\circ \\ \text{Arg}(\ 1) \quad 180^\circ \end{cases}$

Além disso, em graus, os números imaginários puros positivos têm argumento 90° e os imaginários puros negativos têm argumento 270°. Exemplos: $\begin{cases} \text{Arg}(+i) = 90^\circ \\ \text{Arg}(\ i) \quad 270^\circ \end{cases}$.

Em radianos, os argumentos principais das unidades do conjunto dos inteiros de Gauss são:

$$\text{Arg}(+1) = 0$$
$$\text{Arg}(+i) = \frac{\pi}{2}$$
$$\text{Arg}(\ 1) \ \pi$$
$$\text{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

FRENTE 2

Exercício resolvido

31 Encontre os argumentos principais, em graus, dos seguintes números:

a) $z = \ \ 7$
b) $w = 6$
c) $x = \ \ 5i$
d) $y = 4i$

Resolução:

a) −7 é um número real negativo. Portanto, $Arg(-7) = 180^\circ$.
b) 6 é um número real positivo. Portanto, $Arg(6) = 0^\circ$.
c) −5i é um imaginário puro negativo. Portanto, $Arg(-5i) = 270^\circ$
d) 4i é um imaginário puro positivo. Portanto, $Arg(4i) = 90^\circ$

O valor do módulo e os valores das partes real e imaginária de um número complexo z podem ser usados para exprimir as frações para as imagens das funções trigonométricas dos argumentos de z.

Assim sendo $\theta = Arg(z)$, tem-se:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|} \qquad \cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}$$

E, se z não for imaginário puro:

$$tg(\theta) = \frac{Im(z)}{Re(z)}$$

Na prática, o valor do argumento principal de um número complexo z, que não é nem real nem imaginário puro, pode ser mais facilmente obtido calculando primeiro o valor de sua tangente, e depois observando o quadrante em que se encontra o afixo de z. Exemplos:

a Sendo $\theta = Arg(6 + 6i)$ tem-se:

$$\begin{cases} tg(\theta) = \frac{6}{6} = 1 \\ 6 + 6i \in 1^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

b. Sendo $\theta = Arg(\ \ 2\ \ 2\sqrt{3}i)$ tem-se:

$$\begin{cases} tg(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \\ -2 + 2\sqrt{3}i \in 2^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 180^\circ \ = 60^\circ \quad 120^\circ$$

c. Sendo $\theta = Arg(-\sqrt{3} - i)$ tem-se:

$$\begin{cases} tg(\theta) = \frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3}\ \ i \quad 3^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

d. Sendo $\theta = Arg(1 - i)$ tem-se:

$$\begin{cases} tg(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \\ 1 \ \in \quad 4^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = 360^\circ = 45^\circ \quad 315^\circ$$

Exercício resolvido

32 A soma dos argumentos principais dos complexos $z = \ \ 2 + 2i$ e $w = 3 + \sqrt{3}$, em graus, é igual a:

A 180°
B 165°
C 115°
D 90°
E 75°

Resolução:

Sendo $\alpha = Arg(z)$ tem-se:

$$\begin{cases} tg(\alpha) = \frac{2}{-2} = \ \ 1 \\ z \in 2^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Sendo $\beta = Arg(w)$ tem-se:

$$\begin{cases} tg(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ w \in 1^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

Logo, $\alpha + \beta = 135^\circ + 30^\circ = 165^\circ$.
Alternativa: **B**

Saiba mais

Classificação dos números complexos de acordo com seus argumentos

Sendo θ um argumento, em radianos, do número complexo z e *k* um número inteiro, temos que:

- Se z é um número real, então: $\theta = k\pi$.
- Se z é imaginário puro, então: $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Forma trigonométrica de um número complexo

Dado um número complexo z não nulo, sendo θ um de seus argumentos, tem-se que:

$$\begin{cases} \text{sen}\theta = \frac{Im(z)}{|z|} \Rightarrow Im(z) = |z| \cdot \text{sen}\theta \\ \cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} \Rightarrow Re(z) = |z| \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Assim, substituindo as partes real e imaginária da forma algébrica do número z, obtém-se:

$$z = Re(z) + Im(z) \cdot i \Leftrightarrow z = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \text{sen}\theta \cdot i$$

Finalmente, colocando em evidência o módulo do complexo z, encontra-se a expressão que é chamada de forma trigonométrica do número complexo:

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Há uma abreviação para a expressão entre parênteses na forma trigonométrica. As primeiras letras das funções cosseno e seno, intercaladas pela letra *i*, que é a unidade imaginária, geram a sigla cis:

$$\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta = \text{cis}\theta$$

A forma trigonométrica de um número complexo tam bém pode ser escrita como:

$$z = |z| \cdot \text{cisq}$$

Quando um número complexo tem módulo unitário, sua forma trigonométrica fica expressa apenas por cisθ. Assim, as formas trigonométricas das unidades do conjunto dos números inteiros de Gauss são:

$1 = \text{cis}0^o$ $\quad$ $i = \text{cis}90^o$ $\quad$ $1 = \text{cis}180^o$ $\quad$ $i = \text{cis}270^o$

Em alguns casos, quando o argumento principal de um número complexo é $\theta > 180^o$, o maior argumento negativo equivalente costuma ser usado nas formas trigonométricas como, por exemplo:

$$i = \text{cis}270^o = \text{cis}(\ \ 90^o)$$

Assim, dois números complexos conjugados podem ser representados usando-se arcos opostos nas suas formas trigonométricas:

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \Leftrightarrow \overline{z} = |z| \cdot (\cos(-\theta) + i \cdot \text{sen}(-\theta))$$

$$\overline{\text{cis}\theta} = \text{cis}(-\theta)$$

Exercício resolvido

33 Escreva os seguintes números complexos em suas formas trigonométricas:

a) 5
b) −8
c) 10i
d) −11i
e) 1 i
f) 2 2i
g) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$
h) 1 $i\sqrt{3}$

Resolução:

a) Como $|5| = 5$ e $\text{Arg}(5) = 0^o$, tem-se: $5 = 5(\cos 0^o + i \cdot \text{sen}0^o)$

b) Como $|\ \ 8| = 8$ e $\text{Arg}(-8) = 180^o$, tem-se: $\ \ 8 = 8(\cos 180^o + i \cdot \text{sen}180^o)$

c) Como $|10i| = 10$ e $\text{Arg}(10i) = 90^o$, tem-se: $10i = 10(\cos 90^o + i \cdot \text{sen}90^o)$

d) Como $|-11i| = 11$ e $\text{Arg}(-11i) = 270^o$, tem-se: $-11i = 11(\cos 270^o + i \cdot \text{sen}270^o)$

e) Sendo $z = 1 - i$ tem-se:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\ =1)^2}\quad \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \frac{\ 1}{1} = -1 \\ z \in 4^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 360^o = \ 45^o \quad 315^o$$

Portanto: $1 \quad i \quad \sqrt{2}\,(\cos 315^o \quad i\ \text{sen}315^o)$

f) Sendo $z = \ \ 2 \quad 2i$ tem-se:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \frac{-2}{\ \ 2} = 1 \\ z \in 3^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 180^o + 45^o = 225^o$$

Portanto: $\ \ 2 \quad 2i = 2\sqrt{2}\,(\cos 225^o + i \cdot \text{sen}225^o)$.

g) Sendo $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ tem-se:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ z \in 1^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 30^o$$

Portanto: $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = (\cos 30^o + i \cdot \text{sen}30^o)$.

h) Sendo $z = -1 + i\sqrt{3}$ tem-se:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{\ 1} = \ \ \sqrt{3} \\ z \in 2^{\underline{o}} \text{ quadrante} \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{Arg}(z) = 180^o - 60^o = 120^o$$

Portanto: $\ 1 \quad i\sqrt{3} \quad 2(\cos 120^o \quad i\ \text{sen}120^o)$

Para obter a forma algébrica de um número complexo z que é dado na forma trigonométrica, basta que se calculem os valores do cosseno e do seno do argumento e depois que seja efetuada a distributiva do módulo de z

Exemplo:

$$z = 4(\cos 30^o + i \cdot \text{sen}30^o) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2} \cdot i = 2\sqrt{3} + 2i$$

Exercício resolvido

34 Escreva os seguintes números complexos em suas formas algébricas:

a) cis 30^o
b) 2cis 45^o
c) $\sqrt{3}$ cis 60^o
d) 3cis 90^o
e) 4cis 120^o
f) 5cis π
g) $\sqrt{6}$ cis $\frac{7\pi}{6}$
h) 8cis 495^o

FRENTE 2

Resolução:

a) $\text{cis}\,30^{\circ} = \cos 30^{\circ} + i \cdot \text{sen}\,30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $2\text{cis}\,45^{\circ} = 2(\cos 45^{\circ} + i \cdot \text{sen}\,45^{\circ}) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}\text{cis}\,60^{\circ} = \sqrt{3}(\cos 60^{\circ} + i \cdot \text{sen}\,60^{\circ}) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

d) $3\text{cis}\,90^{\circ} = 3(\cos 90^{\circ} + i \cdot \text{sen}\,90^{\circ}) = 3(0 + i \cdot 1) = 3i$

e) $4\text{cis}\,120^{\circ} = 4(\cos 120^{\circ} + i \cdot \text{sen}\,120^{\circ}) = 4\left(\;\frac{1}{2}\;\;\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \;\frac{4}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2}\;\;\; 2\;\; 2\sqrt{3} \cdot i$

f) $5\text{cis}\,\pi = 5(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi) = 5(-1 + 0i) = -5$

g) $\sqrt{6}\text{cis}\,\frac{7\pi}{6} = \sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{18}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

h) Dividindo 495° por 360°, obtém-se resto 135° Assim:

$$8\text{cis}\,495^{\circ} = 8\text{cis}\,135^{\circ} = 8(\cos 135^{\circ} + i \cdot \text{sen}\,135^{\circ}) = 8\left(\;\frac{\sqrt{2}}{2}\;\;\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \;\frac{8\sqrt{2}}{2} + \frac{8\sqrt{2}}{2}i = +4\sqrt{2} \cdot \;4\sqrt{2}\;\; i$$

Operações: forma algébrica × forma trigonométrica

A forma algébrica dos números complexos é bastante eficiente para se efetuar as operações de adição e subtração. Note:

$$(3 + 3i) + (-2 + 2i) = 1 + 5i$$

$$(3 + 3i) - (-2 + 2i) = 5 + i$$

A multiplicação é um pouco mais trabalhosa, pois depende da propriedade distributiva e da substituição $i^2 = -1$:

$$(3 + 3i) \cdot (-2 + 2i) = -6 + 6i - 6i + 6i^2 = -6 + 0 - 6 = -12$$

$$(2 - 5i) \cdot (3 + 4i) = 6 + 8i - 15i - 20i^2 = 6 - 7i + 20 = 26 - 7i$$

Quocientes de números complexos dependem do processo de racionalização de denominadores, uma vez que $i = \sqrt{-1}$, Por isso, em cada divisão de complexos são efetuadas duas multiplicações. Note:

$$\frac{3 + 3i}{2\;\;2i} = \frac{(3 + 3i) \cdot (\;\;2\;\;2i)}{(\;+2\;\;2i) \cdot (\;\;2\;\;2i)} = \frac{-6\;\;6i\;\;6i\;\;6i^2}{4 + 4i\;\;4i\;\;4i^2} = \frac{6\;\;12i\;\;6}{4 + 0 + 4} = \frac{12i}{8} = \;\frac{3}{2}i = \;\;1{,}5i$$

Já as potências de expoente natural dependem do teorema do Binômio de Newton, que é relativamente simples quando o expoente é igual a 2 ou 3, mas com expoentes maiores, as potenciações na forma algébrica ficam extremamente longas. Observe:

$$(3 + 3i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3i + (3i)^2 = 9 + 18i \quad 9 = 18i$$

$$(-2 + 2i)^3 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \cdot 2i + 3 \cdot (-2) \cdot (2i)^2 + (2i)^3 = -8 + 24i + 24 - 8i = 16 + 16i$$

As operações de multiplicação, divisão e potenciação na forma trigonométrica envolvem algoritmos mais eficientes.

Multiplicação na forma trigonométrica

Considere os números complexos z e w, de argumentos α e β, expressos na forma trigonométrica:

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)$$

$$w = |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\,\beta)$$

Para multiplicar esses dois números complexos, bas ta multiplicar seus módulos e adicionar seus argumentos Assim:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)]$$

Saiba mais

Demonstração:

$$z \cdot w = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha) \cdot |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \left[\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot i \cdot \text{sen}\beta + i \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + i \cdot \text{sen}\alpha \cdot i \cdot \text{sen}\beta\right]$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \left[\cos\alpha \cdot \cos\beta + i^2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta + i \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + i \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta\right]$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \left[\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta + i \cdot (\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha)\right]$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)\right]$$

Portanto:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)]$$

Como as expressões cis representam números com plexos de módulo unitário, para encontrar o produto dessas expressões, basta que sejam somados os argumentos dos complexos multiplicados:

$$\text{cis}\alpha \cdot \text{cis}\beta = \text{cis}(\alpha + \beta)$$

Como exemplo comparativo, considere o produto dos números $z = 3 + 3i$ e $w = -2 + 2i$, que já foi efetuado na forma algébrica, em um dos exemplos anteriores.

$$z \cdot w = (3 + 3i) \cdot (\;\; 2 + 2i) = \;\; 12$$

Na forma trigonométrica esses números ficam expres sos por:

$$z = 3\sqrt{2}\text{cis}\,45° \quad \text{e} \quad w = 2\sqrt{2}\text{cis}\,135°$$

Portanto:

$$z \cdot w = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}\text{cis}(45° + 135°) = 12\text{cis}\,180° = \;\; 12$$

Atenção

Veja como efetuar, na forma trigonométrica, as multiplicações de um número complexo $z = |z| \cdot \text{cis}\theta$ pelas unidades do conjunto dos números inteiros de Gauss:

$$1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(0° + \theta)$$

$$1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(90° + \theta)$$

$$-1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(180° + \theta)$$

$$1 \cdot z = |z| \cdot \text{cis}(270° + \theta)$$

Divisão na forma trigonométrica

Considere novamente os números complexos z e w, de argumentos α e β, expressos na forma trigonométrica:

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$$

$$w = |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$$

Para dividir um desses números pelo outro, basta dividir seus respectivos módulos e subtrair seus respectivos argumentos. Assim:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot \left[\cos(\alpha \;\; \beta) \;\; i \cdot \text{sen}(\alpha \;\; \beta)\right]$$

e

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \cdot \left[\cos(\beta \;\; \alpha) \;\; i \cdot \text{sen}(\beta \;\; \alpha)\right]$$

Saiba mais

Demonstração:

Multiplicam-se os termos da fração pelo conjugado do denominador:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \; \frac{\overline{w}}{\overline{w}}$$

Como o produto de um número complexo por seu conjugado é igual ao quadrado de seu módulo:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}$$

Substituindo as formas trigonométricas de z e $\overline{w}$:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \;(\cos\alpha \;\; i\ \text{sen}\alpha)\ \ |w|\ (\cos(\;\; \beta) \;\; i\ \text{sen}(\;\; \beta))}{|w|^2}$$

Separando os módulos das expressões cis:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \cdot |w|}{|w|^2} \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\ \alpha) \cdot (\cos(\;\; \beta) \;\; i \cdot \text{sen}(\;\; \beta))$$

Simplificando o módulo de w e efetuando a multiplicação das expressões cis:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot \left[\cos(\alpha + (\;\; \beta)) \;\; \cdot i\ \text{sen}(\alpha \;\; (\;\; \beta))\right]$$

Aplicando a regra de sinais:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot \left[\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)\right]$$

Para efetuar a divisão de expressões cis basta que sejam subtraídos os argumentos dos complexos divididos:

$$\text{cis}\alpha : \text{cis}\beta = \text{cis}(\alpha - \beta)$$

$$\text{cis}\beta : \text{cis}\alpha = \text{cis}(\beta - \alpha)$$

Como exemplo comparativo, considere o quociente do número $z = 3 + 3i$ pelo número $w = \;\; 2 + 2i$, que também já foi efetuado na forma algébrica anteriormente.

$$\frac{z}{w} = \frac{3 + 3i}{2 \;\; 2i} = -1{,}5i$$

Na forma trigonométrica esses números ficam expressos por:

$$z = 3\sqrt{2}\text{cis}\,45°$$

$$w = 2\sqrt{2}\text{cis}\,135°$$

Portanto:

$$\frac{z}{w} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\text{cis}(45° \;\; 135°) \;\; \frac{3}{2}\text{cis}(\;\; 90°) \;\; 1{,}5i$$

FRENTE 2

Potenciação na forma trigonométrica

Veja como fica, na forma trigonométrica, a segunda potência de um número complexo z com argumento θ:

$z^2 = z \cdot z$

$z^2 = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$

$z^2 = |z| \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$

$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^2$

$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos^2\theta + 2 \cdot \text{sen}\theta\ i \cdot \text{ses}\theta + i^2 \cdot \text{sen}^2\theta)$

$z^2 = |z|^2 \cdot [(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + i \cdot (2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta)]$

$z^2 = |z|^2 \cdot [\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)]$

Perceba que elevando um número complexo z ao quadrado, seu argumento é duplicado.

Agora, veja agora como fica, na forma trigonométrica, a terceira potência e um número complexo z com argumento θ:

$z^3 = z^2 \cdot z$

$z^3 = |z|^2 \cdot [\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)] \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$

$z^3 = |z|^2 \cdot |z| \cdot [\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)] \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$

$z^3 = |z|^3 \cdot [\cos(2\theta + \theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta + \theta)]$

$z^3 = |z|^3 \cdot [\cos(3\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)]$

Perceba que elevando um número complexo z ao cubo, seu argumento é triplicado.

Uma indução sobre esses primeiros resultados estabelece uma regra para se obter as potências com expoentes naturais dos números complexos, na forma trigonométrica, conhecida como fórmula de Moivre.

Sendo $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, para todo número natural *n* tem-se:

Biblioteca do Instituto de Astronomia da Universidade de Cambridge, Cambridge

Abraham Moivre

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)]$$

De acordo com essa fórmula, quando um número complexo z é elevado a um expoente natural *n*, o módulo de z também é elevado a *n*, mas o argumento de z fica simplesmente multiplicado por *n*.

Saiba mais

Demonstração:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n fatores}}$$

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot \ldots \cdot |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)}_{\text{n fatores}}$$

$$z^n = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z|}_{\text{n fatores}} \cdot \underbrace{(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot \ldots \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)}_{\text{n fatores}}$$

$$z^n = |z|^n\ [\cos(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{\text{n parcelas}})\ i\ \text{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{\text{n parcelas}})]$$

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \theta)]$$

Coordenadas polares

Usado desde o século II a.C. por Aristóteles e pelo astrônomo Hiparco, o sistema polar de coordenadas em um plano consiste em adotar se um ponto de referência no plano para ser a origem de uma escala métrica

O ponto escolhido para a origem é denominado polo e a escala métrica adotada é denominada eixo polar.

Nesse sistema, cada ponto P do plano, diferente do polo, fica designado por um par ordenado de informações numéricas, sendo que:

- A primeira coordenada é a medida do raio da circunferência com centro no polo e que passa pelo ponto P.
- A segunda coordenada é a medida, em graus ou radianos, de um arco de circunferência determinado pelo ponto P e o eixo polar.

Para facilitar a transição entre os sistemas de coor denadas polar e cartesiano, o eixo polar é geralmente representado na horizontal e orientado para a direita, coincidindo com o semieixo real positivo do sistema cartesiano.

Os arcos de circunferência, usados nas coordenadas polares dos pontos do plano, devem ser medidos a partir do eixo polar, crescendo no sentido anti-horário e decrescendo no sentido horário.

Com exceção do polo, cada ponto P dessa grade pode ser designado em coordenadas polares por um par ordenado da forma (ρ, θ) em que:

- A letra grega ρ (rô) designa o raio da circunferência que passa pelo ponto P.
- A letra grega θ (teta) designa algum argumento do ponto P, ou seja, a medida de um arco orientado que parte do eixo polar e, seguindo o sentido anti-horário, chega ao ponto P.

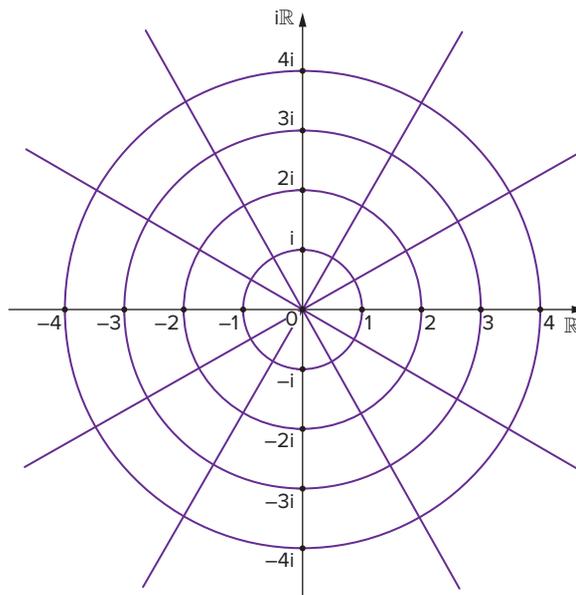
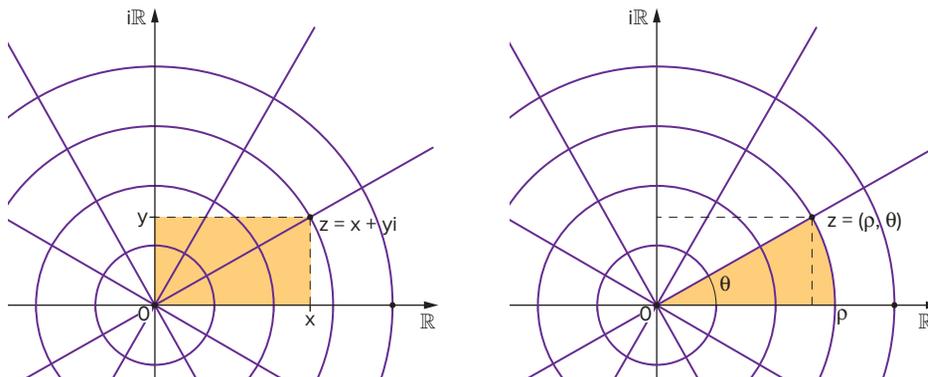
A figura apresenta uma grade de pontos de um sistema de coordenadas polares, cujos arcos que seguem crescem de 15° em 15°.

As coordenadas polares dos pontos em destaque na figura são:

Em graus	Em radianos
$A = (4, 0°)$	$A = (4, 0)$
$B = (3, 75°)$	$B = \left(3, \frac{5\pi}{12}\right)$
$C = (6, 75°)$	$C = \left(6, \frac{5\pi}{12}\right)$
$D = (3, 150°)$	$D = \left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$
$E = (2, 270°)$	$E = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$
$F = (5, 330°)$	$F = \left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$

Forma polar de um número complexo

Assim como a forma trigonométrica, todo número complexo não nulo possui também uma forma polar de representação. Para isso, sobrepõem-se os sistemas de coordenadas polares e cartesianas, de modo que:

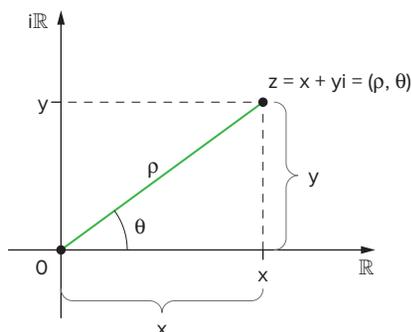
- O polo coincida com a origem do plano complexo.
- O eixo polar coincida com o semieixo real positivo do plano complexo.

Nesse modelo matemático, a localização de um número complexo pode ser feita tanto por meio de um retângulo, quanto por meio de um setor circular.

No sistema cartesiano, sendo (x, y) o afixo do número complexo z, tem-se:

$$z = x + y \cdot i$$

Como a diagonal do retângulo de dimensões |x| e |y|, que tem um vértice na origem do sistema e outro no afixo de z é também um raio da circunferência que passa pelo afixo de z e tem centro na origem do sistema, a medida ρ do raio dessa circunferência é igual ao módulo do número complexo z:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Um argumento de z é a medida θ do ângulo central do setor circular de raio ρ e cujo arco tenha uma extremidade no semieixo real positivo e outra extremidade no afixo do próprio número z Assim, sendo θ um argumento de z = x + yi:

- $\text{sen}\theta = \frac{y}{\rho}$

! Atenção

Usando arcos negativos na representação da forma polar de números complexos cujos argumentos principais têm mais do que 180°, observa-se um padrão comum às representações algébrica e trigonométrica de números complexos conjugados z e $\bar{z}$.

$$\overline{a + bi} = a \quad bi$$

$$\overline{(\rho, \theta)} = (\rho, -\theta)$$

Em ambos os casos, o número complexo z é definido por duas informações distintas. Na forma algébrica essas informações são os valores da parte real e da parte imaginária de z. Na forma polar essas informações são o módulo e o argumento.

Observe que para encontrar o conjugado de z basta mudar o sinal de sua segunda informação

Exercício resolvido

35 **FGV-SP** Um ponto do plano cartesiano pode ser descrito pelas suas coordenadas retangulares (x, y) ou pelas suas coordenadas polares (r, θ), sendo *r* a distância entre o ponto e a origem do sistema e θ a medida, em radianos, do arco que o eixo *x* descreve no sentido anti-horário, até encontrar $\overline{OP}$. Em geral, $0 \leq \theta < 2\pi$. As relações utilizadas para que se passe de um sistema de coordenadas a outro são as seguintes:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ $\text{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\text{tg}\theta = \frac{y}{x}$

As coordenadas polares do ponto P(1, 1) são:

A $\left(\sqrt{2}, \pi\right)$

B $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

C $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

D $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

E $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Resolução:

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Mas como $\text{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$, temos que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Alternativa: **C**.

Operações com números complexos na forma polar

Considere os números complexos não nulos z e w, de argumentos α e β representado por pontos situados em circunferências com centro na origem do eixo polar e cujos raios medem r e s respectivamente:

$$z = (r, \alpha) \quad e \quad w = (s, \beta)$$

Lembrando que a medida do raio das circunferências citadas são os respectivos módulos desses números complexos, tem-se que:

I. Para obter a forma polar do produto entre os números z e w, basta que sejam multiplicados os seus módulos e somados os seus argumentos.

$$z \cdot w = (r, \alpha) \cdot (s, \beta) = (r \cdot s, \alpha + \beta)$$

II. Para obter o quociente de z por w, basta que sejam divididos os seus módulos e subtraídos os seus ar gumentos.

$$\frac{z}{w} = \frac{(r, \alpha)}{(s, \beta)} = \left(\frac{r}{s}, \beta\alpha \right)$$

III Para obter a *n*-ésima potência do número complexo z, por exemplo, basta que seu módulo seja elevado à *n* ésima potência e que seu argumento seja multiplicado por *n*

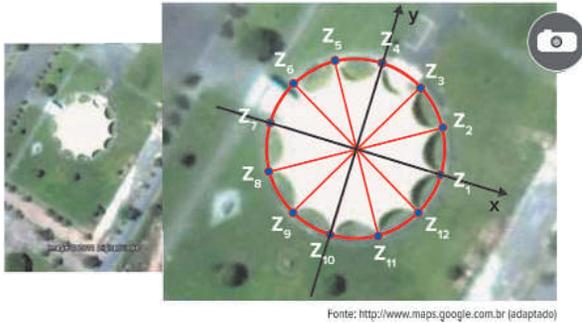
$$z^n = (r, \alpha)^n = (r^n, n \cdot \alpha)$$

Exemplos:

- $(6, 45°) \cdot (2, 30°) = (6 \cdot 2, 45° + 30°) = (12, 75°)$
- $(6, 45°) : (2, 30°) = (6 : 2, 45° - 30°) = (3, 15°)$
- $(6, 45°)^2 = (6^2, 2 \cdot 45°) = (36, 90°)$
- $(2, 30°)^5 = (2^5, 5 \cdot 30°) = (32, 150°)$

Exercícios resolvidos

36 **UFSM 2012** Observe a vista aérea do planetário e a representação, no plano de Argand-Gauss, dos números complexos z_1, z_2, ..., z_{12}, obtida pela divisão do círculo de raio 14 em 12 partes iguais.

Fonte: http://www.maps.google.com.br (adaptado)

Considere as seguintes informações:

I. $z_2 = 7\sqrt{3} + 14i$

II $z_{11} = \overline{z_3}$

III $z_5 = z_4 \cdot \overline{z_{11}}$

Está(ão) correta(s):

A Apenas I.
B Apenas II.
C Apenas III.
D Apenas I e II.
E Apenas II e III.

Resolução:

I Incorreta, pois as coordenadas polares do complexo z_2 são (14, 30°)

Então: $z_2 = 14(\cos 30^\circ + i \cdot \text{sen} 30^\circ) = 14\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$

$= \frac{14\sqrt{3}}{2} + \frac{14}{2}i = 7\sqrt{3} + 7i$

II. Correta, pois as coordenadas polares dos complexos z_{11} e z_3 são (14, 60°) e (14, 60°).

Sendo assim, um deles é o conjugado do outro.

III Incorreta, pois:

$z_5 = 14(\cos 120^\circ + i \cdot \text{sen} 120^\circ)$

$z_4 = 14(\cos 90^\circ + i \cdot \text{sen} 90^\circ)$

$\overline{z_{11}} = z_3 = 14(\cos 60^\circ + i \cdot \text{sen} 60^\circ)$

$z_4 \cdot z_{11} = 14 \cdot 14 \cdot [\cos(60^\circ + 90^\circ) + i \cdot \text{sen}(60^\circ + 90^\circ)] =$

$= 196(\cos 150^\circ + i \cdot \text{sen} 150^\circ) \neq z_5$

Alternativa: **B**

37 **Unesp** Considere o número complexo $z = \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}$. O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

A i
B $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
C i 2
D i
E 2i

Resolução:

Na forma polar temos z = (1, 30°), portanto:

$z^3 = (1, 30^\circ)^3 = (1, 90^\circ) = i$

$z^6 = (1, 30^\circ)^6 = (1, 180^\circ) =\ \ 1$

$z^{12} = (1, 30^\circ)^{12} = (1, 360^\circ) = 1$

Logo, $z^3 + z^6 + z^{12} = i\ \ 1 + 1 = i$

Alternativa: **D**

38 Determine o menor inteiro positivo *n* para o qual $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ seja real.

Resolução:

Sendo $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, na forma polar temos que $z = (1, 30^\circ)$, logo, $z^n = (1, n \cdot 30^\circ)$.

Então, para que z^n seja um número real, devemos ter que: $n \cdot 30^\circ \in \{\ \ ,\ \ 360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ,\ \ \}$.

Portanto, n ∈ {..., –12, –6, 0, 6, 12, ...}.

Logo, o menor valor inteiro positivo de *n* é 6

Igualdade polar

Para resolver equações envolvendo números complexos em suas formas polares ou trigonométricas, considera-se sempre o fato de que todo número complexo possui uma infinidade de argumentos, além do argumento principal.

Assim, em radianos:

$$... = (\rho, \theta - 4\pi) = (\rho, \theta - 2\pi) = (\rho, \theta) = (\rho, \theta + 2\pi) = (\rho, \theta + 4\pi) = ...$$

E, em graus:

$$= (\rho, \theta\ \ \ 720^\circ) = (\rho, \theta\ \ \ 360^\circ) = (\rho, \theta) = (\rho, \theta + 360^\circ) = = (\rho, \theta + 720^\circ) = ...$$

Para escrever na forma polar o número imaginário puro −5i, por exemplo, é necessário usar o seu módulo ρ = 5 e algum de seus argumentos

Embora o argumento principal seja 270°, os arcos de −90° e 630°, por exemplo, também são argumentos do número −5i. Assim:

$$= (3, -90^\circ) = (3, 270^\circ) = (3, 630^\circ) =$$

Observando essa característica dos argumentos de um número complexo, pode-se definir a igualdade polar da seguinte maneira:

"Dois números complexos representados, em coordenadas polares ou em formas trigonométricas, são iguais se, e somente se, possuírem o mesmo módulo, e argumentos que em graus diferem de algum múltiplo de 360°."

$$(r, \alpha) = (s, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \alpha = \beta + k \cdot 360^\circ, \text{ com k inteiro} \end{cases}$$

Em radianos:

$$(r, \alpha) = (s, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \alpha = \beta + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Radiciação em $\mathbb{C}$

No conjunto dos números complexos, cada número real negativo possui duas raízes quadradas, que são números imaginários puros: um com parte imaginária positiva e outro com parte imaginária negativa. Por exemplo, as raízes quadradas do número 64 são: $\begin{cases} 8i, \text{ pois } (8i)^2 = 8^2 \cdot i^2 = 64 \cdot (=1) \quad 64 \\ =8i, \text{ pois } (\ 8i)^2 \quad (\ 8)^2\ i^2 \quad 64\ (\ 1) \quad 64 \end{cases}$

Um fato importante sobre o conjunto $\mathbb{C}$ é que ele não somente apresenta duas raízes quadradas para qualquer número real, mas três raízes cúbicas, quatro raízes quartas, cinco raízes quintas e assim por diante.

Mas, com $n > 2$ não é possível representar todas as raízes enésimas de um número complexo escrevendo os sinais (+) e (−) antes do radical. Como o uso de apenas dois sinais poderia bastar para se representar os 3 resultados de uma raiz cúbica?

Em $\mathbb{C}$, as raízes cúbicas do número 64, por exemplo, são os números: 4, $\ 2 \quad 2i\sqrt{3}$ e $\ 2 \quad 2i\sqrt{3}$, pois cada um deles é uma solução da equação $x^3 = 64$. Veja a verificação desses resultados na forma algébrica:

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$
- $\left(\ 2 \quad 2i\sqrt{3}\right)^3 = (\ 2)^3 \cdot\ 3\ (\ 2)^2\ 2i\sqrt{3}\ \cdot 3\ (\ 2)\ \left(2i\sqrt{3}\right)^2 + \left(2i\sqrt{3}\right)^3 =$

$$= -8 + 3 \cdot 4 \cdot 2i\sqrt{3} - 6 \cdot (-12) - 24i\sqrt{3} = -8 + 24i\sqrt{3} + 72 - 24i\sqrt{3} = 64$$

- $\left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)^3 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 \cdot \left(-2i\sqrt{3}\right) + 3 \cdot (-2) \cdot \left(-2i\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2i\sqrt{3}\right)^3 =$

$$= \ 8\ +3\ 4\ 2i\sqrt{3}\ +6\ (\ 12) = 24i\sqrt{3} \quad 8 \quad 24i\sqrt{3} \quad 72 \quad 24i\sqrt{3} \quad 64$$

Na forma polar, com o argumento em graus, o número 64 fica expresso por $(64, 0^\circ)$ e suas três raízes cúbicas expressas por $(4, 0^\circ)$, $(4, 120^\circ)$ e $(4, 240^\circ)$ Veja a verificação desses resultados usando a fórmula de Moivre:

- $(4, 0^\circ)^3 = (4^3, 3 \cdot 0^\circ) = (64, 0^\circ)$
- $(4, 120^\circ)^3 = (4^3, 3 \cdot 120^\circ) = (64, 360^\circ) = (64, 0^\circ)$
- $(4, 240^\circ)^3 = (4^3, 3 \cdot 240^\circ) = (64, 720^\circ) = (64, 0^\circ)$

Comparando as verificações dessas raízes cúbicas nessas duas formas, fica evidente a vantagem que a forma polar leva em relação à forma algébrica. Sendo assim, para encontrar as raízes *n*-ésimas de um número complexo recomenda-se o uso da fórmula de Moivre e do desmembramento de argumentos previstos na igualdade polar.

Equações do tipo $z^n = w$

Para extrair as raízes quadradas de um número complexo w, deve-se resolver a equação binomial $z^2 = w$. Para extrair as raízes cúbicas resolve-se a equação $z^3 = w$, para as raízes quartas, a equação $z^4 = w$, e assim por diante. Veja como extrair as raízes cúbicas do número 64, por exemplo

Resolve-se a equação $z^3 = 64$ sem substituir z por uma forma algébrica $a + bi$, representando os números z e 64 em suas formas polares:

$$z = (|z|, \theta) \Leftrightarrow 64 = (64, 0^\circ)$$

Assim, tem-se a equação: $(|z|, \theta)^3 = (64, 0^\circ)$.

Aplicando a fórmula de Moivre:

$$(|z|^3, 3\theta) = (64, 0^\circ)$$

Da relação de igualdade polar:

$$\begin{cases} |z|^3 = 64 \\ 3\theta = 0^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ com k inteiro} \end{cases}$$

Lembrando que $|z|$ é um número real positivo:

$$|z|^3 = 64 \Rightarrow |z| = \sqrt[3]{64} = 4$$

Isso garante que todas as raízes cúbicas de 64 têm o mesmo módulo igual a 4

Da comparação entre os argumentos:

$$3\theta = k \cdot 360^\circ \Rightarrow \theta = k \cdot 120^\circ$$

Como são procuradas três raízes cúbicas, tomam-se os três primeiros valores não negativos do número inteiro *k*:

- $k = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \cdot 120^\circ = 0^\circ$
- $k = 1 \Rightarrow \theta_1 = 1 \cdot 120^\circ = 120^\circ$
- $k = 2 \Rightarrow \theta_2 = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$

Observe que k = 3 implica $\theta^3 = 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, que é um arco côngruo ao arco nulo (0°).

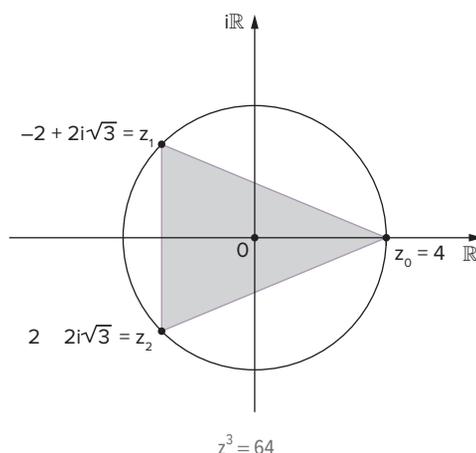
Então, z_0, z_1 e z_2 são as três soluções complexas da equação $z^3 = 64$ correspondentes aos argumentos θ_0, θ_1 e θ_2:

$$z_k = (4, \theta_k) \Rightarrow \begin{cases} z_0 = (4, \theta_0) = (4, 0^\circ) \\ z_1 = (4, \theta_1) = (4, 120^\circ) \\ z_2 = (4, \theta_2) = (4, 240^\circ) \end{cases}$$

Para obter a forma algébrica das raízes cúbicas de 64, basta que sejam calculados os senos e os cossenos dos argumentos de acordo com a forma trigonométrica de um número complexo. Veja a tabela:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\lvert z \rvert, \theta)$	$z = \lvert z \rvert(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$	$z = a + b \cdot i$
$z_0 = (4, 0^\circ)$	$z_0 = 4(\cos 0^\circ + i \cdot \text{sen} 0^\circ)$	$z_0 = 4$
$z_1 = (4, 120^\circ)$	$z_1 = 4(\cos 120^\circ + i \cdot \text{sen} 120^\circ)$	$z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$
$z_2 = (4, 240^\circ)$	$z_2 = 4(\cos 240^\circ + i \cdot \text{sen} 240^\circ)$	$z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$

No plano complexo os três pontos que representam geometricamente as raízes cúbicas de 64 determinam os vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência polar de raio 4.

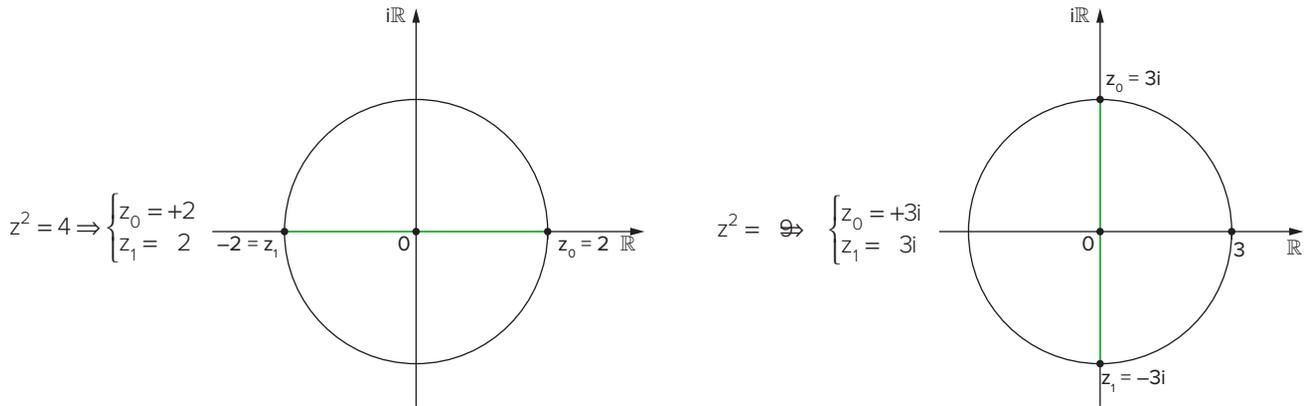
$z^3 = 64$

Sendo *n* um número inteiro tal que n ≥ 2, o processo apresentado neste exemplo pode ser generalizado para se resolver todas as equações do tipo $z^n = w$ no universo dos números complexos

$$z^n = w \Rightarrow \begin{cases} \lvert z \rvert = \sqrt[n]{\lvert w \rvert} \\ \text{Arg}(z_k) = \dfrac{\text{Arg}(w) + k \cdot 360^\circ}{n},\ k \in \{0,\ 1,\ \ ,\ n\ \ 1\} \end{cases}$$

Quando representadas no plano complexo, as soluções das equações do tipo $z^n = w$ dividem uma circunferência polar em arcos de mesma medida:

- Com n = 2 a circunferência fica dividida em dois arcos de $\dfrac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.
- Com n = 3 a circunferência fica dividida em três arcos de $\dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.
- Com n = 4 a circunferência fica dividida em quatro arcos de $\dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.
- Com n = 5 a circunferência fica dividida em cinco arcos de $\dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
- Com n = 6 a circunferência fica dividida em seis arcos de $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.
- ⋮

Equações de grau 2

Particularmente, quando $n = 2$ as soluções das equações do tipo $z^2 = w$ ficam representadas, no plano complexo, por dois pontos simétricos em relação à origem, que determinam as extremidades de um diâmetro da circunferência polar de raio $\sqrt{|w|}$. Exemplos:

Os exemplos mostrados até aqui tratam apenas de casos em que w é um número real. Veja, no próximo exemplo, como encontrar as raízes quadradas da unidade imaginária

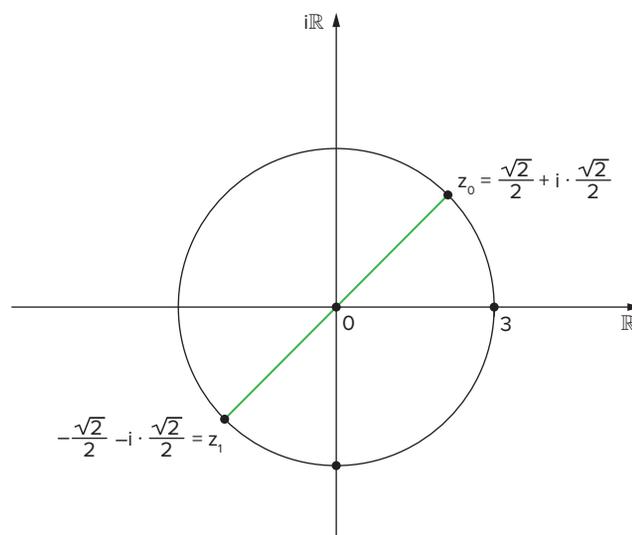
Para resolver a equação $z^2 = i$ consideram-se as formas polares de z e *i*:

$$(|z|, \theta)^2 = (1, 90°) \Leftrightarrow (|z|^2, 2\theta) = (1, 90°)$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 2\theta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{1} = 1 \\ \theta = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, \ k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

A tabela apresenta as soluções da equação $z^2 = i$ em suas várias formas:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\|z\|, \theta)$	$z = \|z\|(\cos\theta + i \quad \text{sen}\theta)$	$z = a + b \quad i$
$z_0 = (1, 45^\circ)$	$z_0 = 1(\cos 45^\circ + i \quad \text{sen} 45^\circ)$	$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_1 = (1, 225^\circ)$	$z_1 = 1(\cos 225^\circ + i \quad \text{sen} 225^\circ)$	$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções dessa equação:

Saiba mais

Mesmo quando w é um número real a resolução de uma equação do tipo $z^2 = w$ pode obedecer ao método das coordenadas polares

A equação $z^2 = 4$, por exemplo, fica:

$$(|z|, \theta)^2 = (4, 0°) \Leftrightarrow (|z|^2, 2\theta) = (4, 0°)$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 4 \\ 2\theta = 0° + k \cdot 360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = k \cdot 180°,\ k \quad \{0, 1\} \end{cases}$$

Veja a tabela com as soluções em suas várias formas:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\|z\|, \theta)$	$z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$	$z = a + b \cdot i$
$z_0 = (2, 0°)$	$z_0 = 2(\cos 0° + i \cdot \text{sen} 0°)$	$z_0 = +2$
$z_1 = (2, 180°)$	$z_1 = 2(\cos 180° + i \cdot \text{sen} 180°)$	$z_1 = \quad 2$

A equação $z^2 = -9$, por exemplo, fica:

$$(|z|, \theta)^2 = (9, 180°) \Leftrightarrow (|z|^2, 2\theta) = (9, 180°)$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 9 \\ 2\theta = 180° + k \cdot 360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{9} = 3 \\ \theta = 90° + k \cdot 180°,\ k \quad \{0, 1\} \end{cases}$$

Veja a tabela com as soluções em suas várias formas:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\|z\|, \theta)$	$z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$	$z = a + b \cdot i$
$z_0 = (3, 90°)$	$z_0 = 3(\cos 90° + i \cdot \text{sen} 90°)$	$z_0 = +3i$
$z_1 = (3, 270°)$	$z_1 = 3(\cos 270° + i \cdot \text{sen} 270°)$	$z_1 = -3i$

Equações de grau n > 2

Sempre que $n > 2$ as soluções das equações do tipo $z^n = w$ determinam, no plano complexo, os vértices de um polígono regular com exatamente *n* lados. Assim:

- $z^3 = w$ têm soluções complexas que determinam um triângulo equilátero.
- $z^4 = w$ têm soluções complexas que determinam um quadrado.
- $z^5 = w$ têm soluções complexas que determinam um pentágono regular
- $z^6 = w$ têm soluções complexas que determinam um hexágono regular.
- ⋮

Cada um desses polígonos encontra-se inscrito em uma circunferência polar cujo raio mede:

$$\rho = \sqrt[n]{|w|}$$

Veja, por exemplo, como resolver e representar graficamente as soluções da equação do 3º grau $z^3 = -8i$, pelo método das coordenadas polares.

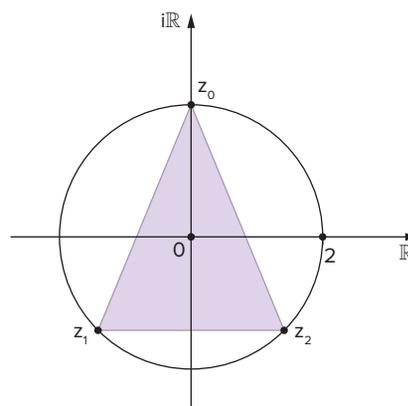
Como $|-8i| = 8$ e $\text{Arg}(-8i) = 270°$, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$:

$$z^3 = -8i \Leftrightarrow (|z|, \theta)^3 = (8, 270°) \Leftrightarrow (|z|^3, 3\theta) = (8, 270°)$$

$$\begin{cases} |z|^3 = 8 \\ 3\theta = 270° + k \cdot 360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = 90° + k \cdot 120°,\ k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

A tabela apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\|z\|, \theta)$	$z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$	$z = a + b \cdot i$
$z_0 = (2, 90°)$	$z_0 = 2(\cos 90° + i \cdot \text{sen} 90°)$	$z_0 = 2i$
$z_1 = (2, 210°)$	$z_1 = 2(\cos 210° + i \cdot \text{sen} 210°)$	$z_1 = \quad \sqrt{3} \quad i$
$z_2 = (2, 330°)$	$z_2 = 2(\cos 330° + i \cdot \text{sen} 330°)$	$z_2 = \sqrt{3} - i$

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções desta equação:

Exercício resolvido

39 Unesp As soluções da equação $z^3 = i$, onde z é um número complexo e $i^2 = \quad 1$, são:

A $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = \quad i$

B $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

C $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

D $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

E $z = \pm\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = \quad i$.

FRENTE 2

Resolução:

Sendo θ o argumento principal do número z, temos que z = (|z|, θ). Então, escrevendo-se o número i na forma polar, a equação $z^3 = i$ implica:

$$(|z|^3, 3\theta) = (1, 90^\circ) \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\theta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \theta = 30^\circ + k \cdot 120^\circ,\ k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Assim, temos:

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = (1, 30^\circ) = \cos 30^\circ + i \cdot \text{sen}\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = (1, 150^\circ) = \cos 150^\circ + i \cdot \text{sen}\,150^\circ = \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = (1, 270^\circ) = \cos 270^\circ + i \cdot \text{sen}\,270^\circ = -i$$

Alternativa: **C**

Considere a equação do 4º grau $z^4 = -16$, por exemplo, e veja como resolver e representar suas soluções pelo método das coordenadas polares.

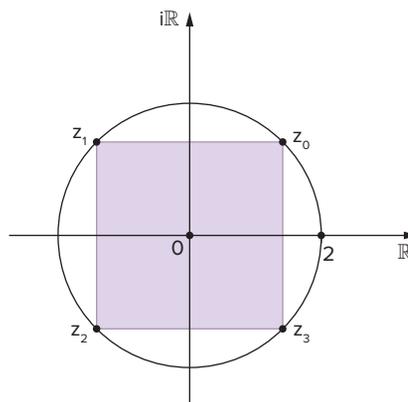
Como |–16| = 16 e Arg(–16) = 180°, sendo θ = Arg(z):

$$z^4 = \quad 16 \Leftrightarrow (|z|, \theta)^4 = (16, 180^\circ) \Leftrightarrow (|z|^4, 4\theta) = (16, 180^\circ)$$

$$\begin{cases} |z|^4 = 16 \\ 4\theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \theta = 45^\circ + k \cdot 90^\circ,\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

A tabela apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\|z\|, \theta)$	$z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$	$z = a + b \cdot i$
$z_0 = (2, 45^\circ)$	$z_0 = 2(\cos 45^\circ + i \cdot \text{sen}\,45^\circ)$	$z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$z_1 = (2, 135^\circ)$	$z_1 = 2(\cos 135^\circ + i \cdot \text{sen}\,135^\circ)$	$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$z_2 = (2, 225^\circ)$	$z_2 = 2(\cos 225^\circ + i \cdot \text{sen}\,225^\circ)$	$z_2 = \quad \sqrt{2} \quad i\sqrt{2}$
$z_3 = (2, 315^\circ)$	$z_3 = 2(\cos 315^\circ + i \cdot \text{sen}\,315^\circ)$	$z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções dessa equação:

Considere agora a equação do 4º grau $z^4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, por exemplo.

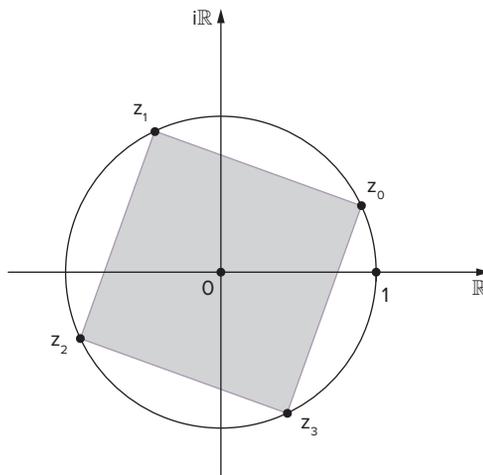
Como $\left|\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ e $\text{Arg}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 120^\circ$, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$:

$$z^4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (|z|, \theta)^4 = (1, 120^\circ) \Leftrightarrow (|z|^4, 4\theta) = (1, 120^\circ)$$

$$\begin{cases} |z|^4 = 1 \\ 4\theta = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \theta = 30^\circ + k \cdot 90^\circ,\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

A tabela apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\lvert z\rvert, \theta)$	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$	$z = a + b \cdot i$
$z_0 = (1, 30^\circ)$	$z_0 = 1(\cos 30^\circ + i \cdot \text{sen} 30^\circ)$	$z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$
$z_1 = (1, 120^\circ)$	$z_1 = 1(\cos 120^\circ + i \cdot \text{sen} 120^\circ)$	$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
$z_2 = (1, 210^\circ)$	$z_2 = 1(\cos 210^\circ + i \cdot \text{sen} 210^\circ)$	$z_2 = \frac{\sqrt{3}\quad i}{2}$
$z_3 = (1, 300^\circ)$	$z_3 = 1(\cos 300^\circ + i \cdot \text{sen} 300^\circ)$	$z_3 = \frac{1\quad i\sqrt{3}}{2}$

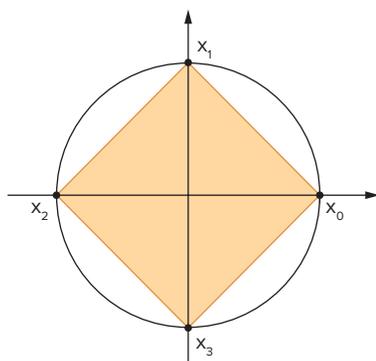
A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções da equação:

Exercício resolvido

40 Calcule a área do polígono cujos vértices são as representações geométricas das soluções de $x^4 \quad 81 = 0$ no plano complexo.

Resolução:

$p(x) = x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i)$

$x^4 \quad 81 = 0 \Leftrightarrow (x \quad 3)(x + 3)(x \quad 3i)(x + 3i) = 0 \Rightarrow S = \{3, \quad 3, 3i, \quad 3i\}$

Sendo $x_0 = 3$, $x_1 = 3i$, $x_2 = \ \ 3$ e $x_3 = \ \ 3i$, tem-se:

O quadrilátero cujos vértices são os afixos dos complexos x_0, x_1, x_2 e x_3 é um quadrado inscrito numa circunferência de raio 3.
Portanto, o lado do quadrado mede $3\sqrt{2}$ unidades de comprimento e sua área é igual a 18 unidades de área.

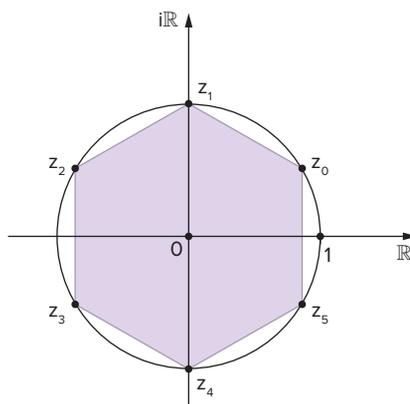
Para o último exemplo, considere a equação do 6º grau $z^6 = -1$.
Como $|-1| = 1$ e $\text{Arg}(-1) = 180^\circ$, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$:

$$z^6 = -1 \Leftrightarrow (|z|, \theta)^6 = (1, 180^\circ) \Leftrightarrow (|z|^6, 6\theta) = (1, 180^\circ)$$

$$\begin{cases} |z|^6 = 1 \\ 6\theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[6]{1} = 1 \\ \theta = 30^\circ + k \cdot 60^\circ, \ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$$

A tabela apresenta as soluções dessa equação em suas várias formas:

Forma polar	Forma trigonométrica	Forma algébrica
$z = (\|z\|, \theta)$	$z = \|z\|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$	$z = a + b \cdot i$
$z_0 = (1, 30^\circ)$	$z_0 = 1(\cos 30^\circ + i \cdot \text{sen} 30^\circ)$	$z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$
$z_1 = (1, 90^\circ)$	$z_1 = 1(\cos 90^\circ + i \cdot \text{sen} 90^\circ)$	$z_1 = i$
$z_2 = (1, 150^\circ)$	$z_2 = 1(\cos 150^\circ + i \cdot \text{sen} 150^\circ)$	$z_2 = \frac{+\sqrt{3}\ \ i}{2}$
$z_3 = (1, 210^\circ)$	$z_3 = 1(\cos 210^\circ + i \cdot \text{sen} 210^\circ)$	$z_3 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$
$z_4 = (1, 270^\circ)$	$z_4 = 1(\cos 270^\circ + i \cdot \text{sen} 270^\circ)$	$z_4 = -i$
$z_5 = (1, 330^\circ)$	$z_5 = 1(\cos 330^\circ + i \cdot \text{sen} 330^\circ)$	$z_5 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

A figura a seguir mostra a representação geométrica das soluções dessa equação:

Revisando

1 Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$.

2 Sendo $z = 4 \quad 3i$ e $= 2 + i$, determine:

a) $z + w$ b) $z \quad w$ c) $z \quad w$ d) z^2 e) $w \cdot \overline{w}$ f) $\frac{z}{w}$

3 **Fuvest** Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{\alpha+2i}$ é zero, então α é

A -4 B -2 C 1 D 2 E 4

4 **Unicamp 2013** Chamamos de unidade imaginária e denotamos por **i** o número complexo tal que $i^2 = \quad 1$ Então $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \quad + i^{2013}$ vale:

A 0 B 1 C i D $1 + i$

FRENTE 2

5 Sendo $z = x + y \cdot i$ um número complexo cujo afixo é da forma $(\alpha^2 \quad 1, \alpha + 1)$ com α real Determine α para que o número z seja:

a) real

b) imaginário puro

6 **Fuvest 2011 (Adapt.)** Sendo i a unidade imaginária:

a) Determine as partes real e imaginária do número complexo $z_0 = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{2i} \quad i.$

b) Determine os números complexos w tais que $z_0 \cdot w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0 \cdot w$ sejam iguais

7 Escreva os números $z = 1 + i$ e $w = -2 + 2i$ nas formas trigonométrica e polar.

8 Utilizando as formas trigonométricas ou as formas polares dos números complexos z e w obtidas no exercício anterior, determine os valores de:

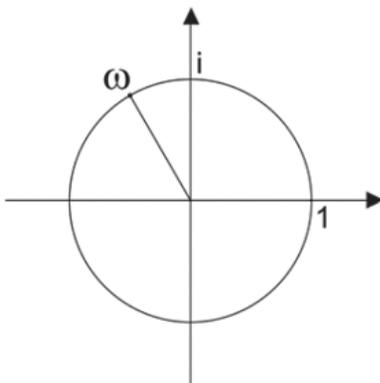
a) $z \cdot w$

b) $\frac{z}{w}$

c) $z^5 + w^3$

d) $\frac{z^5}{w^3}$

9 Determine o menor inteiro positivo *n* para o qual $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ seja real.

10 **Fuvest** A figura representa o número $\omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ no plano complexo, sendo $i = \sqrt{\ 1}$ a unidade imaginária.

Nestas condições,

a) determine as partes real e imaginária de $\frac{1}{\omega}$ e de ω^3.

b) represente $\frac{1}{\omega}$ e ω^3 na figura.

c) determine as raízes complexas da equação $z^3 - 1 = 0$.

FRENTE 2

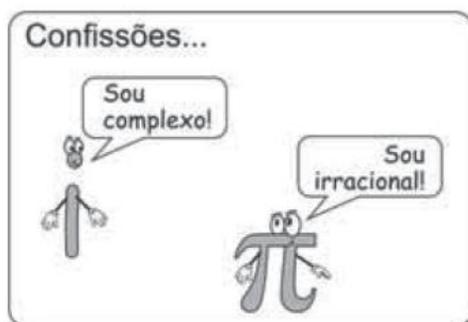
Exercícios propostos

1 Ifal 2017 Dentro do conjunto dos números complexos, o conjunto solução da equação $x^2 + 625 = 0$ é

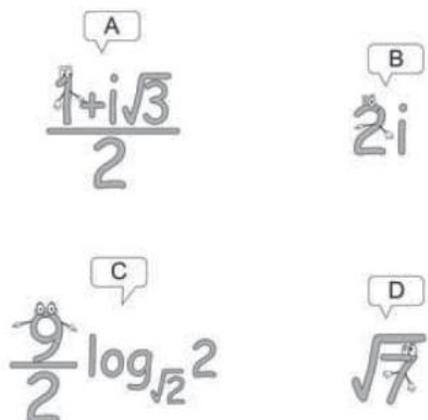
A $S = \{\ 5, 5\}$.
B $S = \{\ 25, 25\}$.
C $S = \{\ 5i, 5i\}$.
D $S = \{\ 25i, 25i\}$.
E $S = \varnothing$.

2 O conjunto solução da equação $x^2 - 5ix + 6 = 0$, em que i é a unidade imaginaria, é:

A $S = \{2i, 3i\}$
B $S = \{-i, 6i\}$
C $S = \{-2, -3\}$
D $S = \{i, 6i\}$
E $S = \{2i, 3i\}$

3 UEL 2019 Uma estratégia para obter efeito humorístico em quadrinhos é atribuir a objetos abstratos características e ações tipicamente humanas. A figura a seguir é um exemplo de aplicação desse recurso.

Adaptado de somatematica.com.br

Supondo que cada número diga uma verdade matemática sobre si mesmo, relacione as frases (de I a IV) aos balões de diálogo (de A a D).

I Meu cubo é irracional
II Sou racional
III Sou puramente imaginário.
IV Meu inverso multiplicativo coincide com meu con jugado

Assinale a alternativa que contém a associação correta.

A I-B, II-C, III-A, IV-D.
B I-C, II-B, III-A, IV-D.
C I-D, II-A, III-C, IV-B.
D I-D, II-A, III-B, IV-C.
E I-D, II-C, III-B, IV-A.

4 Mackenzie 2013 Em $\mathbb{C}$ o conjunto solução da equação

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x-1 \\ 2x & 2x & 2x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 5 \text{ é:}$$

A $\{2 + 2i, 2 \quad 2i\}$
B $\{-1 \quad 4i, -1 + 4i\}$
C $\{1 + 4i, 1 \quad 4i\}$
D $\{-1 + 2i, \ 1 \quad 2i\}$
E $\{2 \quad 2i, 1 + 2i\}$

5 IFCE 2016 Sendo i a unidade imaginária tal que $i^2 = \ 1$, são dados os números complexos $z_1 = 9 + 3i$ e $z_2 = \ 2 + i$ Ao calcular corretamente o produto $z_1 \cdot z_2$, obtemos o número

A $21 \quad 6i$
B $\ 18 \quad 6i$
C $\ 18 + 3i$
D $18 \quad 3i$
E $\ 21 + 3i$

6 Ifal 2018 O quociente entre os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 \quad i$ é

A 1.
B i.
C 0.
D 2.
E 2i.

7 Mackenzie 2017 (Adapt.) O resultado da expressão $\frac{3+2i}{1 \quad 4i}$ na forma $x + yi$ é

A $-\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$
B $\frac{11}{15} + \frac{14}{15}i$
C $\frac{11}{17} - \frac{14}{17}i$
D $\frac{11}{15} \quad \frac{14}{15}i$
E $3 \quad \frac{1}{2}i$

8 Unisc 2017 A parte real do número complexo $z = \frac{1+(3i)^2}{1 \quad i}$ é

A 1
B –1
C 2
D –2
E $\quad 4$

9 UEPB 2014 O produto dos números complexos $(3 \quad i)$ $(x + 2yi)$ é um número real quando o ponto $P(x, y)$ está sobre a reta de equação:

A $6x + y = 0$
B $6x \quad y = 0$
C $x + 6y = 0$
D $6y \quad x = 0$
E $3y \quad x = 0$

10 Uern 2015 Considere a igualdade 2z   i = $\overline{z}$ + 1. É correto afirmar que o número complexo z, da forma z = a + bi, é

A $1+\frac{i}{3}$.

B $2+\frac{i}{2}$

C 1 + 3i

D 3 + 2i.

11 UPF 2016 O número complexo z, tal que 5z + $\overline{z}$ = 12 + + 16i, é igual a:

A –2 + 2i

B 2 – 3i

C 3 + i

D 2 + 4i

E 1 + 2i

12 Uern 2012 Seja o complexo z = (2 + xi) · (y – 2i). Considerando que z tem parte real igual a 8 e parte imaginária igual a (–1), então o módulo da diferença entre os valores de x e y, é

A 1.

B 2.

C 3.

D 4.

13 PUC-SP 2018 Considere os números complexos z_1 = a + bi, z_2 = –b + ai e z_3 = –b + 3i, com *a* e *b* núme ros inteiros Sabendo que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, o valor de $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ é igual a

A 1

B 1

C i

D i

14 Cefet-MG 2015 Considere as afirmações sobre as solu ções da equação z^2 $\overline{z}$ = 0, com z ∈ ℂ:

I. Possui exatamente duas soluções.

II. A soma de todas as soluções é igual a 1.

III. O módulo de todas as soluções é menor ou igual a 1.

É(são) verdadeira(s) a(s) afirmação(ões):

A I

B III

C I, II

D II, III

E I, II, III

15 Sendo *a* e *b* números inteiros e *i* a unidade imaginária, os números complexos z = a + bi que satisfazem a igualdade $i \cdot z^2 + 6 \cdot \overline{z} = 8 \cdot i$ são tais que

A Re(z) > 0

B Im(z) > 0

C Re(z) < 0

D Im(z) < 0

E Im(z) = 0

16 Uepa 2015 Um dos resultados importantes da produção de conhecimentos reside na possibilidade que temos de fazer a interação de múltiplos saberes. O conceito de número complexo é um bom exemplo dessa possibilidade exploratória da produção científica, ao permitir relações com álgebra, geometria plana, geometria analítica, trigonometria, séries e aritmética. Neste sentido, considere os números complexos z_1 = 2 + 2i, z_2 = 5 + 6i, z_3 = –4 + 18i e os números reais k_1 e k_2 tais que a soma dos números complexos k_1z_1 e k_2z_2 resulta o complexo z_3. Nestas condições, o valor de $k_1^{k_2}$ é:

A 9

B 8

C 1

D $\frac{1}{8}$

E $\frac{1}{9}$

17 Fuvest Sendo i a unidade imaginária ($i^2 = -1$) pergunta se:

Quantos números reais *a* existem para os quais $(a + i)^4$ é um número real?

A 1

B 2

C 3

D 4

E infinitos

18 Mackenzie 2017 Se $\frac{2+i}{\beta+2i}$ tem parte imaginária igual a zero, então o número real β é igual a

A 4

B 2

C 1

D –2

E –4

19 Unesp Considere o número complexo z = i, onde i é a unidade imaginária.

O valor de $z^4+z^3+z^2+z+\frac{1}{z}$ é

A –1

B 0

C 1

D i

E –i

20 Uece 2017 Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a –1, então, o valor de $5 \cdot i^{227} + i^6 - i^{13}$ é igual a

A 1 + i.

B 4i – 1.

C –6i – 1.

D –6i

21 Unicamp 2014 O módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a

A $\sqrt{2}$.

B 0.

C $\sqrt{3}$.

D 1.

22 **Unicamp 2016** Considere o número complexo $z = \frac{1+ai}{a \quad i}$ onde *a* é um número real e i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O valor de z^{2016} é igual a

A a^{2016}.
B 1.
C $1 + 2016i$.
D i.

23 **UEL 2019** Leia o texto a seguir.

Foi ali no meio da praça [ ] Zuzé Paraza, pintor reformado, tossiu sacudindo a magreza do seu todo corpo. Então, assim contam os que viram, ele vomitou um corvo vivo. O pássaro saiu inteiro das entranhas dele. [...] Estivera tanto tempo lá dentro que já sabia falar

COUTO, Mia. O último aviso do corvo falador. *In: Vozes anoitecidas*. São Paulo: Companhia das Letras, 2015. p. 29.

Zuzé desafiou o corvo falador. De dentro de seu gabinete, Zuzé mostrou ao corvo a seguinte tabela.

A	B	C
7	9	0
20	5	1
24	6	2
2	13	3

Zuzé solicita ao corvo que pense em uma equação matemática que relacione, linha a linha, os números das colunas A, B e C da tabela. Prontamente o corvo falante responde: $i^{A+B} = i^C$, onde i é a unidade imaginária.
Com base na equação dita pelo corvo e sabendo que A, B e C são números naturais, considere as afirmativas a seguir.

I. Se A + B é múltiplo de 4 e C = 4, então A, B e C satisfazem a equação.
II. Se A = 26, B = 44 e C = 30, então A, B e C satisfazem a equação.
III. Se A = B = 1, então a única possibilidade para que A, B e C satisfaçam a equação é C = 6.
IV. Se A e B são números ímpares e C = 1, então A, B e C satisfazem a equação.

Assinale a alternativa correta.

A Somente as afirmativas I e II são corretas.
B Somente as afirmativas I e IV são corretas.
C Somente as afirmativas III e IV são corretas.
D Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
E Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.

24 **UEL 2015** Leia o texto a seguir.

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual) Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultanea mente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Adaptado de: CARNEIRO, J. P. "A Geometria e o Ensino dos Números Complexos" Revista do Professor de Matemática 2004 v.55 p 18

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, uma composição de rotação dos pontos P(–3, 4) e Q(2, –3) representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$

A $-18 + 17i$
B $-6 - 12i$
C $-1 + i$
D $5 + 7i$
E $6 + 17i$

25 **Uefs 2018** Dado um número complexo $z = a + bi$ com *a* e *b* reais, define se afixo de z como o ponto do plano complexo de coordenadas (a, b) Sejam A, B e C os afixos dos números complexos $z_A = 14 + 4i$, $z_B = 6 \quad 2i$ e $z_C = 16 \quad 2i$ A área do triângulo de vértices A, B e C é

A 18
B 24.
C 30
D 36
E 40

26 **UFRGS 2019** Dados os números complexos $z_1 = (2, \quad 1)$ e $z_2 = (3, x)$ sabe-se que $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Então x é igual a

A 6.
B $-\frac{3}{2}$.
C 0.
D $\frac{3}{2}$.
E 6.

27 A soma dos módulos dos números complexos $z = 3 + 4i$ e $w = \quad 5 + 12i$ é

A 14
B 18
C 24
D 28
E 32

28 A soma do menor argumento positivo do número complexo $u = \quad 2 \quad 2i$ com o maior argumento negativo do número complexo $v = 1 \quad \sqrt{3}i$ é:

A 45°
B 60°
C 75°
D 135°
E 165°

29 **Insper 2012** Considere um número complexo z, de módulo 10, tal que $z = (k + i)^2$ em que K é um número real. A parte real desse número complexo é igual a

A $5\sqrt{3}$.
B 8
C $5\sqrt{2}$
D 6.
E 5.

30 **IFSP 2011** Sendo **i** a unidade imaginária, considere os números complexos $z = 1 + i$ e $w = z^2 - z$. Um argumento de w é

A $\frac{\pi}{3}$

B $\frac{\pi}{2}$

C $\frac{2\pi}{3}$

D $\frac{3\pi}{4}$

E $\frac{5\pi}{4}$

31 **Uern 2013** Seja $z = a + bi$ um número complexo, tal que $4z - zi + 5 = -1 + 10i$. Assim, o módulo do complexo z é

A $\sqrt{2}$

B $2\sqrt{2}$

C $3\sqrt{2}$

D $4\sqrt{2}$

32 **Cefet-MG 2011** A medida do argumento dos números complexos $z = x + yi$ pertencentes à reta $y = x$, em radianos, é

A $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$.

B $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

C $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{4}$

D $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$.

33 **Uece 2014** Se x e y são números reais não nulos, pode-se afirmar corretamente que o módulo do número complexo $z = \frac{x - iy}{x + iy}$ é igual a

A 1

B 2

C $x^2 + y^2$

D $|xy|$

34 **Mackenzie 2016** Se w é um número complexo, satisfazendo $Re(w) > 0$ e $(w + i)^2 + |\overline{w} + i|^2 = 6$, então w é igual a

A $1 \quad i$

B $1 + i$

C $1 \quad i$

D 1

E i

35 **UFRGS 2018** Considere as seguintes afirmações sobre números complexos.

I. $(2 + i)(2 \quad i)(1 + i)(1 \quad i) = 10$

II. $\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}i\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

III Se o módulo do número complexo z é 5, então o módulo de 2z é 10

Quais afirmações estão corretas?

A Apenas I

B Apenas II

C Apenas III

D Apenas I e III

E I, II e III

36 O módulo do número complexo que resulta do quociente $\frac{4 + 7i}{8 - i}$ vale

A 10

B 8

C 5

D 2

E 1

37 **Ifal 2016** O número complexo $z = (x - 1) + (x + 6)i$ tem módulo $|z| = 13$. Sendo x um número real positivo, qual o valor de x?

A 2.

B 3.

C 4.

D 5.

E 6.

38 **UEPB 2012** Dado o número complexo $z = x + yi$, o sistema $\begin{cases} |z| = 5 \\ |i \cdot z \;\; = 3| \;\; 2 \end{cases}$ tem como solução

A $z = 5i$

B $z = -5i$

C $z = 5$

D $z = -5$

E $z = 5 + 5i$

39 **UEPB 2013** O módulo e o argumento do número complexo $z = (1 + i)(1 - i)^2$ são respectivamente:

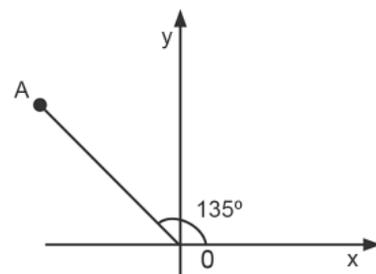
A $\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B $\sqrt{2}$ e $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C $2\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D $2\sqrt{2}$ e $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

E $2\sqrt{2}$ e $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

40 **PUC RS 2013** Na figura abaixo, o ponto **A** é o afixo de um número complexo $\mathbb{Z}$ no plano de Argand-Gauss.

Se a distância do ponto **A** até a origem O é 4, então a diferença entre **z** e o seu conjugado é igual a

A $-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

B $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

C $4\sqrt{2}i$

D $4\sqrt{2}i$

E $4\sqrt{2}$

41 O módulo do número complexo $z = \frac{10+10i}{6-8i} + \frac{60}{12+9i}$ é:

A 2
B 4
C $\sqrt{5}$
D $\sqrt{10}$
E 10

42 **PUC SP 2017** Considere os números complexos $z_1 = \ \ 1 \ \ \ i$, $z^2 = k + i$, com k um número real positivo e $z_3 = z_1 \cdot z_2$ Sabendo que $|z_3| = \sqrt{10}$, é correto afirmar que

A $|z_1 + z_2| = \sqrt{7}$
B $\frac{z_2}{z_3} = \frac{-1+i}{2}$
C O argumento de z_2 é 225°.
D $z_3 \cdot z_2 = -1 + 2i$

43 **Fuvest** Dentre os números complexos $z = a + bi$, não nulos, que têm argumento igual a $\frac{\pi}{4}$ aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é

A $1 + i$
B $1 - i$
C $-1 + i$
D $\sqrt{2} + 2i$
E $-\sqrt{2} \quad 2i$

44 **Fuvest** O número complexo $z \neq 0$ e seu inverso $\frac{1}{z}$ possuem o mesmo módulo. Conclui-se que:

A z e $\frac{1}{z}$ são conjugados.
B $z + \frac{1}{z} = 1$
C z e $\frac{1}{z}$ são reais.
D Esse módulo é 2.
E $z^2 = 1$

45 **FGV-SP** Seja um número complexo $z = (x \quad 2i)^2$, no qual x é um número real. Se o argumento principal de z é 90°, então $\frac{1}{z}$ é igual a:

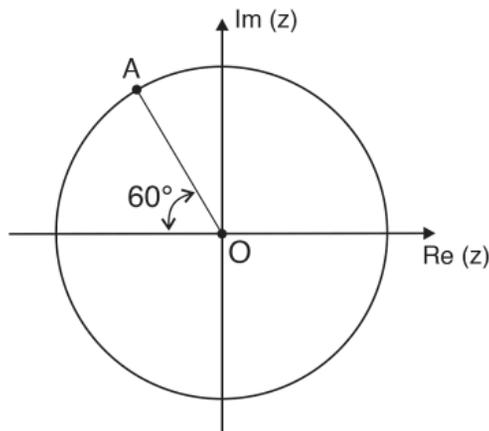
A $\frac{-i}{8}$
B $-8i$
C $4i$
D $-1 + 4i$
E $4 \quad i$

46 **PUC-SP 2017** Em relação ao número complexo $z = i^{87} \cdot \left(i^{105} + \sqrt{3}\right)$ é correto afirmar que

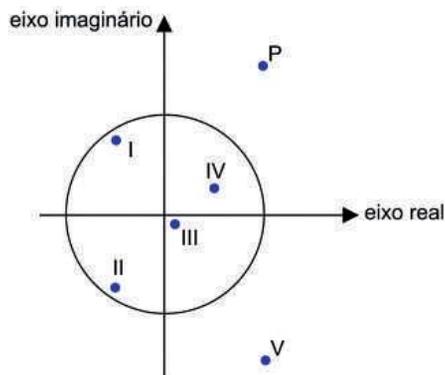
A sua imagem pertence ao 3º quadrante do plano complexo
B é imaginário puro.
C o módulo de z é igual a 4
D seu argumento é igual ao argumento do número complexo $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

47 **Uefs 2016** Os números complexos z e w têm módulos $|z| = |w| = 1$. Se z, w e seu produto $z \cdot w$ formam, no plano de Argand-Gauss, os vértices de um triângulo equilátero, é correto afirmar que

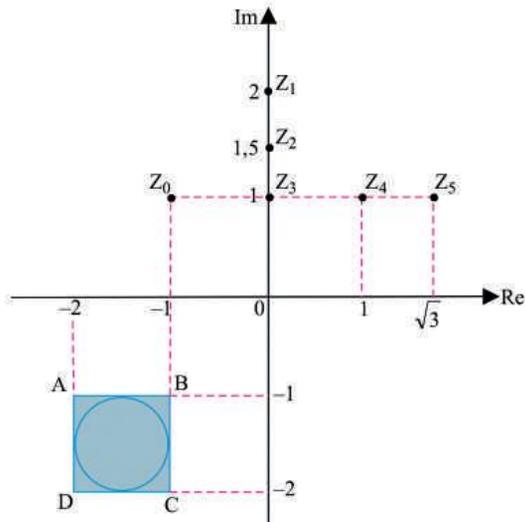
A z é real.
B $w = \pm 1$ ou $w = \pm i$.
C $z \cdot w$ é um imaginário puro.
D a parte real de w é positiva.
E z e w são complexos conjugados.

48 **PUC-SP 2015** No plano complexo de origem O, representado na figura abaixo, o ponto A é a imagem de um número complexo u cujo módulo é igual a 4.

Se B é o ponto imagem do complexo $v = \frac{u}{i}$, então é correto afirmar que:

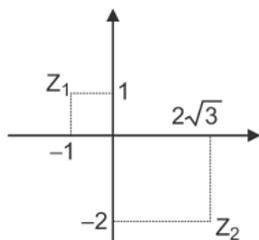
A O módulo de $u + v$ é igual a $4\sqrt{2}$
B O módulo de $u - v$ é igual a $2\sqrt{2}$.
C B pertence ao terceiro quadrante.
D B pertence ao quarto quadrante.
E O triângulo AOB é equilátero.

49 **FGV-SP 2017** Seja z um número complexo cujo afixo P está localizado no 1º quadrante do plano complexo, e sejam I, II, III, IV e V os afixos de cinco outros números complexos, conforme indica a figura seguinte.

Se a circunferência traçada na figura possui raio 1 e está centrada na origem do plano complexo, então o afixo de $\frac{1}{z}$ pode ser

A I
B II
C III
D IV
E V

50 FGV-SP 2013 No plano Argand-Gauss estão indicados um quadrado ABCD e os afixos dos números complexos Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, e Z_5.

Se o afixo do produto de Z_0 por um dos outros cinco números complexos indicados é o centro da circunferência inscrita no quadrado ABCD, então esse número complexo é

A Z_1. B Z_2. C Z_3. D Z_4. E Z_5.

51 UFSJ 2012 (Adapt.) Na figura abaixo, estão representados os números complexos Z_1 e Z_2 por meio de seus afixos A e B, respectivamente.

Considerando essa figura, é **CORRETO** afirmar que

A o afixo de $(Z_1 \cdot Z_2)$ é um ponto do 2º quadrante.

B $(Z_1)^2 = 2i$

C $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{3}$

D o afixo de $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ não é um ponto do 2º quadrante

52 Ifal 2017 Escrevendo o número complexo $z = 1 + i$ na forma trigonométrica, temos

A $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$.

B $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

D $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$.

E $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

53 Ifal 2016 Podemos dizer que uma forma trigonométrica de representar o número complexo $\dfrac{5+5i}{2-2i}$ é

A $Z = 2 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$

B $Z = 5 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C $Z = \dfrac{5}{2} \cdot (\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$

D $Z = \dfrac{5}{2} \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

E $Z = \dfrac{2}{5} \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

54 Calculando $\dfrac{i}{1+i} \quad \dfrac{3}{1 \quad i}$, obtemos o complexo:

A $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

B $2\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

C $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

D $2\operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

E $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

55 Mackenzie 2014 O número complexo $z = a + bi$ tal que z, $\dfrac{1}{z}$ e $1 - z$ tenham o mesmo módulo é

A $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

B $z = 2 \pm \sqrt{3}\,i$

C $z = 1 \pm \sqrt{3}\,i$

D $z = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

E $z = \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{3}i$

56 Uece 2016 No sistema de coordenadas cartesianas usual com origem no ponto O, considere os números complexos, na forma trigonométrica, dados por $z = 2(\cos 60^\circ + i\operatorname{sen} 60^\circ)$ e $w = 2(\cos 30^\circ + i\operatorname{sen} 30^\circ)$ Os pontos do plano que representam estes números e a origem O são vértices de um triângulo cuja medida da área é

A 1,0 u a

B 0,5 u.a

C 2,0 u a

D 1,5 u a

57 IFSul 2017 De uma forma criativa, após um exame, o professor entregou as notas expressas por números complexos aos seus alunos. Para cada aluno descobrir sua nota, era necessário calcular o módulo (observe que o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é calculado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ do número complexo descrito no seu exame.

Dessa forma, as notas representadas pelos números complexos $N_1 = 4 \cdot \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

$N_2 = 3 \cdot \left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$ e $N_3 = \left(\dfrac{5}{2} + i\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2} \quad i\right) \quad \dfrac{3}{4}i$

aproximados são, respectivamente,

A 4; 3 e 3,5

B 3; 4 e 3,5

C 3; 4 e 5

D 4; 3 e 5

FRENTE 2

58 **Unioeste 2013** Considere os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Assim, é correto afirmar que

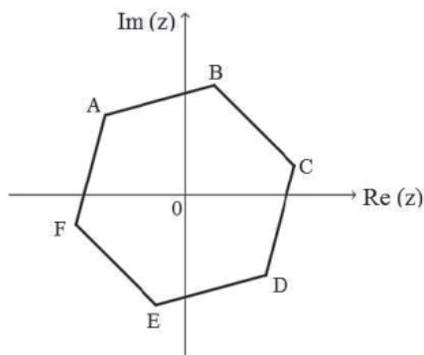
A se $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 \quad i$, então $z_1z_2 = 3 \quad 2i$.

B se $z_1 = 2 + 2i$, então $|z_1| = 2\sqrt{2}$.

C $z_1 + z_2 = (a + d) + (b + c)i$.

D a forma polar de $z_1 = \quad 1 \quad 2i$ é $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$.

E qualquer que seja z_1, tem-se que $z_1^4 = a^4 + b^4i$

59 **UPF 2018** Na figura abaixo, está representado, no plano complexo, um hexágono regular cujos vértices são imagens geométricas das *n* raízes de índice *n* de um número complexo z

O vértice A tem coordenadas (–1, 1) Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D?

A $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

B $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]$

C $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]$

D $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$

E $2\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right]$

60 **Ifal 2011** O valor da potência $(1 \quad i)^{10}$ é:

A 11i.
B 5i.
C 32i.
D 50i.
E 1 5i.

61 Sendo $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, então z^{10} é igual a

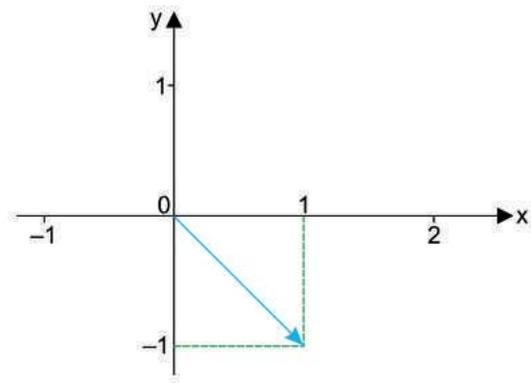
A $\frac{\sqrt{3} \quad i}{2}$

B $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{1 \quad i\sqrt{3}}{2}$

D $\frac{\sqrt{3} \quad i}{2}$

E $\frac{1 \quad i\sqrt{3}}{2}$

62 **FGV-SP 2016** Observe o plano Argand-Gauss a seguir:

Elevando se a 2015 o número complexo indicado nesse plano de Argand-Gauss, o afixo do número obtido será um ponto desse plano com coordenadas idênticas e iguais a

A 2^{2015}
B 2^{1007}
C 1
D $2^{\quad 2015}$
E -2^{1007}

63 **FGV-SP** Sendo i a unidade imaginária, então $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$ é igual a

A –1024.
B –1024i.
C 0
D 1024.
E E1024i.

64 **UEL** O complexo $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ escrito na forma trigonométrica $a + bi = \rho[\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)]$ é:

A $\cos(0) + i\text{sen}(0)$

B $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

C $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

D $3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

E $2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

65 **Uece 2017** Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a –1, e *n* é um número natural maior do que 2, então, pode-se afirmar corretamente que $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^n$ é um número real sempre que

A *n* for ímpar.
B *n* for um múltiplo de 4.
C *n* for um múltiplo de 3.
D *n* for um múltiplo de 5.

66 UFRGS O menor número inteiro positivo n para o qual a parte imaginária do número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{8}\right)^n$ é negativa é

A 3.
B 4.
C 6.
D 8.
E 9.

67 Unicamp 2015 Sejam x e y números reais tais que $x+yi=\sqrt{3+4i}$, onde i é a unidade imaginária O valor de $x \cdot y$ é igual a

A 2
B 1
C 1
D 2

68 Mackenzie Se y = 2x, sendo $x=\frac{1+i}{1\quad i}$ e $i=\sqrt{\quad 1}$, o valor de $(x+y)^2$ é

A 9i
B 9 + i
C 9
D 9
E 9 i

69 Unigranrio 2017 Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3+1=0$, tomando como base o conjunto dos números complexos. Ao representarmos geometricamente essas raízes no plano de Argand-Gauss, obtemos um triângulo, cujos vértices são os afixos de x_1, x_2 e x_3. A área do triângulo é:

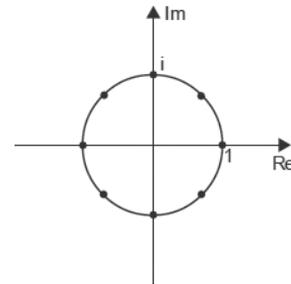
A $\frac{\sqrt{3}}{4}$
B $\frac{3}{4}$
C $\frac{2\sqrt{3}}{4}$
D $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
E $\frac{3}{2}$

70 PUC-RS 2015 Foi construído, no plano de Argand Gauss, um polígono cujos vértices estão sobre as raízes do polinômio $p(z) = z^4 \quad 16$ em $\mathbb{C}$. A área desse polígono, em unidades de área, é

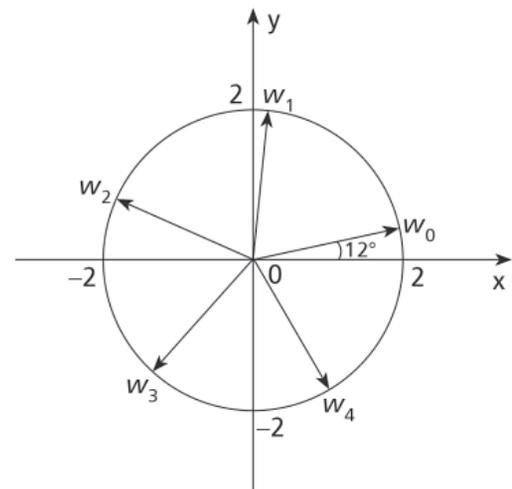
A 64
B 32
C 16
D 8
E 4

71 A área do polígono determinado pelos afixos das soluções complexas da equação $x^6 = 64$ no plano de Argand-Gauss é

A 6
B $6\sqrt{3}$
C 12
D $6\sqrt{2}$
E $2\sqrt{6}$

72 PUC-RS A superfície e os parafusos de afinação de um tímpano da Orquestra da PUC-RS estão representados no plano complexo Argand-Gauss por um disco de raio 1, centrado na origem, e por oito pontos uniformemente distribuídos, respectivamente, como mostra a figura:

Nessa representação, os parafusos de afinação ocupam os lugares dos números complexos z que satisfazem a equação:

A $z^8 = i$
B $z^8 = -i$
C $z^8 = 1$
D $z^8 = -1$
E $z^8 = 1 + i$

73 Cefet-MG 2015 Considere as raízes complexas w_0, w_1, w_2, w_3 e w_4 da equação $w^5 = z$, onde $z \in \mathbb{C}$, representadas graficamente por

O número complexo z é

A 16i.
B 32i.
C 16 + 16i.
D $16+16\sqrt{3}i$
E $32+32\sqrt{3}i.$

74 Unioeste 2017 Considere θ um número real qualquer. Sobre os números complexos z = cos(2θ) + isen(θ) e w = cos(θ) + isen(2θ), pode-se afirmar que

A $|z| + |w| = 1.$
B $z^2 \quad w^2 = 0.$
C $z = \overline{w}.$
D $z \quad iw = 0.$
E $|z|^2 + |w|^2 = 2.$

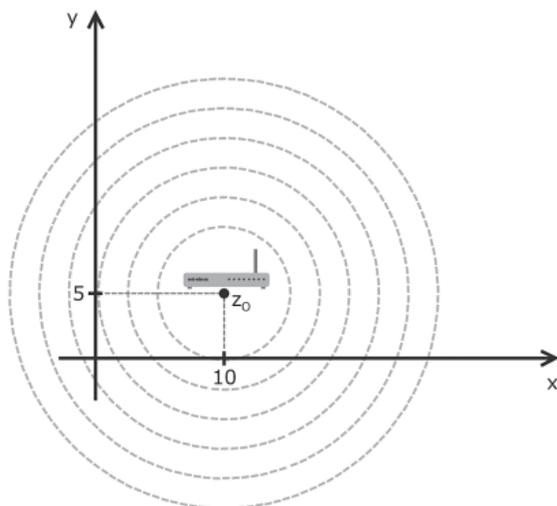
75 **UFSM 2013** Os edifícios “verdes” têm sido uma nova tendência na construção civil. Na execução da obra desses prédios, há uma preocupação toda especial com o meio ambiente em que estão inseridos e com a correta utilização dos recursos naturais necessários ao seu funcionamento, além da correta destinação dos resíduos gerados por essa utilização.

A demarcação do terreno onde será construído um edifício “verde” foi feita através dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, sendo o terreno delimitado pelas poligonais $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4P_1}$ medidas em metros. Sabendo que P_1, P_2, P_3 e P_4 representam, respectivamente, a imagem dos complexos $z_1 = 20 + 40i$, $z_2 = \quad 15 + 50i$, $z_3 = \quad 15 \quad 10i$ e $z_4 = \frac{1}{16}z_1 \quad \frac{5}{4}\overline{z_3}$, qual é a área, em m^2, desse terreno?

A 1595.
B 1750.
C 1795.
D 1925.
E 2100.

76 **FICSAE-SP 2016** Sejam os números complexos $u = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 315° + i \cdot \text{sen } 315°)$ e $w = u^2$. Se P e Q são as respectivas imagens de u e w, no plano complexo, então a equação da reta perpendicular a $\overline{PQ}$, traçada pelo seu ponto médio, é

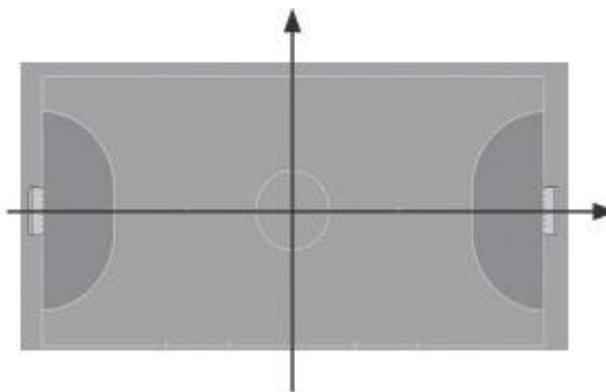
A $3x + y + 2 = 0$
B $3x - y + 2 = 0$
C $x + 3y + 14 = 0$
D $x - 3y + 14 = 0$

77 **UFSM 2014** No plano complexo, o ponto z_0 representa o local de instalação de uma antena *wireless* na praça de alimentação de um *shopping*.

Os pontos $z = x + yi$ que estão localizados no alcance máximo dessa antena satisfazem a equação $|z - z_0| = 30$. De acordo com os dados, esses pontos pertencem à circunferência dada por

A $x^2 + y^2 \quad 20x \quad 10y \quad 775 = 0.$
B $x^2 + y^2 \quad 900 = 0.$
C $x^2 + y^2 \quad 10x + 20y \quad 775 = 0.$
D $x^2 + y^2 \quad 10x + 20y \quad 900 = 0.$
E $x^2 + y^2 \quad 20x \quad 10y \quad 900 = 0.$

78 **PUC-RS 2014** A área da figura representada no plano de Argand Gauss pelo conjunto de pontos $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ é

A $\frac{1}{2}$
B 1
C $\frac{\pi}{2}$
D π
E 2π

79 **PUC RS 2016** Uma cancha de futsal está situada sobre um sistema de coordenadas do plano complexo (Argand Gauss), com unidades marcadas em metros e com centro sobre o ponto O(0, 0), como na figura abaixo

Se a circunferência central possui uma área de 9π m^2, a expressão que melhor representa esta circunferência central, em $z \in \mathbb{C}$, é

A $z^2 = 9$
B $z = 3$
C $z = 9$
D $|z| = 3$
E $|z| = 9$

80 **Insper 2012** No conjunto dos números complexos, o número 1 apresenta três raízes cúbicas: 1, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1 \quad i\sqrt{3}}{2}$. Os pontos que correspondem às representações desses três números no plano de Argand Gauss são vértices de um triângulo de área

A $\frac{\sqrt{3}}{4}$
B $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
D $\sqrt{3}$
E 1

Texto complementar

Gráficos em coordenadas polares

[...]

Como no caso de equações cartesianas, um ponto P está no gráfico da curva de equação $r = f(\theta)$ se, e somente se, $P = (r, f(\theta))$.

O uso de coordenadas polares simplifica, em alguns casos, equações de curvas

[...]

Procedimentos para traçar gráficos em coordenadas polares

1) Verificar se existem simetrias, isto é, se a equação se altera ao trocar:
   a) θ por $-\theta$: simetria em relação à reta $\theta = 0$ (eixo x).
   b) θ por $\pi - \theta$: simetria em relação à reta $\theta = \pi/2$ (eixo y).
   c) θ por $\pi + \theta$: simetria em relação ao polo [ ]
2) Verificar se a curva passa pelo polo ($r = 0$).
3) Determinar os pontos da curva variando θ a partir de $\theta = 0$.
4) Verificar a existência de pontos críticos (máximos e mínimos): $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) > 0 \Rightarrow \theta$ é um mínimo relativo; $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) < 0 \Rightarrow \theta$ é um máximo relativo.
5) Verificar se r não se altera ao trocar θ por $\theta + 2\pi$. Caso não haja alteração, basta variar θ entre 0 e 2π

[...]

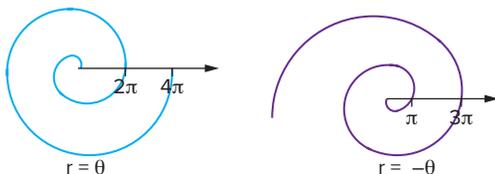
As seguintes relações trigonométricas serão úteis aqui:

- $\cos(-\theta) = \cos\theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos(2\pi + \theta)$ e $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta = \text{sen}(2\pi - \theta)$ e $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta = \text{sen}(\theta + 2\pi)$

Veja alguns exemplos:

- $r = \theta$ com $\theta \geq 0$

Representa os pontos $P = (r, r)$ onde $r \geq 0$, ou seja, os pontos P tais que a distância de P ao polo é igual ao ângulo, em radianos, entre o eixo polar e o segmento OP

A seguir temos os gráficos de $r = \theta$ e $r = -\theta$, para $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

A equação geral da espiral é dada por $r = a\theta$, considerando $\theta \geq 0$

- $r = \cos 2\theta$

Temos: $\cos 2\theta = \cos(\ 2\theta)$;

$\cos 2(\pi - \theta) = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$ e

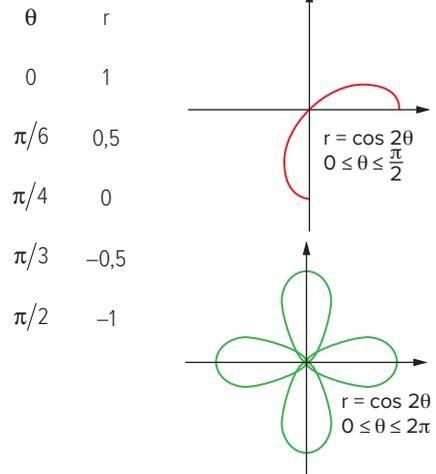
$\cos 2(\pi + \theta) = \cos(2\pi + 2\theta) = \cos 2\theta$

Logo, existem simetrias em relação ao polo e em relação aos eixos x e y [ ]

Para $\theta = \pi/4$, $r = 0$, ou seja, a curva passa pelo polo quando $\theta = \pi/4$.

Também r não se altera ao trocar θ por $\theta + 2\pi$.

Assim, basta fazer o gráfico para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e completá lo, a partir das simetrias.

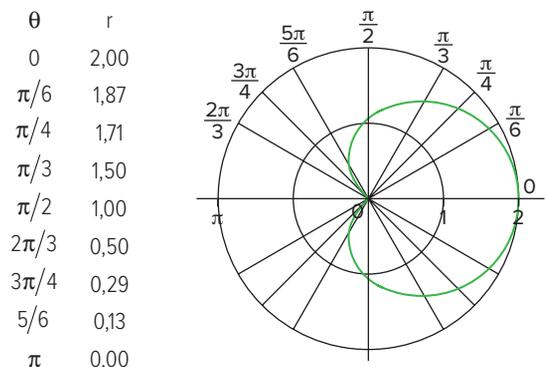
θ	r
0	1
$\pi/6$	0,5
$\pi/4$	0
$\pi/3$	–0,5
$\pi/2$	–1

Equações da forma $r = a \cdot \text{sen}(n\theta)$ ou $r = a \cdot \cos(n\theta)$, para *n* inteiro positivo, representam rosáceas.

- $5 \cdot r = 1 + \cos\theta$

Temos: $1 + \cos\theta = 1 + \cos(-\theta) \neq 1 + \cos(\pi \quad \theta)$

$1 + \cos\theta \neq 1 + \cos(\pi + \theta)$

Logo, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x mas não é simétrico em relação ao eixo y e nem em relação ao polo [ ]

θ	r
0	2,00
$\pi/6$	1,87
$\pi/4$	1,71
$\pi/3$	1,50
$\pi/2$	1,00
$2\pi/3$	0,50
$3\pi/4$	0,29
5/6	0,13
π	0,00

Equações da forma $r = a \cdot (1 \pm \text{sen}\,\theta)$ ou $r = a \cdot (1 \pm \cos\theta)$ representam uma categoria de curvas chamadas cardioides, por terem a forma de coração

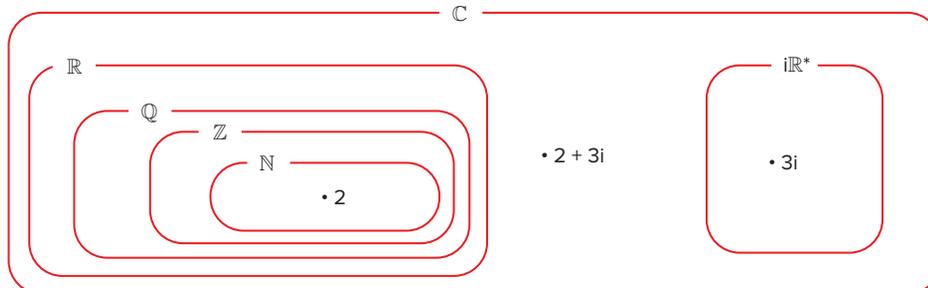
Mauri C. Nascimento – Dep. De Matemática – FC – Unesp/Bauru
wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Down/Polares.pdf

Resumindo

O conjunto dos números complexos

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Sendo $z = a + bi$ um número complexo, temos:
$$\begin{cases} \text{Parte real de z: } Re(z) = a \\ \text{Parte imaginária de z: } Im(z) = b \\ \text{Afixo de z: } (a, b) \\ \text{Conjugado de z: } \overline{z} = a \quad bi \end{cases}$$

$$\underset{\text{(Naturais)}}{\mathbb{N}} \subset \underset{\text{(Inteiros)}}{\mathbb{Z}} \subset \underset{\text{(Racionais)}}{\mathbb{Q}} \subset \underset{\text{(Reais)}}{\mathbb{R}} \subset \underset{\text{(Complexos)}}{\mathbb{C}}$$

Se $a + bi$ for um número real, então $b = 0$, e se for um imaginário puro, então $a = 0$ e $b \neq 0$.

Igualdade em ℂ

Dados dois números complexos em suas formas algébricas $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos que esses dois números são iguais se, e somente se, tiverem a mesma parte real e a mesma parte imaginária, ou seja:

$$z = w \iff a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Adição em ℂ

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicação em ℂ

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

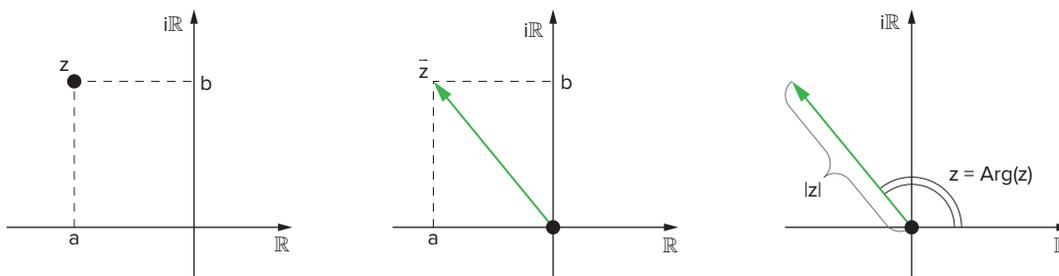
Potências inteiras da unidade imaginária

$i^n = i^r$, em que $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ é o resto da divisão de *n* pelo número 4

$$\begin{matrix} , \quad i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = \quad 1, & i^3 = -i, & \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = \quad 1, & i^7 = -i, & \\ i^8 = 1, & i^9 = i, & i^{10} = \quad 1, & i^{11} = \quad i, & \dots \end{matrix}$$

O plano de Wessel-Argand-Gauss

Trata-se de uma adaptação do plano cartesiano tradicional, na qual o eixo das abscissas continua representando o conjunto dos números reais enquanto o eixo das ordenadas, com exceção da origem, passa a representar o conjunto dos imaginários puros. Assim, um número complexo $z = a + bi$ passa a ser representado, no plano complexo, por seu afixo: o par ordenado (a, b).

A primeira das figuras a seguir apresenta um número complexo no segundo quadrante, ou seja, com parte real negativa ($a < 0$) e parte imaginária positiva ($b > 0$); a segunda figura apresenta o vetor $\vec{z}$ associado, e a terceira figura destaca o módulo e o argumento desse vetor.

Módulo e argumento

O módulo de um número complexo não nulo $z = a + bi$ é o número real positivo que representa o tamanho do vetor $\vec{z}$, assim: $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$. É correto afirmar que: $|z| = |\bar{z}|$ e $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

O argumento de um número complexo é a medida, em graus ou radianos, de um arco trigonométrico determinado pelo vetor associado ao número complexo e o semieixo dos números reais positivos

$$\theta = \arg(z) \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} \Leftrightarrow Im(z) = |z| \cdot \text{sen}\theta \\ \cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} \Leftrightarrow Re(z) = |z| \cdot \cos\theta \\ \text{tg}\theta = \dfrac{Im(z)}{Re(z)} \end{cases}$$

Os arcos de –240°, 120° e 480° podem, por exemplo, ser argumentos de um mesmo número complexo e, neste caso, seu argumento principal será igual a 120°.

Operações na forma trigonométrica

Se $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$ e $w = |w| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$, temos:

$$\begin{cases} z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)\right] \\ \dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|} \cdot \left[\cos(\alpha \quad \beta) + i \cdot \text{sen}(\alpha \quad \beta)\right] \\ z^n = |z|^n \cdot \left(\cos(n \cdot \alpha) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \alpha)\right) \end{cases}$$

Operações na forma polar

Sendo $(|z|, \alpha)$ e $(|w|, \beta)$ as coordenadas polares dos complexos z e w:

$$\begin{cases} z \cdot w = (|z| \cdot |w|, \alpha + \beta) \\ \dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{|z|}{|w|}, \alpha - \beta\right) \\ z^n = (\alpha|z|^n, n \quad) \end{cases}$$

Classificação dos números complexos de acordo com seus argumentos

Sendo z um número complexo de argumento α radianos, e *k* um número inteiro, temos que:

$$\begin{cases} z \text{ é real} \Leftrightarrow \alpha = k \cdot \pi \\ z \text{ é imaginário puro} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \end{cases}$$

Igualdade polar

Se dois números complexos são iguais, então suas coordenadas polares apresentam o mesmo módulo, mas podem apresentar argumentos diferentes:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w| \\ \alpha = \beta + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

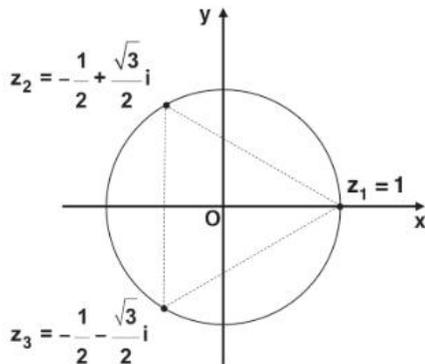
Quer saber mais?

Sites

- De uma forma descontraída é apresentado um breve histórico dos números complexos.
  Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187>.
- Conheça um pouco mais sobre a evolução dos números complexos.
  Disponível em: <http://p p4ed com/VKKMU>

Exercícios complementares

1 **UFPE 2013** Encontre o menor inteiro positivo *n* tal que a potência $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ seja um número real.

2 **UFPR 2013** Considere os pontos z_1, z_2 e z_3 indicados no plano complexo abaixo, e que correspondem às raízes cúbicas de 1

a) Qual é o menor inteiro $n > 1$ de modo que $(z_2)^n = 1$? Justifique sua resposta.
b) Calcule $(z_3)^{100}$.

3 **UFPR 2019** Considere o número complexo $z = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

a) Calcule o módulo de z e escreva a forma polar de z
b) Calcule o valor da expressão $z^{27} + z^{24}$. (Sugestão: use a fórmula de *De Moivre*)

4 **UEPG 2019** No plano complexo, se:

- A é o afixo do número $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$,
- B do número $z_2 = 4[\cos(2\pi) + i\,\text{sen}(2\pi)]$ e
- C do número $z_3 = 4 + i$

assinale o que for correto.

01 A área do triângulo ABC tem medida menor que 2.
02 A reta de equação $y = -3x + 12$ passa pelos pontos A e B.
04 O perímetro do triângulo ABC tem medida maior que 7.
08 A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ tem centro no ponto A e raio 1.

Soma:

5 **UEM 2017** Seja $V = \{1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}$ formado pelos números complexos que, no plano complexo, correspondem aos vértices de um hexágono regular cujo centro esteja situado na origem. Assinale o que for **correto**.

01 O produto de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.
02 A diferença de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.
04 O conjugado de todo elemento de V também pertence a V.
08 A soma de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.
16 A divisão de um elemento de V por outro elemento de V sempre pertence a V.

Soma:

6 **UEPG 2018** Considerando os números complexos $z_1 = 1 \quad 2i$ e $z_2 = \quad 3 + i$, assinale o que for correto.

01 $|z_1 z_2| = \sqrt{50}$.
02 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}(-1+i)$.
04 $(\bar{z}_2)^2 = 8 - 6i$.
08 O módulo de z_2 é $\sqrt{8}$
16 O afixo de $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ pertence ao 2º quadrante

Soma:

7 **UFSC 2017** Em circuitos elétricos como, por exemplo, o das instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos A relação $U = Z \cdot j$ fornece a tensão U em função da impedância Z e da corrente elétrica j Nesses termos, essas variáveis são expressas através de números complexos $a + bi$
Considere agora $U = 110(\cos 0^\circ + i \cdot \text{sen}0^\circ)$ e $Z = 5 + 5i$
Determine o valor da expressão $2a + b$ sendo $j = a + bi$

8 **Fuvest 2015** Resolva os três itens abaixo.

a) Calcule $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ e $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2 \quad \sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual z^n seja real.
c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.

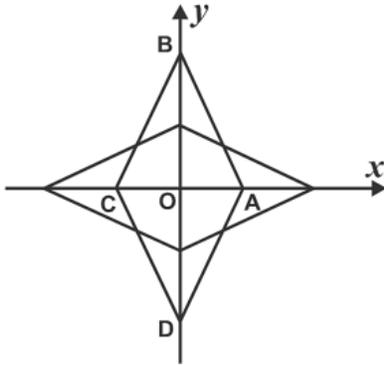
9 **FGV-SP 2014** Seja f uma função que, a cada número complexo z, associa $f(z) = iz$, onde i é a unidade imaginária Determine os complexos z de módulo igual a 4 e tais que $f(z) = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z

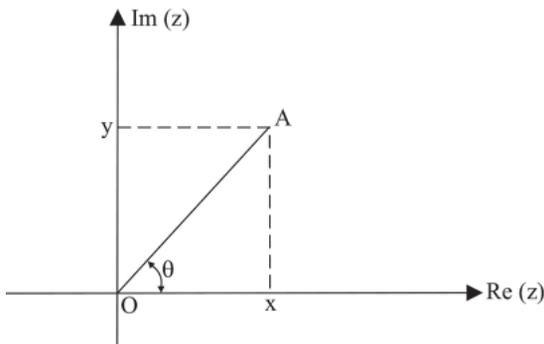
10 **UFPR 2014** Considere o número complexo $z_0 = 4i + \frac{13}{2+3i}$.

a) Determine a parte real e a parte imaginária de z_0.
b) Determine *a* e *b*, de modo que $z = 1 \quad i$ seja solução da equação $z^2 + az + b = 0$.

11 **UFG 2014** Considerando os números complexos z e w tais que $z + w = \left(9 - 3\sqrt{3}\right) + i\left(9 - 3\sqrt{3}\right)$ e $z - w = \left(-3 + 3\sqrt{3}\right) + i\left(3 - 3\sqrt{3}\right)$, determine a área do paralelogramo de lados |z| e |w|, sabendo-se que o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{3}$.

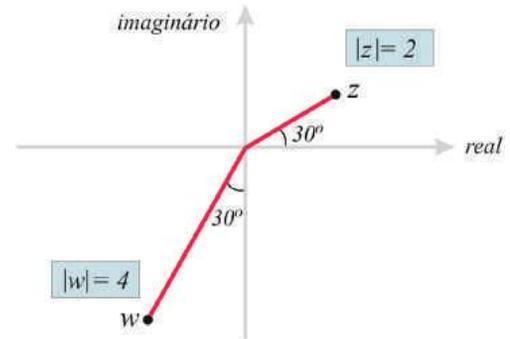
12 **Unesp 2012** Identifique o lugar geométrico das imagens dos números complexos Z, tais que $|Z| + |3 \cdot Z| = 12$.

13 **FGV-SP 2011**

a) Calcule a área do losango ABCD cujos vértices são os afixos dos números complexos: 3, 6i,   3 e –6i, respectivamente.
b) Quais são as coordenadas dos vértices do losan go A'B'C'D' que se obtém girando 90º o losango ABCD, em torno da origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário?
c) Por qual número devemos multiplicar o número complexo cujo afixo é o ponto B para obter o nú mero complexo cujo afixo é o ponto B'?

14 **Unifesp 2011** No plano de Argand-Gauss (figura), o pon to A é chamado afixo do número complexo $z = x + yi$, cujo módulo (indicado por $|z|$) é a medida do segmento OA e cujo argumento (indicado por θ é o menor ângu lo formado com OA, no sentido anti horário, a partir do eixo Re(z) O número complexo z = i é chamado “unida de imaginária”

a) Determinar os números reais x tais que $z = (x + 2i)^4$ é um número real.
b) Se uma das raízes quartas de um número comple xo z é o complexo z_0, cujo afixo é o ponto (0, a), a > 0, determine $|z|$.

15 **UFPE 2011** A representação geométrica dos números complexos z que satisfazem a igualdade $2|z \quad i| = |z \quad 2|$ formam uma circunferência com raio r e centro no ponto com coordenadas (a, b). Calcule r, a e b e assinale $9(a^2 + b^2 + r^2)$.

16 **UFC** Os números complexos distintos z e w são tais que $z + w = 1$ e $z \cdot w = 1$.
a) Calcule $|z|$.
b) Calcule o valor $z^4 + w^4$ sabendo-se que z está no primeiro quadrante do plano complexo.

17 **UFRJ** No jogo Batalha Complexa são dados números complexos z e w, chamados mira e alvo respectivamente. O tiro certeiro de z em w é o número complexo t tal que tz = w.

Considere a mira z e o alvo w indicados na figura anterior Determine o tiro certeiro de z em w

18 **Uece 2016** O conjunto dos números complexos pode ser representado em um plano munido do sistema de coordenadas cartesianas usual. As raízes da equação $x^4 \quad 9 = 0$, quando representadas no plano, correspondem a pontos que são vértices de um
A trapézio.
B losango (não quadrado).
C paralelogramo cuja medida do maior lado é três vezes a medida do menor.
D quadrado.

19 **UFRJ** Determine o módulo, o argumento e represente graficamente o número complexo $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

20 **Unesp** Considere os números complexos w = 4 + 2i e z = 3a + 4ai, onde *a* é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é $|z|$ e a base é a parte real de $z \cdot w$, determine *a* de modo que a área do triângulo seja 90 cm^2.

21 **UFMG** Seja $z = (a + i)^3$ um número complexo, sendo *a* um número real.
a) Escreva z na forma x + iy, sendo *x* e *y* números reais.
b) Determine os valores de *a* para que z seja um número imaginário puro.

22 **Fuvest** Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\text{Im}\left(\frac{z \quad i}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$.
Lembretes: $i^2 = \quad 1$, se w = a + bi, com *a* e *b* reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e Im(w) = b.

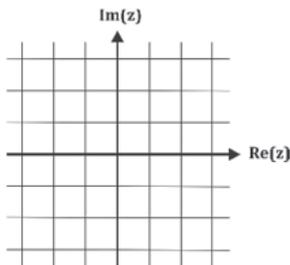
FRENTE 2

23 **UFPR** Considere os números complexos

$$z = \cos\frac{\pi}{18} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{18} \ \text{ e } \ w = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{9}\right).$$

a) Mostre que o produto $z \cdot w$ igual a $\sqrt{3} + i$.
b) Mostre que z^{18} é igual a -1.

24 **Fuvest 2020** Resolva os três itens abaixo:

a) Considere o conjunto formado pelos números complexos z que cumprem a condição Re(z) = Im(z). Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) abaixo, o conjunto resultante após essa transformação.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\frac{z \quad 1}{z+1}$ é um número imaginário puro
c) Determine as partes reais de todos os números complexos z tais que as representações de z, i e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.

25 **AFA 2020** Considere no plano de Argand-Gauss a região S formada pelos afixos P(x, y) dos números complexos $z = x + yi$, em que $\sqrt{-1} = i$

$$S = \begin{cases} |z \quad i| \geq 1 \\ |z| \leq 2 \\ \text{Re}(z) \leq 0 \end{cases}$$

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) A área de S é maior que 4,8 u.a.
( ) Se *k* é o elemento de S de menor argumento, então $ki \in S$.
( ) Todo z pertencente a S possui seu conjugado em S

Sobre as proposições, tem-se que

A apenas uma é verdadeira.
B apenas duas são verdadeiras.
C todas são verdadeiras
D todas são falsas.

26 **AFA 2019** Considere, no plano de Argand-Gauss, os números complexos A e B, sendo $\overline{A} = x \quad 2i$, $x \in \mathbb{R}$ e $\overline{B} = 1 + i$

Se no produto $A \cdot B$ tem-se $\text{Re}(A \cdot B) \geq \text{Im}(A \cdot B)$, então, sobre todos os números complexos A, é correto afirmar que

A seus afixos formam uma reta
B nenhum deles é imaginário puro
C o que possui menor módulo é o que tem o maior argumento principal
D existe A tal que $|A| = |B|$

27 **AFA 2017** Resolva a equação $z^3 \quad 1 = 0$ no conjunto dos números complexos Considerando as raízes encontradas, analise as proposições abaixo e classifique-as em V (Verdadeira) ou F (Falsa).

( ) A equação possui três raízes de multiplicidade 1
( ) Os afixos das raízes formam um triângulo equilátero cuja área é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades de área.
( ) Duas das raízes são conjugadas.
( ) Todas as raízes têm o mesmo módulo.

A sequência correta é

A V F V V
B V V F V
C F F V F
D V F V F

28 **Unicamp 2017** Seja i a unidade imaginária, isto é, $i^2 = \quad 1$. O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano com coordenadas reais (x, y) tais que $(2x + yi)(y + 2xi) = i$ é uma

A elipse.
B hipérbole.
C parábola.
D reta.

29 **AFA 2016** Considere no plano de Argand-Gauss os números $z = x + yi$, onde $i = \sqrt{-1}$ cujos afixos são os pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Dada a equação $(z - 1 + i)^4 = 1$, sobre os elementos que compõem seu conjunto solução, é INCORRETO afirmar que

A apenas um deles é imaginário puro.
B todos podem ser escritos na forma trigonométrica.
C o conjugado do que possui maior argumento é $1 + 2i$.
D nem todos são números imaginários.

30 **AFA 2012** O valor de n tal que $\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = 31 + i$, sendo i a unidade imaginária, é

A par menor que 10
B primo maior que 8
C ímpar menor que 7
D múltiplo de 9

31 **AFA 2011** O número complexo $z = a + bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura abaixo

É correto afirmar que o conjugado de z^2 tem afixo que pertence ao

A 1º quadrante
B 2º quadrante
C 3º quadrante
D 4º quadrante

32 **AFA** Sejam $z = x + yi$ ($x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}^*$ e i a unidade imaginária), $\bar{z}$ o conjugado de z e λ o lugar geométrico dos pontos P(x, y) do plano cartesiano para os quais $z \cdot \bar{z} = 2x + 3$.
Se A e B são os pontos de interseção de λ com o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ e se A' é o ponto de intersção de λ com o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ que possui a menor abscissa, então a área do triângulo A'AB é, em unidades de área, igual a

A $2\sqrt{3}$
B $2\sqrt{2}$
C $\sqrt{3}$
D $\sqrt{2}$

33 **ITA 2020** A parte real da soma infinita da progressão geométrica cujo termo geral a_n é dado por

$$a_n = \frac{\cos n + i \cdot \operatorname{sen} n}{2^n},\ n = 1,\ 2,\ 3,$$

é igual a

A $\dfrac{-1+2\cos 1}{5\quad 4\cos 1}$
B $\dfrac{-2+4\cos 1}{5\quad 4\cos 1}$
C $\dfrac{4\quad 2\cos 1}{5-4\cos 1}$
D $\dfrac{1+2\cos 1}{5\quad 4\cos 1}$
E $\dfrac{2+4\cos 1}{5\quad 4\cos 1}$

34 **ITA 2020** Seja H o hexágono no plano de Argand Gauss cujos vértices são as raízes do polinômio $p(x) = \left(x \quad +\sqrt{3}\right)^6 \quad 64$ Determine $z \in \mathbb{C}$ sabendo que o conjunto $M = \{zx \in \mathbb{C} : x \in H\}$ é o hexágono que possui $v_1 = \ 1+\ \sqrt{3}i$, $v_2 = 1 - \sqrt{3}i$ e $v_3 = 5 \quad \sqrt{3}i$ como três vérti ces consecutivos

35 **ITA 2019** Sabe-se que $\ 2 + 2i$ é uma das raízes quartas de um número complexo z. Então, no plano de Argand Gauss, a área do triângulo, cujos vértices são as raí zes cúbicas de z, é igual a

A $4\left(\sqrt{3}+1\right)$
B $6\sqrt{3}$.
C $8\left(\sqrt{3}\quad 1\right)$
D $10\sqrt{3}$.
E $12\sqrt{3}$

36 **ITA 2019** Determine o número complexo z de menor argumento que satisfaz $|z \quad 25i| \le 15$

37 **ITA 2018** As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano com plexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

A $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.
B $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.
C $\sqrt{2}$.
D $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2}$.
E $3\sqrt{2}$.

38 **ITA 2017** Considere a equação $(a \quad +bi)^{501} \quad \dfrac{2(a+bi)}{(a^2+b^2)^{250}+1}$.
O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é

A 500.
B 501.
C 502.
D 503.
E 504.

39 **ITA 2017** O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 2 \quad (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é

A uma circunferência.
B uma parábola.
C uma hipérbole.
D uma reta.
E duas retas paralelas.

40 **ITA 2016** Considere as afirmações a seguir:

I. Se z e w são números complexos tais que $z - iw = 1 - 2i$ e $w - z = 2 + 3i$, então $z^2 + w^2 = -3 + 6i$.
II. A soma de todos os números complexos z que satisfazem $2|z|^2 + z^2 = 4 + 2i$ é igual a zero.
III. Se $z = 1 - i$, então $z^{59} = 2^{29}(-1 + i)$.

É(são) verdadeira(s)

A apenas I.
B apenas I e II.
C apenas I e III.
D apenas II e III.
E I, II e III.

41 **ITA 2015** Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A = \left\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - 3i| < \sqrt{19}\right\}$, $B = \left\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < \dfrac{7}{2}\right\}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 6z + 10 = 0\}$. Então, $(A \backslash B) \cap C$ é o conjunto

A $\{-1 - 3i, -1 + 3i\}$
B $\{-3 - i, -3 + i\}$
C $\{-3 + i\}$
D $\{-3 - i\}$
E $\{-3 + 3i\}$

42 **ITA 2014** Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I. $|z + w|^2 + |z \quad w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;
II. $(z + \bar{w})^2 - (z - \bar{w})^2 = 4z\bar{w}$;
III $|z + w|^2 \quad |z \quad w|^2 = 4\mathrm{Re}(z\bar{w})$

é(são) verdadeira(s)

A apenas I
B apenas I e II
C apenas I e III
D apenas II e III
E todas.

43 **ITA 2014** Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 \quad 3|z|^4(z^2 \quad \bar{z}^2) \quad \bar{z}^6$ é igual a

A $(z^2 - \bar{z}^2)^3$.
B $z^6 \quad \bar{z}^6$
C $(z^3 - \bar{z}^3)^2$.
D $(z - \bar{z})^6$.
E $(z \quad \bar{z})^2 (z^4 \quad \bar{z}^4)$

44 **ITA 2014**

a) Determine o valor máximo de $|z + i|$, sabendo que $|z - 2| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.
b) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_0.

45 **ITA 2013** Considere a equação em $\mathbb{C}$ $(z \quad 5 + 3i) = 1$ Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

A $\sqrt{29}$.
B $\sqrt{41}$
C $3\sqrt{5}$.
D $4\sqrt{3}$.
E $3\sqrt{6}$

46 **ITA 2012** Sejam $z = n^2(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}45^\circ)$ e $W = n(\cos 15^\circ + i\,\text{sen}15^\circ)$ em que n é o menor número inteiro positivo tal que $(1 + i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

A $\sqrt{3}+i.$

B $2\left(\sqrt{3}+i\right).$

C $2\left(\sqrt{2}+i\right)$

D $2\left(\sqrt{2}-i\right).$

E $2\left(\sqrt{3}\quad i\right).$

47 **ITA 2012** Se $\arg(z)=\frac{\pi}{4}$ então um valor para $\arg(-2iz)$ é

A $-\frac{\pi}{2}$

B $\frac{\pi}{4}$

C $\frac{\pi}{2}$

D $\frac{3\pi}{4}$

E $\frac{7\pi}{4}$

48 **ITA 2011** Dado $z=\frac{1}{2}\left(\ 1\quad \sqrt{3}i\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

A $\frac{89}{2}\sqrt{3}i.$

B $-1.$

C $0.$

D $1.$

E $\frac{89}{6}\sqrt{3}i.$

49 **ITA 2011** Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I $|z_1 \quad z_2| \le ||z_1| \quad |z_2||$

II. $|\bar{z}_1 \cdot z_2| = ||\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_2||.$

III. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i \cdot \text{sen}\theta).$

é(são) sempre verdadeira(s).

A apenas I.

B apenas II.

C apenas III.

D apenas II e III.

E todas.

50 **ITA 2011** A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$: $z^2 + |z^2| + iz - 1 = 0$ é igual a

A 2.

B $\frac{i}{2}.$

C 0.

D $\frac{1}{2}$

E $2i.$

51 **ITA 2011** Sejam $n \ge 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $z_1, z_2, \quad , z_n$ as raízes de $z^n = 1$ Calcule o número de valores $|z_i \quad z_j|$, i, $j = 1, 2, \quad , n$, com $i \ne j$, distintos entre si

52 **ITA** Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$,

$$z \quad \bar{z} = |z|^2 \quad \left[\left(\sqrt{2} \quad i\right)\left(\frac{\sqrt{2} \quad 1}{3} \quad i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12},$$

pode-se afirmar que

A $i(z \quad \bar{z}) < 0$

B $i(z - \bar{z}) > 0.$

C $|z| \in [5, 6].$

D $|z| \in [6, 7].$

E $\left|z+\frac{1}{z}\right| > 8.$

53 **ITA** Os argumentos principais das soluções da equação em z,

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 \quad i = 0,$$

pertencem a

A $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$

B $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[.$

C $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[.$

D $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[.$

E $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$

54 **ITA** Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + i \cdot a_{n \quad 1}$, n = 1, 2, ..., 15.

Das afirmações:

I. $p(-1)\mathbb{R}$,

II. $|p(x)| \le 4\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right),\ \forall x \in [-1, 1],$

III. $a_8 = a_4$

é(são) verdadeira(s) apenas

A I.

B II.

C III.

D I e II.

E II e III.

55 **ITA** $a=\cos\frac{\pi}{5}$ e $b=\text{sen}\frac{\pi}{5}$, então o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A $a + bi.$

B $\quad a + bi.$

C $(1 \quad 2a^2b^2) + ab(1 \ + b^2)i.$

D $a \quad bi.$

E $1 \quad 4a^2b^2 + 2ab(1 \quad b^2)i.$

56 **ITA** Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma a + bi, com a, b $\in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z + 2| < 3\}$$

57 **IME 2020** Seja $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \le |z - 3 - 4i| \le 3\}$ onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. O valor do produto entre o simétrico do complexo de menor módulo do conjunto A e o conjugado do complexo de maior módulo do mesmo conjunto A é:

A $\quad 16$

B $\quad 8$

C $-\frac{16}{5}$

D 1

E 16

58 **IME 2020** Seja uma região S no plano complexo que consiste em todos os pontos Z tais que $\frac{Z}{20}$ e $\frac{20}{\bar{Z}}$ possuem partes real e imaginária entre 0 e 1, inclusive. Determine a área da região S.

Obs: $\bar{Z}$ é o conjugado do número complexo Z.

59 **IME 2019** Seja z um número complexo tal que $z^{12} \in \mathbb{R}$,

$e(z)\quad 1$ e $\arg(z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

A soma dos inversos dos possíveis valores de $|z|$ está no intervalo:

A $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

B $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

C $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

D $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$

E $\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$

60 **IME 2019** Seja Z um número complexo tal que $\frac{2Z}{\overline{Z}i}$ possui argumento igual a $\frac{3\pi}{4}$ e $\log_3(2Z + 2\overline{Z} + 1) = 2$. Determine o número complexo Z.

61 **IME 2018** Determine o valor de **a** na expressão abaixo, sabendo-se que $0 < a < 1$,

$$\frac{1}{16}\log_a 256^{\operatorname{colog}\left(_a 2\right)^{256^{\log\left(_a 4\right)^{256^{\operatorname{colog}\left(_a\left(2^{65}\right)\right)^{256}}}}}} = \operatorname{Im}(Z)$$

onde Z é um número complexo que satisfaz a equação:

$$2^{4033}z^2 - 2^{2017}z + 1 = 0$$

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{8}$

C $\frac{1}{16}$

D $\frac{1}{32}$

E $\frac{1}{64}$

Obs: Im(Z) é a parte imaginária do número complexo Z

62 **IME 2018** Seja o número complexo z que satisfaz a relação $2(z \;\; i)^{2017} + \left(\sqrt{3} \;\; i\right)(iz \;\; 1)^{2017}$. Determine z, sabendo-se que $|z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

63 **IME 2017** Sejam Z_1 e Z_2 números complexos tais que Z_2 é imaginário puro e $|Z_1 \;\; Z_2| = |Z_2|$. Para quaisquer valores de Z_1 e Z_2 que atendam a essas condições tem-se que:

A $\operatorname{Im}(Z_2) > 0$

B $\operatorname{Im}(Z_2) \leq 0$

C $|Z_1| \leq 2|Z_2|$

D $\operatorname{Re}(Z_1) \geq 0$

E $\operatorname{Re}(Z_1) \leq \operatorname{Im}(Z_2)$

64 **IME 2017** Sejam os complexos $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$, tais que $z^3 + w = 0$. Determine o valor de *a*, *b* e *c*, sabendo que esses números são inteiros e positivos.

65 Considere o número complexo $z = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$. Calcule $|z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7|$.

66 **IME 2015** O lugar geométrico no plano complexo de $w = z + \frac{1}{z}$, sendo z um número complexo tal que $|z| = k$ e $k > 1$, é um(a):

A segmento de reta

B circunferência

C hipérbole

D elipse

E parábola

67 **IME 2015** Descreva o lugar geométrico do número complexo z que atende à equação

$$\arg(z \quad z_1) \quad \arg(z \quad z_2) \quad \arg(z \quad z_3) = k\pi,$$

em que z_1 é real, z_2 e z_3 são complexos conjugados com parte imaginária não nula e k é um número inteiro.
Obs: arg(z) é argumento do número complexo z.

68 **IME 2014** Para o número complexo z que descreve o lugar geométrico representado pela desigualdade $|z \quad 26i| \leq 10$, sejam α_1 e α_2 os valores máximo e mínimo de seu argumento. O valor de $|\alpha_1 \quad \alpha_2|$ é

A $\pi \quad \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

B $2 \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$

C $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$

D $2 \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

E $2 \cdot \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

69 **IME 2014** Calcule o determinante abaixo, no qual $\omega = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & 1-i & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

70 **IME 2013** Seja o número complexo $z = \frac{a}{ib(1+ib)^2}$, onde *a* e *b* são números reais positivos e $i = \sqrt{\quad 1}$. Sabendo que o módulo e o argumento de z valem, respectivamennte, 1 e $(-\pi)$, o valor de *a* é

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{2}$

C 1

D 2

E 4

71 **IME 2013** Considere Z_1 e Z_2, complexos, que satisfazem a equação $x^2 + px + q = 0$, onde *p* e *q* são números reais diferentes de zero Sabe se que os módulos de Z_1 e Z_2 são iguais e que a diferença entre os seus argumentos vale α, onde α é diferente de zero. Determine o valor de $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ em função de *p* e *q*.

72 **IME 2012** As raízes cúbicas da unidade, no conjunto dos números complexos, são representadas por 1, w e w^2, onde w é um número complexo O intervalo que contém o valor de $(1 \quad w)^6$ é:

A (–∞, 30)
B (–30, –10)
C (–10, 10)
D (10, 30)
E (30, ∞)

73 **IME 2012** Seja o número complexo Z = a + bi, com a e b ∈ ℝ (real) e $i = \sqrt{\;1}$ Determine o módulo de Z sabendo que $\begin{cases} a^3 = 3(1+ab^2) \\ b^3 = 3(a^2b \quad 1) \end{cases}$.

74 **IME 2011** Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde i é a unidade imaginária, e z um número complexo tal que $\arg\left[\frac{z \quad z_1}{z \quad z_2}\right] = \frac{\pi}{4}$ determine o módulo do número complexo $(z \quad 7 \quad 9i)$.
Obs: arg(w) é o argumento do número complexo w.

75 **IME** Considere o sistema abaixo, onde x_1, x_2, x_3 e Z pertencem ao conjunto dos números complexos.

$$\begin{cases} (1+i)x_1 \; ix_2 \; ix_3 \quad 0 \\ 2ix_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad Z \\ (2i \; 2)x_1 \quad ix_2 \; ix_3 \quad 0 \end{cases}$$

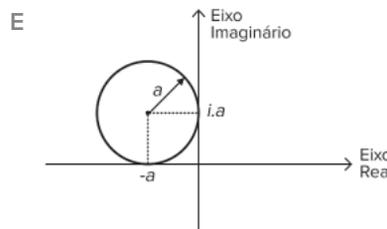
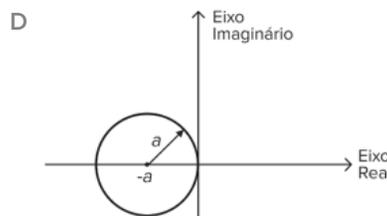
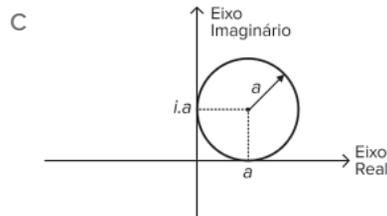
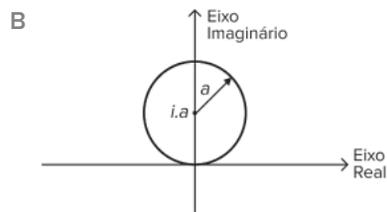
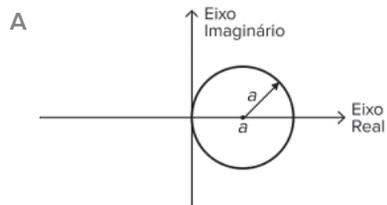
O argumento de Z, em graus, para que x_3 seja um número real positivo é:

A 0°
B 45°
C 90°
D 135°
E 180°

Obs.: $i = \sqrt{\;1}$

76 **IME** Considere o conjunto de números complexos E = {a + bω} onde a e b são inteiros e $\omega = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
Seja o subconjunto U = {α ∈ E/∃β ∈ E no qual αβ = 1}
Determine:

a) Os elementos do conjunto U.
b) Dois elementos pertencentes ao conjunto Y = E – U tais que o produto seja um número primo.

77 **IME** Seja $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ um número complexo onde ρ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de z e i á e unidade imaginária. Sabe-se que ρ = 2acosθ onde a é uma constante real positiva. A representação de z no plano complexo é

A
B
C
D
E
78 **IME** Sabe-se que $z_1 \cdot \overline{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| \quad |z_3 \quad z_4| = 0$ sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.
Obs.: números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de z.

79 **IME** Seja x um número real ou complexo para o qual $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. O valor de $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ é:

A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

80 **IME** Determine a expressão da soma a seguir, onde n é um inteiro múltiplo de 4.

$$1 + 2i + 3i^2 + ... + (n+1)i^n$$

PhonlamaiPhoto/iStockphoto.com

DanielPrudek/iStockphoto.com

jamesbenet/iStockphoto.com

rmnunes/iStockphoto.com

redmal/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

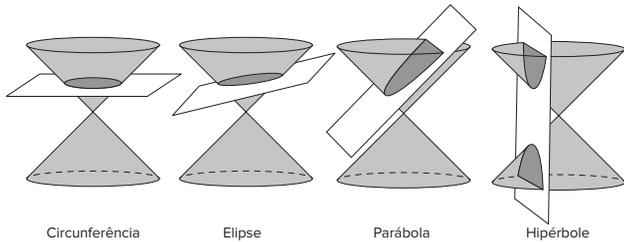
10

Cônicas

As torres de refrigeração de uma usina atômica, a Catedral de Brasília, o Telescópio Espacial Hubble, antenas parabólicas, uma bola de rúgbi... o que essas coisas têm em comum?

Para responder a essa pergunta, estudaremos as curvas cônicas neste capítulo.

Seções cônicas

São as curvas planas obtidas pelas interseções de um plano de corte com uma superfície cônica. Elas podem ser de quatro tipos, conforme o ângulo formado entre o plano e o eixo do cone: circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Seções cônicas e o ângulo de inclinação do plano de corte

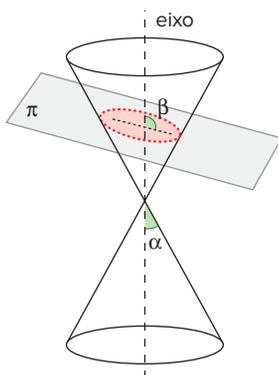
Na história da Matemática, há muitos estudos gerais acerca das cônicas que datam de antes do grande matemático grego Euclides de Alexandria, que viveu no século III a.C. Acredita-se que o principal estudo da Antiguidade Grega sobre o assunto seja o de Apolônio de Perga (262-190 a.C.).

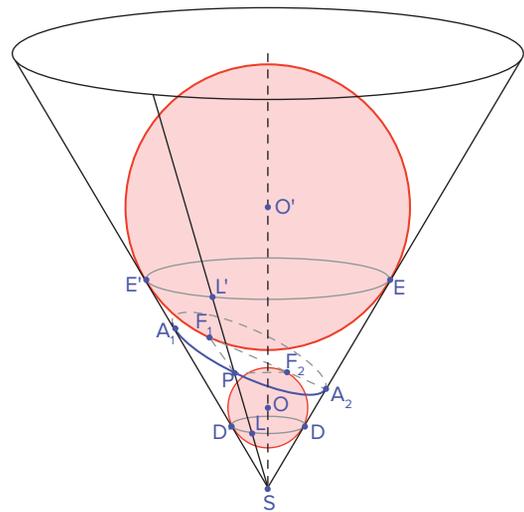
A equivalência entre as várias definições de seções cônicas pode ser encontrada na Geometria Elementar. Coube ao francês Pierre de Fermat (1607-1665) demonstrar que elas podem ser expressas por equações do 2º grau em duas variáveis, o que veremos neste capítulo.

Além disso, as cônicas têm muitas aplicações práticas. Sabemos, por exemplo, que as órbitas dos planetas, dos cometas e de outros astros são elipses, parábolas e hipérboles. As cônicas também estão presentes em lentes, espelhos, antenas e estruturas usadas na construção civil.

A abordagem apresentada a seguir tem como referência os métodos do matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847), que, por sua vez, baseou seus estudos nas esferas inscritas na superfície cônica de revolução, utilizadas inicialmente por Lambert Adolph Jacques Quetelet (1796-1874), outro matemático belga.

A elipse

Seja π um plano que intercepta uma superfície cônica reta de dois ramos (clepsidra ou ampulheta) Seja α o ângulo formado pelo eixo do cone e uma geratriz e β o ângulo formado pelo plano de corte e o eixo do cone Se $\alpha < \beta$, a interseção do plano π com a superfície cônica representa uma curva fechada chamada **elipse**, como mostra a figura

Para $\alpha < \beta$, temos uma elipse.

Observe agora a figura a seguir, que representa o plano π, secante ao cone e a duas esferas inscritas no cone, chamadas de esferas de Dandelin. Sejam F_1 e F_2 os pontos de tangência de π com as esferas.

A elipse e as esferas de Dandelin.

Se tomarmos um plano passando pelo eixo do cone e perpendicular ao plano π, veremos que esses dois planos cortam se segundo a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ Traçando se a circunferência inscrita e a ex-inscrita ao triângulo A_1SA_2 entre as geratrizes do cone, estas tocarão $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ nos pontos F_1 e F_2. As esferas estão inscritas no cone e são tangentes ao plano secante nos pontos F_1 e F_2.

O contato da esfera de centro O com o cone é o círculo que tem diâmetro DD', cujo plano é perpendicular ao da figura. Da mesma maneira, a esfera de centro O' tangencia o cone segundo um círculo de diâmetro EE' e cujo plano também é perpendicular ao da figura.

Escolhendo um ponto P qualquer sobre a elipse, pode mos traçar as retas $\overleftrightarrow{PF_1}$ e $\overleftrightarrow{PF_2}$ e a geratriz $\overleftrightarrow{SP}$ que corta em L e L' os paralelos $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$. A medida do segmento $\overline{PF_1}$ é igual à de $\overline{PL'}$ como par de tangentes a uma esfera traçadas do mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, temos $PF_2 = PL$.

Assim:

$$PF_1 + PF_2 = PL + PL' = LL'$$

Porém, LL' = DE, como porções de duas geratrizes compreendidas entre dois planos perpendiculares ao eixo. Portanto, para um ponto P qualquer da elipse, é válido o seguinte resultado:

$$PF_1 + PF_2 = DE$$

Em particular, se escolhermos o ponto P como A_1 ou A_2, teremos:

$$\begin{cases} A_1F_1 + A_1F_2 = DE \\ A_2F_1 + A_2F_2 = DE \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1F_1 + A_1F_1 + F_1F_2 = DE \\ A_2F_2 + F_1F_2 + A_2F_2 = DE \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A_1F_1 + F_1F_2 = 2A_2F_2 + F_1F_2 \Rightarrow A_1F_1 = A_2F_2$$

Em outras palavras, os pontos A_1 e A_2 são simétricos em relação a F_1 e F_2

Se estabelecermos que a medida DE é igual a 2a, teremos:

$$PF_1 + PF_2 = DE = 2a$$
$$A_1F_1 + A_1F_2 = DE = 2a \Leftrightarrow A_1F_1 + A_1F_1 + F_1F_2 = 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_1F_1 + A_2F_2 + F_1F_2 = 2a \Leftrightarrow A_1A_2 = 2a$$

A elipse é uma curva fechada que pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 do mesmo plano é constante e igual a 2a. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos, nome dado por Kepler, que deriva do latim *focus* e pode significar fogueira ou lareira, e A_1 e A_2 são denominados vértices da elipse. Os focos pertencem ao segmento $\overline{A_1A_2}$, que é chamado de eixo maior ou eixo focal. A distância F_1F_2 (distância focal) é denominada 2c. O ponto médio O desse eixo maior recebe o nome de centro da elipse e os focos são simétricos em relação a esse centro. Os pontos B_1 e B_2 da elipse que pertencem à perpendicular ao eixo, que passa por O, são chamados de polos da elipse e equidistam dos focos (estão na mediatriz de $\overline{F_1F_2}$). Denominamos $\overline{B_1B_2}$ de eixo menor da elipse e dizemos que ele tem medida 2b.

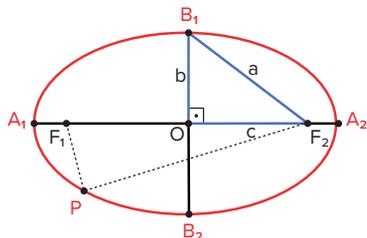
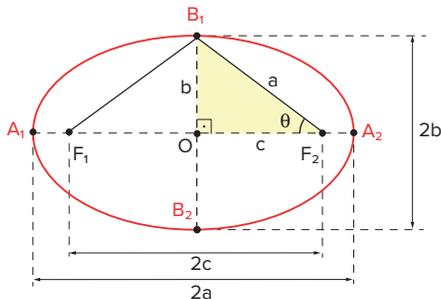
O ponto B_1 pertence à elipse. Logo:

$$B_1F_1 = B_1F^2 = 2a \text{ e } B_1F_1 = B_1F_2 \Rightarrow B_1F_1 = B_1F_2 = a$$

No triângulo B_1OF_2, retângulo em O:

$$(B_1F_2)^2 = (B_1O)^2 + (OF_2)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Essa equação é chamada de **relação fundamental da elipse**.

Agora, vamos colocar a elipse em um plano e resumir nossas observações até o momento.

Chamaremos de excentricidade a razão $e = \frac{c}{a}$, com $0 < e < 1$ para a elipse. Posteriormente, veremos outras definições equivalentes de excentricidade.

A elipse e seus elementos.

Definição: $PF_1 + PF_2 = 2a$

Eixo maior: $A_1A_2 = 2a$

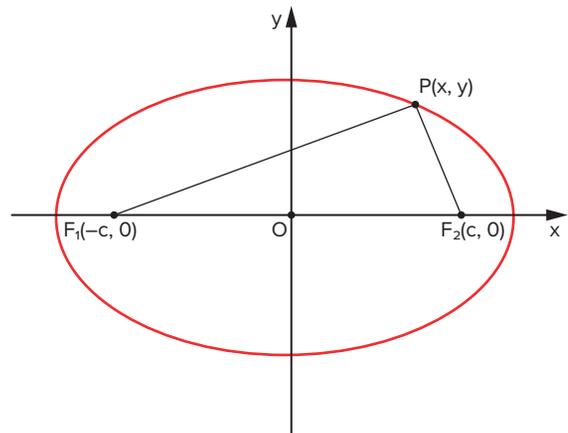
Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$

Distância focal: $F_1F_2 = 2c$

Propriedade: $a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$

As equações cartesianas da elipse

Coloquemos, em um sistema cartesiano, uma elipse de eixo maior com medida 2a, de modo que seu centro O coincida com a origem do sistema e seu eixo maior esteja contido no eixo Ox. Nesse sistema, as coordenadas dos focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Elipse centrada na origem

Sendo P(x, y) um ponto da elipse, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Leftrightarrow PF_2 = 2a \quad PF_1$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado:

$$(PF_2)^2 = 4a^2 - 4a \cdot (PF_1) + (PF_1)^2$$
$$(x \quad c)^2 + (y \quad 0)^2 = 4a^2 \quad 4a \cdot (PF_1) + (x + c)^2 + (y \quad 0)^2$$
$$x^2 \quad 2cx + c^2 = 4a^2 \quad 4a \cdot (PF_1) + x^2 + 2cx + c^2$$
$$4a \cdot (PF_1) = 4a^2 + 4cx$$
$$PF_1 = \frac{4a^2}{4a} + \frac{4cx}{4a}$$
$$PF_1 = a + \frac{c}{a}x$$

Elevando de novo ao quadrado e lembrando que $b^2 = a^2 \quad c^2$, temos:

$$(PF_1)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{c}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2$$
$$(x + c)^2 + (y = 0)^2 + a^2 \quad 2cx \quad \frac{c^2}{a^2}x^2$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$
$$\frac{a^2 \quad c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$
$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

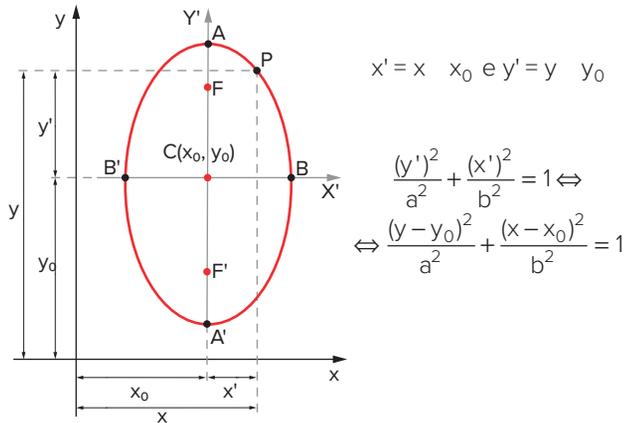
Desta forma, obtemos a **equação reduzida da elipse**.

Para rotacionar uma figura em 90°, devemos multiplicar seus pontos pela unidade imaginária i. Assim, se rotacionarmos a elipse em 90°, que é o equivalente a colocar o eixo maior sobre o eixo Oy, teremos a seguinte transformação:

$$(X, Y) = (x, y) \cdot i = (x, y) \cdot (0, 1) = (x \cdot 0 - y \cdot 1, y \cdot 0 + x \cdot 1) = (-y, x)$$

Então:

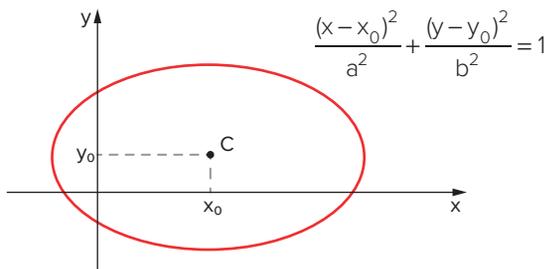
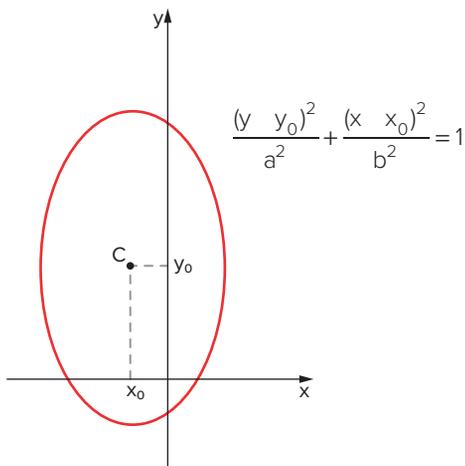
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(\ \ y)^2}{a^2}+\frac{(x)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \text{(II)}$$

Se o centro O da elipse tiver coordenadas $C(x_0, y_0)$ e os eixos da elipse se mantiverem paralelos aos eixos coordenados, basta transladar as equações (I) e (II), ou seja, realizar a substituição (x', y') por $(x - x_0, y - y_0)$, conforme a figura a seguir:

$$x' = x \quad x_0 \text{ e } y' = y \quad y_0$$

$$\frac{(y')^2}{a^2}+\frac{(x')^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Caso o eixo maior seja paralelo ao eixo Ox:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Caso o eixo maior seja paralelo ao eixo Oy:

$$\frac{(y\ \ y_0)^2}{a^2}+\frac{(x\ \ x_0)^2}{b^2}=1$$

Se desenvolvermos os quadrados nas equações $\frac{(x\ \ x_0)^2}{a^2}+\frac{(y\ \ y_0)^2}{b^2}=1$ e $\frac{(y\ \ y_0)^2}{a^2}+\frac{(x\ \ x_0)^2}{b^2}=1$ e rearranjarmos seus termos, podemos escrevê-las da seguinte maneira:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Essa equação é chamada **equação geral da elipse**

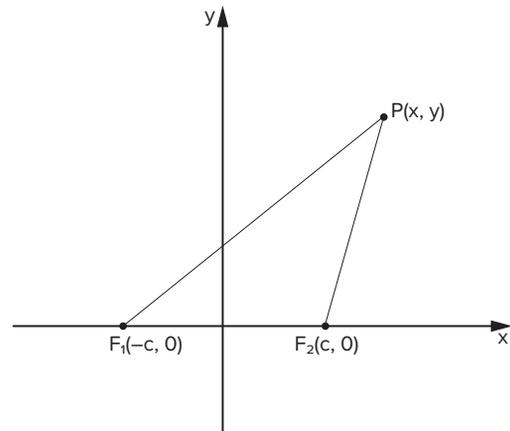
Como exemplo, observe:

$$\frac{(x\ \ 1)^2}{4}+\frac{(y\ \ 2)^2}{3}=1 \Leftrightarrow 3(x^2+2x\ \ 1)+4(y^2\ \ 4y\ \ 4)\ \ 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+4y^2-6x-16y+7=0$$

Se o eixo focal da elipse não for paralelo aos eixos Ox e Oy, teremos uma equação geral na forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

A equação polar da elipse

Raio vetor.

Raio vetor é um vetor que liga o foco da elipse a qualquer ponto da própria elipse. Podemos calcular seu comprimento em função da abscissa de um ponto da elipse associado a ele.

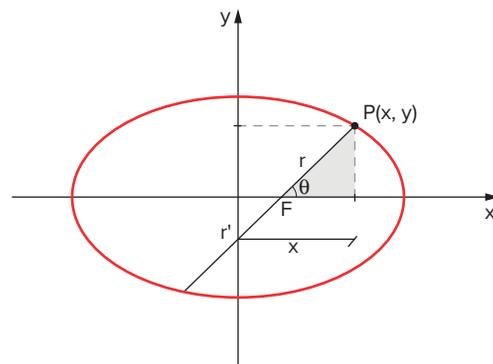
Na dedução da equação cartesiana da elipse, mostramos que:

$$PF_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex$$

Como $PF_1 + PF_2 = 2a$, temos:

$$PF_2 = a - ex$$

Assim, o raio vetor PF_2 é uma função de x (abscissa de P). Portanto, $PF_2 = r(x) = a \quad ex$.

Agora, podemos deduzir a equação polar (ou trigonométrica) da elipse. Essa equação relaciona o tamanho do raio vetor ao ângulo θ, que é o ângulo formado pelo raio vetor e o eixo focal, medido no sentido anti-horário.

Forma polar da elipse.

Da figura, $x = c + r(x) \cdot \cos\theta$. Como $r(x) = a \quad ex$, temos:

$$r(x) = a - e \cdot (c + r(x) \cdot \cos\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(x) = a \quad e \cdot c \quad e \cdot r(x) \cdot \cos\theta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(x) + e \cdot r(x) \cdot \cos\theta = a - ec \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1 + e \cdot \cos\theta) \cdot r(x) = a - \frac{c}{a} \cdot c = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(x) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

A equação $r(x) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e \cdot \cos\theta}$ é chamada **equação polar da elipse**.

A área da elipse

A área da elipse de semieixos a e b é igual a:

$$A_{elipse} = \pi \cdot a \cdot b$$

Exercícios resolvidos

1 Determine a equação reduzida da elipse com centro na origem e eixo focal paralelo ao eixo Ox, a = 5 e b = 3. Determine também as coordenadas dos focos e a excentricidade da elipse.

Resolução:

Sendo o centro da elipse o ponto O(0, 0), temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ainda:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + c^2 \Leftrightarrow c = 4$$

Os focos são dados por $F_1(-c, 0) = F_1(-4, 0)$ e $F_2(c, 0) = F_2(4, 0)$.

A excentricidade é dada por $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

2 Determine a equação reduzida e os focos da elipse tangente ao eixo Ox, com centro em (3, 4) e excentricidade $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução:

Como a elipse é tangente ao eixo Ox e tem centro em (3, 4), temos a = 4 Assim:

$$e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{4} \Leftrightarrow c = 2\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 4^2 = b^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow 8 = 8 \quad b \quad 2\sqrt{2}$$

O eixo focal é paralelo ao eixo Oy. Então, a equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{(y \quad y_0)^2}{a^2} + \frac{(x \quad x_0)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(y-4)^2}{4^2} + \frac{(x-3)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(y \quad 4)^2}{16} + \frac{(x \quad 3)^2}{8} = 1$$

Os focos da elipse são dados por $F_1(x_0, y_0 \quad c) \left(3, 4 - 2\sqrt{2}\right)$ e $F_2(x_0, y_0 + c) = F_2\left(3, 4 + 2\sqrt{2}\right)$.

3 Determine o centro e os focos da elipse dada por $4x^2 + 9y^2 + 24x \quad 36y + 36 = 0$.

Resolução:

Rearranjando os termos e completando os quadrados, temos:

$$4x^2 + 9y^2 + 24x \quad 36y + 36 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 24x + 9y^2 \quad 36y = \quad 36 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) = -36 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9) + 9(y^2 \quad 2 \cdot 2 \cdot y + 4) =$$
$$= \quad 36 + 4 \cdot 9 + 9 \cdot 4 \Leftrightarrow 4(x + 3)^2 + 9(y \quad 2)^2 = 36$$

Dividindo os dois lados por 36:

$$\frac{4(x+3)^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = \frac{36}{36} \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Essa equação caracteriza a elipse com centro em (–3, 2), $a = 3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

Os focos são dados por $F_1(x_0 - c, y_0) = F_1\left(-3 - \sqrt{5}, 2\right)$ e $F_2(x_0 + c, y_0) = F_2\left(-3 + \sqrt{5}, 2\right)$.

4 Determine as equações das retas que passam por P(8, 0) e são tangentes à elipse $16x^2 + 25\,y^2 = 400$.

Resolução:

Sejam as retas que passam por (8, 0) e têm coeficiente angular m com equações gerais dadas por:

$$y \quad 0 = m(x \quad 8) \Leftrightarrow mx \quad y \quad 8m = 0$$

As interseções entre a elipse e as retas são soluções do sistema $\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 400 & \text{(I)} \\ y = mx \quad 8m & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$$16x^2 + 25(mx \quad 8m)^2 = 400 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (25m^2 + 16)x^2 \quad 400m^2x + 1600m^2 \quad 400 = 0$$

Uma reta é tangente a uma elipse quando tem apenas um ponto de interseção com ela. Logo:

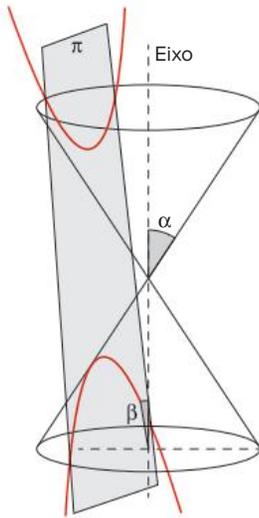
$$\Delta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-400m^2)^2 - 4 \cdot (25m^2 + 16) \cdot (1600m^2 - 400) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 160000m^4 - 160000m^4 + 62400m^2 - 25600 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 62400m^2 = 25600 \Leftrightarrow m^2 = \frac{25600}{62400} = \frac{16}{39} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{16}{39}} = \pm\frac{4\sqrt{39}}{39}$$

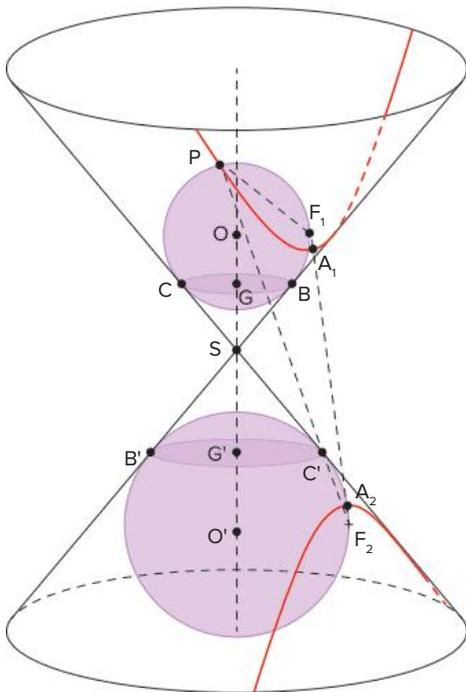
Assim, as retas que passam por P(8, 0) e são tangentes à elipse têm equações dadas por:

$$y = \frac{4\sqrt{39}}{39}(x \quad 8) \text{ e } y = \quad \frac{4\sqrt{39}}{39}(x \quad 8)$$

FRENTE 3

A hipérbole

Seja π um plano que intercepta uma superfície cônica reta de dois ramos (clepsidra ou ampulheta). Sejam α o ângulo formado pelo eixo do cone e uma geratriz e β o ângulo formado pelo plano de corte e o eixo do cone. Se $\beta < \alpha$, a interseção do plano π com a superfície cônica representa uma curva aberta de dois ramos chamada **hipérbole**, como mostra a figura.

Para $\beta < \alpha$, temos uma hipérbole.

Observe agora a figura a seguir, que representa o plano π, secante ao cone e a duas esferas inscritas no cone, chamadas de esferas de Dandelin. Sejam F_1 e F_2 os pontos de tangência de π com as esferas.

A hipérbole e as esferas de Dandelin

Se tomarmos um plano passando pelo eixo do cone e perpendicular ao plano π, veremos que esses dois planos cortam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ As esferas estão inscritas no cone e são tangentes ao plano secante nos pontos F_1 e F_2.

Escolhendo um ponto P qualquer sobre a hipérbole, podemos traçar os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, tangentes às esferas. Da figura, temos que $PF_2 \quad PF_1 = PG' \quad PG = GG' =$ $= BB' =$ constante, pois são tangentes às mesmas esferas por um mesmo ponto.

De maneira análoga ao que foi feito para a elipse, provamos que $A_1F_1 = A_2F_2$. Além disso, $A_1B' = A_1F_2$ e $A_1B = A_1F_1$, pois são pares de segmentos tangentes às mesmas esferas. Dessa maneira:

$$BB' = A_1B' - A_1B = A_1F_2 - A_1F_1 = (A_1A_2 + A_2F_2) - A_1F_1 = A_1A_2$$

Portanto, se P é um ponto do ramo de cima da hipér bole da figura, temos:

$$PF_2 - PF_1 = A_1A_2$$

Analogamente, se P é um ponto do ramo de baixo da hipérbole, temos:

$$PF_1 \quad PF_2 = A_1A_2$$

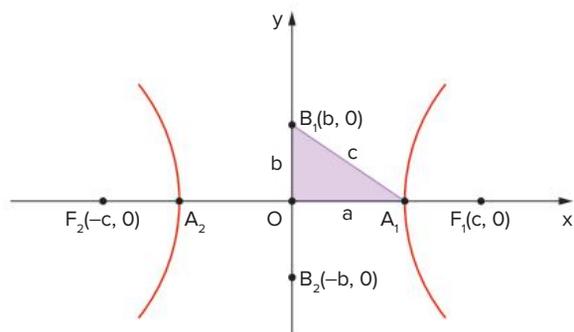
Resumindo as duas condições, se P é um ponto qualquer da hipérbole, então:

$$|PF_2 \quad PF_1| = A_1A_2$$

Da mesma maneira que fizemos para a elipse, vamos estudar a hipérbole como uma curva plana, identificando e nomeando seus elementos.

Considere dois pontos F_1 e F_2 no plano cartesiano cuja dis tância entre eles seja 2c. Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P(x, y) cuja diferença (em módulo) das distâncias a esses pontos fixos é constante e vale 2a (com $2a < 2c$). Em símbolos:

$$\left|PF_2 \mp PF_1\right| \quad 2a$$

A figura a seguir representa uma hipérbole cujos focos são $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. O centro da hipérbole é ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, que, na figura, é o ponto O(0, 0).

A hipérbole

A reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ intersecta a hipérbole nos pontos A_1 e A_2 O segmento $\overline{A_1A_2}$ é denominado **eixo real** da hipérbole. Das propriedades da hipérbole, resulta que $A_1A_2 = 2a$, pois, como A_1 pertence à hipérbole, temos:

$$A_1F_2 \quad A_1F_1 = 2a \Leftrightarrow (A_1A_2 + A_2F_2) \quad A_1F_1 = 2a \Leftrightarrow A_1A_2 = 2a$$

Considere agora uma reta perpendicular ao eixo maior pelo centro da hipérbole Sobre essa reta, sejam B_1 e B_2 os

pontos cujas distâncias a A_1 e A_2 sejam iguais a c O segmento $\overline{B_1B_2}$ é denominado **eixo imaginário** da hipérbole. A medida do eixo imaginário é $B_1B_2 = 2b$.

Os pontos O, B_1 e A_1 formam um triângulo retângulo com catetos de medidas a e b e hipotenusa de medida c. Assim:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Essa equação é denominada **relação fundamental da hipérbole**.

Chamamos de excentricidade a razão $e = \frac{c}{a}$. Para a hipérbole, temos sempre $e > 1$. Assim, quanto mais próximo de 1 for o valor da excentricidade, menor será a abertura dos ramos da hipérbole (a hipérbole fica mais "fechada") Por outro lado, quanto maior for o valor da excentricidade, maior será a abertura dos ramos da hipérbole (a hipérbole fica mais "aberta").

O retângulo cujos pontos médios dos lados são A_1, B_1, A_2 e B_2 está relacionado à geometria da hipérbole As retas que contêm as diagonais do retângulo têm comportamento assintótico em relação à hipérbole, sendo, por isso, denominadas **assíntotas**. Quando tomamos pontos mais afastados da hipérbole, a distância entre esses pontos e as assíntotas diminui. No entanto, é importante perceber que essa distância nunca será zero.

Atenção

A hipérbole e seus elementos

Definição: $|PF_2 \quad PF_1| = 2a$ — Distância focal: $F_1F_2 = 2c$

Eixo real: $A_1A_2 = 2a$ — Propriedade: $c^2 = a^2 + b^2$

Eixo imaginário: $B_1B_2 = 2b$ — Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$

As equações cartesianas da hipérbole

Considere uma hipérbole com centro O na origem e F_1 e F_2 no eixo Ox, cujas coordenadas são $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Assim, tomando um ponto genérico pertencente à hipérbole, podemos usar a definição:

$$|PF_2 \quad PF_1| = 2a$$

$$PF_2 \quad PF_1 = \pm 2a \Leftrightarrow PF_2 = PF_1 \pm 2a$$

Elevando os dois lados ao quadrado, temos:

$$(PF_2)^2 = (PF_1)^2 \pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) + 4a^2$$

$$(x + c)^2 + (y \quad 0)^2 = (x \quad c)^2 + (y \quad 0)^2 \pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) + 4a^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = x^2 \quad 2cx + c^2 \pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) + 4a^2$$

$$\pm 4 \cdot a \cdot (PF_1) = 4a^2 \quad 4cx$$

$$PF_1 = \frac{4a^2}{\pm 4a} \quad \frac{4cx}{\pm 4a}$$

$$PF_1 = \pm a \pm \frac{c}{a}x$$

Elevando de novo ao quadrado, e lembrando que $b^2 = c^2 \quad a^2$, temos:

$$(PF_1)^2 = a^2 \cdot \; 2 \; a \; \frac{c}{a}x \quad \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$(x \; +c)^2 = (y \quad 0)^2 \quad a^2 \quad 2cx \quad \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

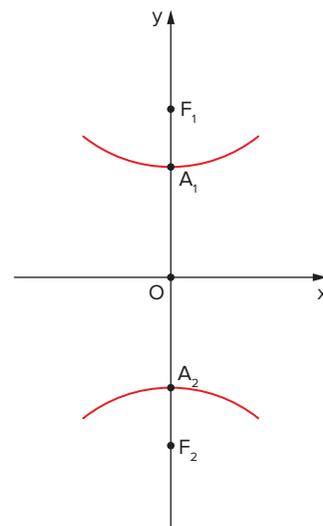
$$c^2 = a^2 \quad \left(\frac{c^2}{a^2} \quad 1\right)x^2 \quad y^2$$

$$c^2 - a^2 = \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 - y^2$$

$$b^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2$$

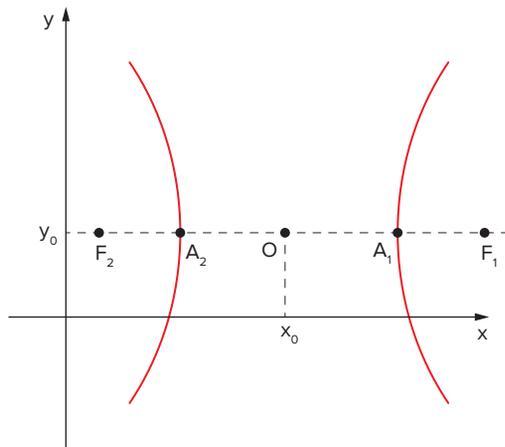
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação $\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1$ é chamada de **equação reduzida da hipérbole**

Para obter as equações da hipérbole com centro na origem e focos no eixo y, basta trocar x por y e y por –x, como fizemos para a elipse.

Assim, obtemos a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} \quad \frac{x^2}{b^2} \quad 1$$

FRENTE 3

Equações da hipérbole com centro fora da origem e eixo focal paralelo ao eixo Ox:

Hipérbole centrada em (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo Ox

Assim, a equação da hipérbole torna-se:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)x^2}{b^2}=1$$

Equações da hipérbole com centro fora da origem e eixo paralelo ao eixo Oy:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Quando a = b, dizemos que a hipérbole é equilátera. Nesse caso, temos $c^2=a^2+b^2=2a^2 \Rightarrow c=a\sqrt{2}$, e a excentricidade é igual a $e=\frac{c}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$

As assíntotas da hipérbole

Um resultado do cálculo diferencial é que uma assíntota oblíqua em relação a uma curva possui coeficiente angular dado por:

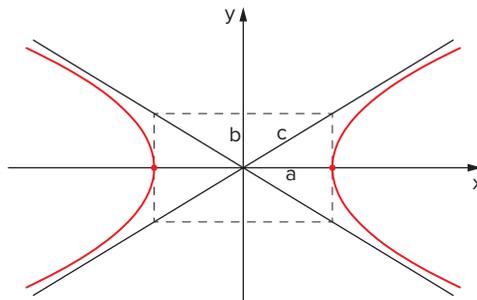
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$$

Para a hipérbole centrada na origem de equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, temos $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$.

Assim, $m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{x}=\pm\frac{b}{a}$.

As assíntotas passam pela origem e têm equações:

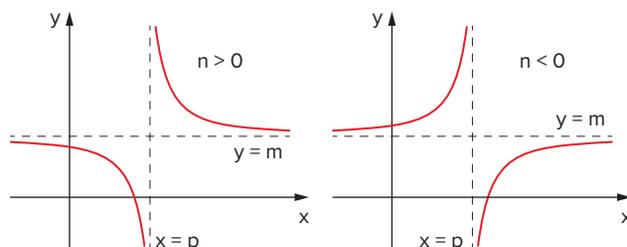
$$y=-\frac{b}{a}x \ \text{ e } \ y=\frac{b}{a}x$$

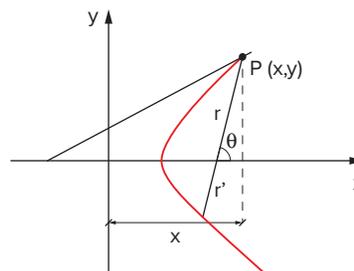
As assíntotas a uma hipérbole na forma canônica são as diagonais do retângulo com lados de medidas iguais ao eixo real e ao eixo imaginário da hipérbole, conforme a figura a seguir:

Assíntotas da hipérbole que se encontra centrada na origem.

Se a hipérbole está centrada em (x_0, y_0), as equações das assíntotas são dadas por:

$$\begin{cases} y=y_0\pm\frac{b}{a}(x-x_0) & \text{hipérbole com eixo real paralelo ao eixo Ox} \\ y=y_0\pm\frac{a}{b}(x-x_0) & \text{hipérbole com eixo real paralelo ao eixo Oy} \end{cases}$$

Para hipérboles equiláteras (b = a) centradas na origem, temos as assíntotas y = ±x (bissetrizes dos quadrantes). Assim, uma hipérbole equilátera centrada na origem, quando rotacionada em 45° em relação ao eixo Ox, assume uma equação cartesiana na forma x · y = k. Se transladarmos seu centro, teremos equações na forma $y=m+\frac{n}{x-p}$, com $n\neq 0$.

O domínio e a imagem dessas funções informam as posições das assíntotas da hipérbole Portanto, sendo $D=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq p\}$ e $Im=\{y\in\mathbb{R} \mid y\neq m\}$, cada função desse tipo admite um dos seguintes gráficos:

A equação polar da hipérbole

De maneira análoga ao que fizemos para a elipse, podemos demonstrar que as equações dos raios vetores da hipérbole são dadas por $r(x)=\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{1-e\cdot\cos\theta}$ e $r'(x)=\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{1+e\cdot\cos\theta}$, com e > 1

Forma polar da hipérbole.

Exercícios resolvidos

5 Determine os elementos da hipérbole de equação $\frac{x^2}{16} \quad \frac{y^2}{9} \quad 1$

Resolução:

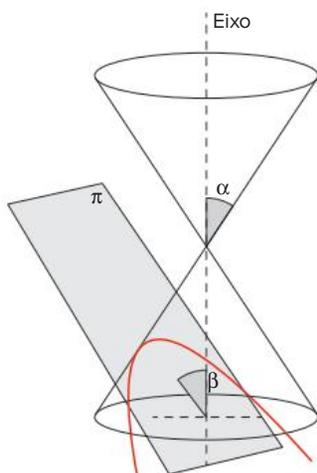
Eixo real: paralelo ao eixo Ox
Centro: C(0, 0)
Semieixo real: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$
Semieixo imaginário: $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$
Semidistância focal: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$
Focos: $F_1(c, 0) = F_1(5, 0)$ e $F_2(-c, 0) = F_2(-5, 0)$
Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1{,}25$
Assíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{4}x$

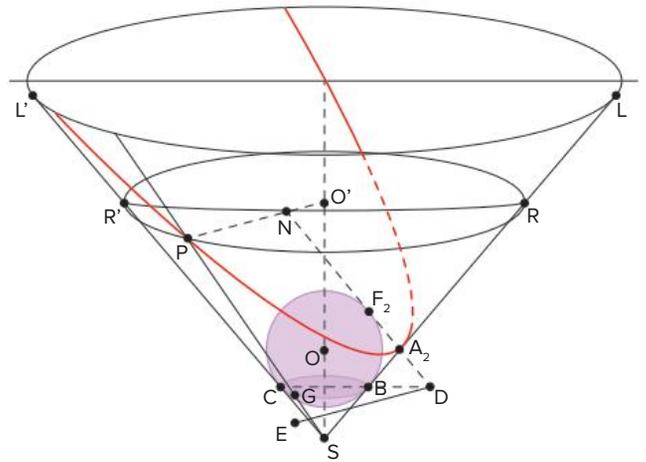
6 Determine os elementos da hipérbole de equação $\frac{(y-8)^2}{9} - (x-1)^2 = 1$.

Resolução:

Eixo real: paralelo ao eixo Oy
Centro: C(1, 8)
Semieixo real: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$
Semieixo imaginário: $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$
Semidistância focal: $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$
Focos:
$F_1(x_0, y_0 + c) = F_1\left(1, 8 + \sqrt{10}\right)$ e $F_2(x_0, y_0 \quad c) \quad F_2\left(1, 8 \quad \sqrt{10}\right)$
Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$
Assíntotas: $y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 8 = \pm 3(x - 1)$

A parábola

Quando o plano π que corta a superfície cônica for paralelo a uma das geratrizes do cone (ou seja, quando os ângulos α e β forem iguais), a interseção do plano π e do cone será uma curva aberta conhecida como **parábola**.

Parábola: α = β.

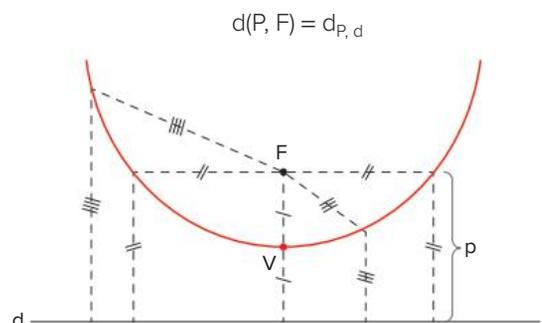
Na figura a seguir, o plano de corte π encontra o plano da circunferência de tangência da esfera com a superfície cônica na reta $\overleftrightarrow{DE}$, que chamaremos de reta diretriz da parábola. A esfera tangente ao cone toca o plano π em F_2

A parábola, a esfera de Dandelin e a reta diretriz.

Na figura, P é um ponto qualquer da parábola. Traçam-se, então, a reta $\overleftrightarrow{PF_2}$ e a geratriz $\overleftrightarrow{SP}$, que corta em G o paralelo $\overleftrightarrow{BC}$ da superfície do cone Assim, temos $PF_2 = PG$ como tangentes a uma esfera pelo mesmo ponto P

Do mesmo modo, PG = BR, pois são geratrizes do mesmo tronco de cone. Os triângulos A_2NR e A_2BD são semelhantes ao triângulo SLL'; portanto, ambos são isósceles e semelhantes entre si Concluímos, então, que ND = BR e, consequentemente, $PF_2 = ND$. Finalmente, no retângulo PNDE, temos ND = PE e $PF_2 = PE$.

Essa propriedade define a parábola como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um foco (F_2) e de uma reta diretriz ($\overleftrightarrow{DE}$).

Colocando a parábola no plano, podemos defini-la e identificar seus elementos. Para isso, considere no plano cartesiano um ponto fixo F e uma reta d Sabemos que uma parábola é o conjunto de pontos do plano que equidistam de F e d. O ponto F é denominado foco da parábola e a reta d é denominada diretriz da parábola. Em símbolos:

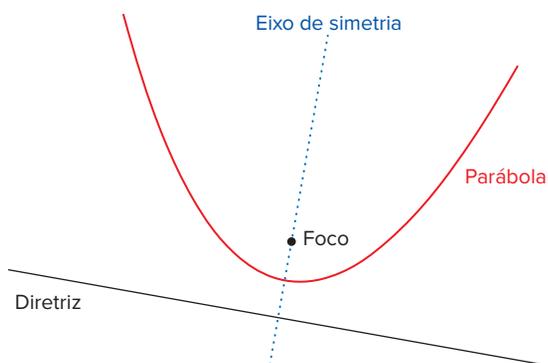
$$d(P, F) = d_{P,\,d}$$

A parábola e seus elementos.

Na figura, a distância **p** entre o foco e a reta diretriz é chamada de **parâmetro da parábola**, e o ponto médio **V** do menor segmento que une o foco da parábola à sua reta diretriz é chamado de **vértice da parábola**.

FRENTE 3

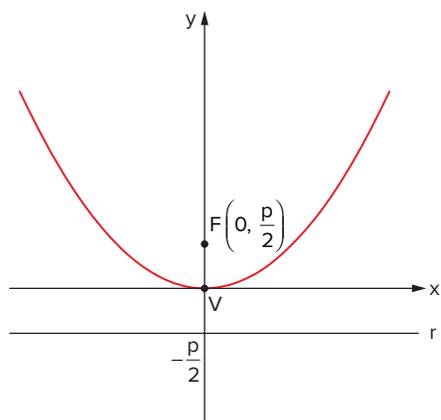
Nesse caso, dado que o vértice pertence à parábola, temos:

$$d(V, F) = d_{V,d} = \frac{p}{2}$$

As parábolas são curvas geométricas abertas dotadas de apenas um eixo de simetria. Este, por sua vez, é uma reta perpendicular à diretriz da parábola e que passa pelo seu foco.

A parábola e o eixo de simetria.

Se definirmos a excentricidade **e** como a razão entre as distâncias de um ponto ao foco e desse ponto à diretriz, temos, para parábolas, que $e = 1$.

Equações cartesianas da parábola

Vamos, inicialmente, deduzir a equação de uma pará bola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo Ox, conforme figura a seguir:

Nesse caso, o foco é $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e a equação da reta diretriz é $y = -\frac{p}{2}$. Tomando um ponto genérico P(x, y) per tencente à parábola, temos:

$$d_{P,r} = d(P, F)$$

$$\left|y + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

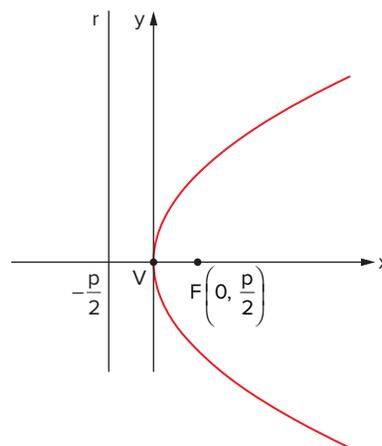
Elevando os dois lados ao quadrado:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow 2py = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2p}x^2$$

Do mesmo modo, podemos deduzir a equação da parábola de vértice na origem e concavidade para baixo, obtendo:

$$y = \quad \frac{1}{2p}x^2$$

Nos dois casos, a equação assume a forma $y = ax^2$, com $a = \pm\frac{1}{2p}$ Se $a > 0$, a concavidade da parábola estará voltada para cima; se $a < 0$, a concavidade da parábola estará voltada para baixo.

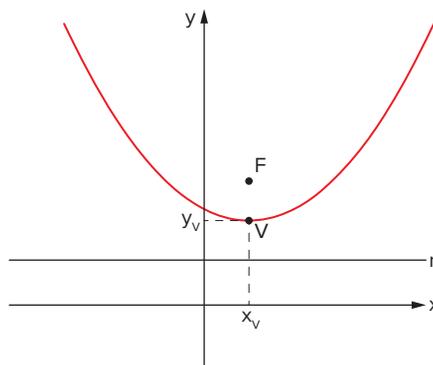
Parábola com vértice na origem e diretriz vertical

Rotacionando a parábola em 90° no sentido horário, o que significa trocar y por x e x por –y na equação anterior, obtemos:

$$x = \frac{1}{2p}y^2$$

Se a concavidade for voltada para a esquerda, teremos:

$$x = \quad \frac{1}{2p}y^2$$

Essas equações são da forma $x = ay^2$.

Equações da parábola com centro fora da origem e diretriz horizontal

Seja o vértice V de coordenadas (x_V, y_V). A parábola com vértice na origem e concavidade para cima tem

equação $y = \frac{1}{2p}x^2$ Fazendo a mudança de variável (translação), $x' = x - x_V$ e $y' = y - y_V$, temos:

$$(y - y_V) = \frac{1}{2p}(x - x_V)^2 \quad \text{(I)}$$

Se a concavidade da parábola for voltada para baixo, teremos:

$$(y - y_V) = -\frac{1}{2p}(x - x_V)^2 \quad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II), chamadas **canônicas**, podem ser colocadas na forma $y = ax^2 + bx + c$ Para isso, desenvolvendo (I):

$$(y = y_V) \Leftrightarrow \frac{1}{2p}(x \quad x_V)^2$$

$$\Leftrightarrow y \neq y_V \quad \cdot\frac{1}{2p}x^2 + \frac{1}{2p}2 \; x \; x_V \quad \frac{1}{2p}x_V^2$$

Fazendo $a = \frac{1}{2p}$, temos:

$$y = ax^2 \quad 2ax_V x + ax_V^2 + y_V$$

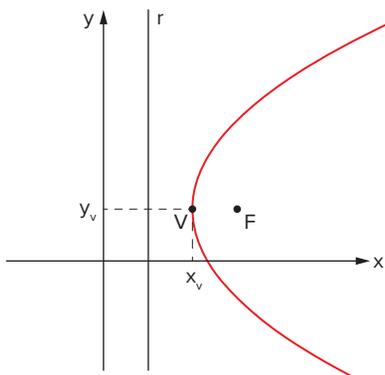
Dessa maneira: $a = \frac{1}{2p}$, $b = -2ax_V$ e $c = ax_V^2 + y_V$.

Isolando x_V e y_V, temos:

$$\begin{cases} x_V = \quad \frac{b}{2a} \\ y_V = c \quad ax_V^2 \quad c \quad a\left(\quad \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow y_V = c \quad \frac{b^2}{4a} \quad \frac{4ac \quad b^2}{4a} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_V = \quad \frac{\Delta}{4a}$$

O parâmetro p é dado por: $a = \frac{1}{2p} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2a}$.

Vértice fora da origem e diretriz vertical

Considere agora uma parábola cujo vértice é o ponto $V(x_V, y_V)$ e cuja diretriz é uma reta vertical.

Quando a parábola tem a concavidade voltada para a direita, sua equação é:

$$(x - x_V) = \frac{1}{2p}(y - y_V)^2$$

Quando a parábola tem a concavidade voltada para a esquerda, sua equação é:

$$(x \neq x_V) \quad \frac{1}{2p}(y \quad y_V)^2$$

Essas equações podem ser escritas na forma $x = ay^2 + by + c$, que é especialmente útil nos problemas em que já se conhece a equação da parábola e, a partir dela, deseja-se obter seus elementos. Nesse caso, as coordenadas do vértice da parábola são:

$$\begin{cases} x_V = -\frac{\Delta}{4a} \\ y_V = \quad \frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow V\left(\quad \frac{\Delta}{4a}, \quad \frac{b}{2a}\right)$$

A parábola como função do 2º grau

Quando a parábola tem diretriz paralela ao eixo Ox (eixo de simetria paralelo a Oy), sua equação assume a forma $y = ax^2 + bx + c$ e pode ser interpretada como uma função de domínio e contradomínio real

Como vimos no capítulo sobre funções do 2º grau, se a parábola tiver raízes reais x_1 e x_2, ela pode ser expressa da seguinte maneira:

$$y = a(x \quad x_1)(x \quad x_2)$$

Exercícios resolvidos

7 Determine a equação da parábola com foco no ponto F(0, 6) e diretriz no eixo Ox.

Resolução:

Seja P(x, y) um ponto da parábola de diretriz d. Pela definição de parábola, temos:

$$d_{P,\,d} = d(P,\,F) \Leftrightarrow y + 0 \quad \sqrt{(x \quad 0)^2 \quad (y \quad 6)^2}$$

$$y^2 = x^2 + y^2 \quad 12y \Leftrightarrow 36 \quad 12y + x^2 \Leftrightarrow 36 \quad y = \frac{1}{12}x^2 + 3$$

8 Identifique os elementos da parábola de equação $8x = y^2 + 8$.

Resolução:

Temos: $8x = y^2 + 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}y^2 + 1$.

A parábola tem eixo de simetria paralelo ao eixo Ox e concavidade voltada para a direita, com $\frac{1}{2p} = \frac{1}{8} \Rightarrow p = 4$.

O vértice é dado por:

$$V\left(\quad \frac{\Delta}{4a}, \quad \frac{b}{2a}\right) = V\left(\quad \frac{0^2 \quad \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1}{4 \cdot \frac{1}{8}}, \quad \frac{0}{2 \cdot \frac{1}{8}}\right) = V(1, 0)$$

O foco é dado por: $F\left(x_V + \frac{p}{2}, y_V\right) = F\left(1 + \frac{4}{2}, 0\right) = F(3, 0)$

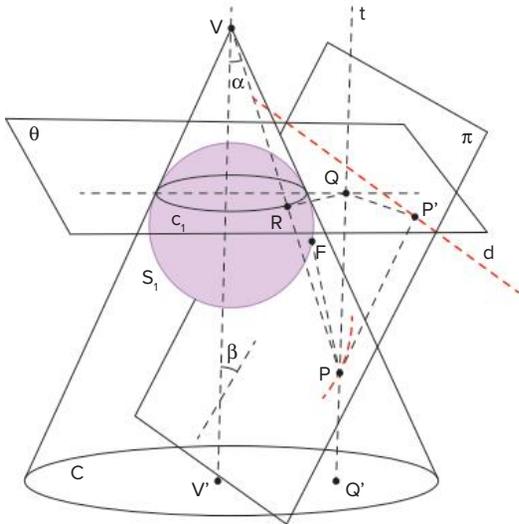
A diretriz é dada por: $x = x_V \Leftrightarrow \frac{p}{2} = x \Leftrightarrow 1 \quad \frac{4}{2} \quad x \quad 1$

FRENTE 3

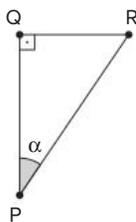
Excentricidade e diretrizes das cônicas

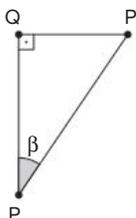
No estudo da parábola, há uma reta chamada diretriz. A seguir, veremos que, de maneira similar, também podemos definir diretrizes para a hipérbole e a elipse.

Assim, sejam a superfície cônica, um plano π secante à superfície cônica e uma esfera tangente ao cone e ao π no ponto F (esfera de Dandelin). Como vimos anteriormente, F é um foco da cônica determinada pela interseção de π com o cone.

Seja o plano θ que contém a circunferência de tangência da esfera e do cone. A reta d, interseção de π e θ será denominada diretriz da cônica.

Uma cônica e sua diretriz

De acordo com a figura apresentada, seja P um ponto da cônica, $\overleftrightarrow{PV}$ uma geratriz do cone, P' a projeção ortogonal de P sobre d e Q a projeção ortogonal de P sobre θ.

Como a reta t que contém $\overline{QP}$ é paralela ao eixo do cone, temos que $med(Q\hat{P}R) = \alpha$ (alternos internos) No triângulo QPR, temos que $PR = \dfrac{PQ}{\cos\alpha}$

Como PR = PF, temos que PR é igual à distância de P ao foco, ou seja: $\dfrac{PQ}{\cos\alpha} = d(P,\ F)$.

De novo, como a reta t, que contém $\overline{QP}$, é paralela ao eixo do cone, temos $med(Q\hat{P}P') = \beta$ (ângulo de inclinação de π em relação ao eixo do cone). No triângulo QPP': $PP' = \dfrac{PQ}{\cos\beta}$.

Como PP' representa a distância do ponto P à diretriz d, temos: $\dfrac{PQ}{\cos\beta} = d_{P,\ d}$

$$\text{Assim: } \frac{d(P,\ F)}{d_{P,\ d}} = \frac{\dfrac{PQ}{\cos\alpha}}{\dfrac{PQ}{\cos\beta}} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

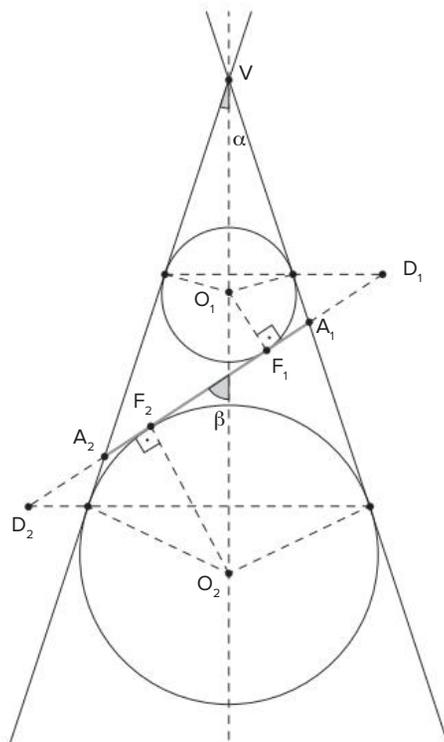
Os ângulos a e b só dependem da superfície cônica escolhida e do plano secante p. Assim, para uma dada cônica, a razão $\dfrac{d(P,\ F)}{d_{P,\ d}} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ é constante. Chamaremos essa razão de excentricidade e, ou seja, $e = \dfrac{d(P,\ F)}{d_{P,\ d}} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Decorre dessa discussão que as cônicas também podem ser definidas como os lugares geométricos do plano cuja razão entre as distâncias de seus pontos a um ponto fixo e a uma reta fixa é uma constante.

Para a elipse: $\alpha < \beta \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta \Rightarrow e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1$

Para a parábola: $\alpha = \beta \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$.

Para a hipérbole: $\alpha > \beta \Rightarrow \cos\alpha < \cos\beta \Rightarrow e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1$.

A seguir, veremos que essa definição de excentricidade é equivalente às definições apresentadas anteriormente neste capítulo.

Para a elipse, seja d a distância do centro da elipse a uma das diretrizes.

Para o vértice A_1, temos:

$$\frac{d(A_1,\ F_1)}{d(A_1,\ D_1)} = e \Rightarrow \frac{a \quad c}{d \quad a} = e \Rightarrow a = c \quad e(d \quad a) \quad \text{(I)}$$

Para o vértice A_2, temos:

$$\frac{d(A_2,F_1)}{d(A_2,D_1)} = e \Rightarrow \frac{a+c}{d+a} = e \Rightarrow a+c = e(d+a) \qquad (II)$$

Fazendo (II) – (I):

$$(a+c)-(a-c) = e(d+a)-e(d-a) \Rightarrow 2c = 2ea \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

Fazendo (I) + (II):

$$(a-c)+(a+c) = e(d-a)+e(d+a) \Rightarrow 2a = 2ed \Rightarrow e = \frac{a}{d}$$

Essas duas últimas relações são as usuais para a excentricidade.

Procedendo de maneira similar para a hipérbole, chegamos aos mesmos resultados Para a parábola, a ex centricidade é sempre 1, e não se definem os parâmetros a, b e c, pois ela não possui centro

Gráficos de relações de duas variáveis

No capítulo 8, estudamos as equações de retas e verificamos que toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com a, b e c reais e com a ou b não nulos, representa uma reta no plano cartesiano, ou seja, os pontos que satisfazem essa equação, se representados em um plano cartesiano, formam uma reta

Vimos também outras equações, como as que repre sentam circunferências e cônicas.

Agora, estudaremos o caso das inequações com até duas variáveis. Vamos começar com as inequações do 1º grau.

> **Lei da tricotomia**
>
> Seja x um número real. Uma, e apenas uma, das afirmações a seguir é verdadeira:
>
> I $x = 0$ II $x > 0$ III $x < 0$

Inequações da forma $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c < 0$

Observe o teorema:

Dada uma equação de reta (r) $ax + by + c = 0$, verifica-se que, para todo par (x_0, y_0), se:

- $ax_0 + by_0 + c = 0$, o ponto (x_0, y_0) pertence à reta
- $ax_0 + by_0 + c > 0$, o ponto (x_0, y_0) pertence a um dos semiplanos determinados pela reta.
- $ax_0 + by_0 + c < 0$, o ponto (x_0, y_0) pertence ao outro semiplano determinado pela reta.

Diante disso, podemos adotar o seguinte método prá tico para resolver inequações do tipo $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c < 0$:

a Construímos o gráfico da reta $ax + by + c = 0$

b Tomamos um ponto externo à reta, substituímos suas coordenadas na expressão $ax + by + c$ e verificamos se tal expressão é positiva ou negativa (ou seja, se satisfaz a inequação ou não).

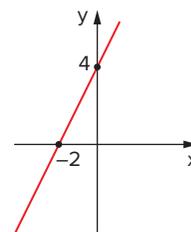
c. Caso o ponto satisfaça a inequação, dizemos que o semiplano que o contém é a solução da inequação; caso não satisfaça, dizemos que é o semiplano oposto a solução da inequação. Tal solução pode ser representada graficamente.

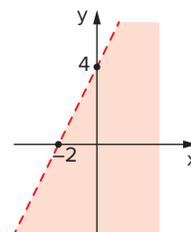
Exercícios resolvidos

9 Resolva a inequação $2x - y + 4 > 0$.

Resolução:

a) Primeiro, construímos o gráfico de $2x \quad y + 4 = 0$:

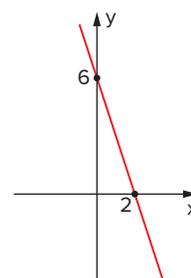
$$2x + y = 4 \Leftrightarrow 0 \quad 2x \Leftrightarrow y \quad 4 \quad \frac{2x}{4} \quad \frac{y}{-4} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$$

b) Note que a origem (0, 0) não pertence à reta, mas vamos trabalhar com ela. Assim, substituindo a origem na expressão, temos $2 \cdot 0 \quad 0 + 4 = 4$.

c) Como $4 > 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) pertence à solução, pois a inequação é satisfeita. Logo, a solução será representada pela seguinte região:

Note que a reta está tracejada, pois seus pontos não pertencem à solução.

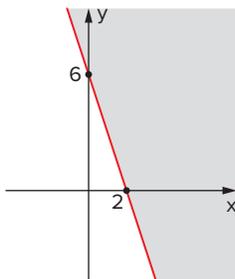
10 Resolva a inequação $3x + y \quad 6 \geq 0$.

Resolução:

a) Primeiro, construímos o gráfico de $3x + y \quad 6 = 0$:

$$3x + y = 6 \Leftrightarrow 0 \quad +3x = y \Leftrightarrow 6 \quad +\frac{3x}{6} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{6} \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$$

b) Note que a origem (0, 0) não pertence à reta Substituindo a origem na expressão, temos $3 \cdot 0 + 0 \quad 6 = \quad 6$.

FRENTE 3

c) Como $-6 < 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) não pertence à solução, pois a inequação não é satisfeita Logo, a solução será representada pela seguinte região:

Note agora que a reta não está mais tracejada, pois seus pontos pertencem à solução, uma vez que a expressão também pode ser igual a 0

Outras inequações com duas variáveis

Dada uma inequação com duas variáveis, devemos adotar o seguinte método geral:

a Construímos o gráfico da equação obtida, considerando a desigualdade como uma igualdade

b. Tomamos um ponto não pertencente à curva obtida em uma das regiões do plano definidas pelo gráfico, substituímos suas coordenadas na inequação e verificamos se ela é satisfeita ou não.

c. Caso o ponto satisfaça a inequação, dizemos que a região que o contém é a solução da inequação; caso não satisfaça, dizemos que a região que o contém não é a solução da inequação. As soluções de inequações desse tipo podem ser representadas graficamente

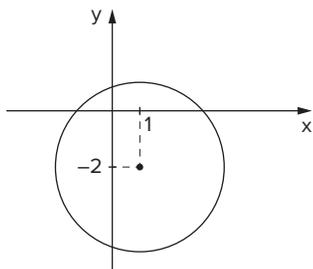
Exercícios resolvidos

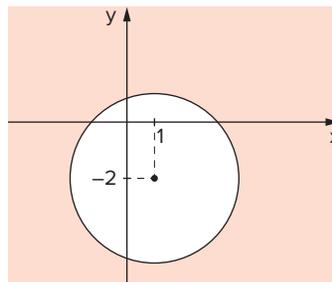
11 Resolva a inequação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 \geq 0$.

Resolução:

a) Primeiro, construímos o gráfico de $x^2 + y^2 \quad 2x + 4y \quad 4 = 0$:

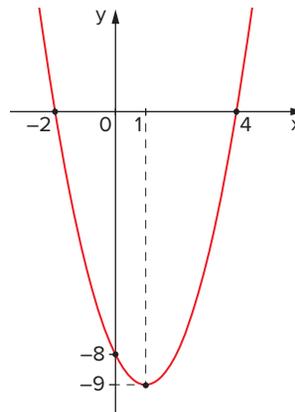
$$x^2 + y^2 \quad 2x + 4y \quad 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 \quad 2x + 1 + y^2 + 4x + 4 = 4 + 1 + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \quad 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

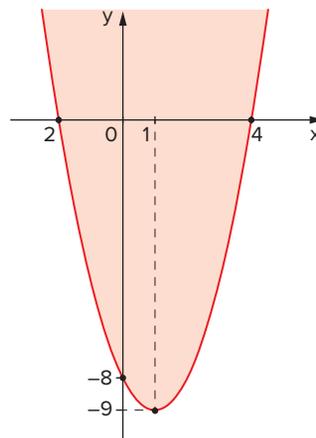
Assim, temos uma circunferência de centro (1, –2) e raio 3.

b) Note que a origem (0, 0) pertence à região interna da circunferência. Substituindo a origem na expressão, temos: $0^2 + 0^2 \quad 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \quad 4 = -4$.

c) Como $\quad 4 < 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) não pertence à solução, pois a inequação não é satisfeita. Logo, a solução será a região externa à circunferência

12 Resolva a inequação $x^2 \quad 2x \quad y \quad 8 \leq 0$.

Resolução:

a) Primeiro, construímos o gráfico de $x^2 - 2x - y - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = x^2 \quad 2x \quad 8$.

Assim, são pontos da parábola: (–2, 0), (4, 0), (0, –8) e o vértice (1, 9)

b) Note que a origem (0, 0) pertence à região "interna" da parábola. Substituindo a origem na expressão, temos: $0^2 \quad 2 \cdot 0 \quad 0 \quad 8 = \quad 8$.

c) Como $-8 < 0$, podemos concluir que esse ponto (a origem) pertence à solução, pois a inequação é satisfeita, uma vez que $0^2 - 2 \cdot 0 - 0 - 8 \leq 0$. Logo, a solução será a região "interna" da parábola.

Sistemas de inequações com duas variáveis

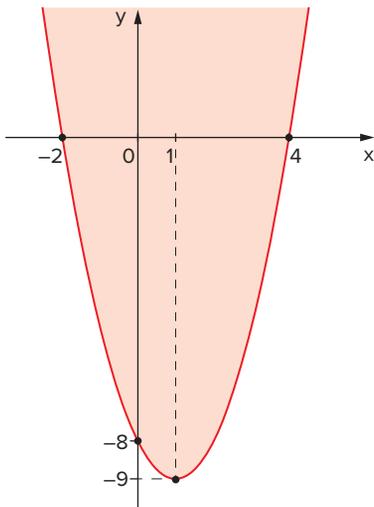
Em sistemas de inequações com duas variáveis, devemos aplicar o mesmo método que utilizamos anteriormente

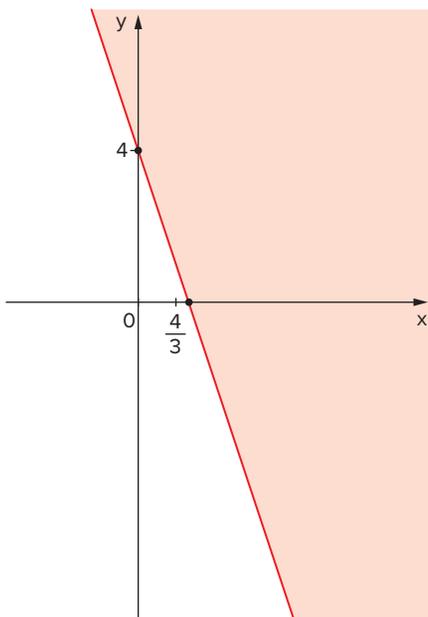
Assim, basta resolver as inequações do sistema separadamente e, em seguida, verificar qual a interseção das regiões encontradas como soluções. A solução do sistema será a que for comum a todas as inequações.

Exercício resolvido

13 Resolva o sistema de inequações $\begin{cases} x^2 - 2x - y - 8 \le 0 \\ 3x + y - 4 \ge 0 \end{cases}$.

Resolução:

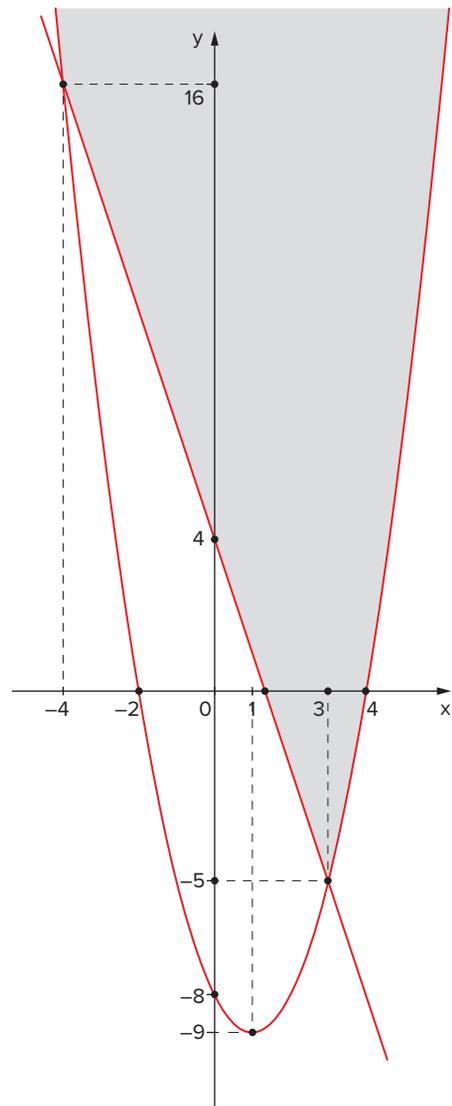
Resolvendo a 1ª inequação, apresentada no exercício resolvido 12, obtemos:

Resolvendo a 2ª inequação, obtemos:

$$3x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + y = 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} = 1$$

Em seguida, determinamos os pontos de interseção entre a reta e a parábola, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y - 8 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos $x^2 + x - 12 = 0$, concluindo, assim, que $x = 3$ ou $x = -4$. Substituindo cada valor de x na equação da reta, obtemos, para $x = 3$, $y = -5$, e, para $x = -4$, $y = 16$. Logo, os pontos de interseção são $(3, -5)$ e $(-4, 16)$. Com isso, podemos construir o gráfico com a solução do sistema.

FRENTE 3

Revisando

1 **UFPE** Considere dois pontos distintos A e B de um plano. O lugar geométrico dos pontos P deste plano tal que a soma das distâncias de P aos pontos A e B é constante, é uma curva denominada:

A circunferência
B parábola
C hipérbole
D elipse
E reta

2 **PUC-Campinas (Adapt.)**

Visões do multimundo

Agora que assinei a TV a cabo, pressionado pelos filhos adolescentes (e pela curiosidade minha, que não lhes confessei), posso "ampliar o mundo sem sair da poltrona". Foi mais ou menos isso o que me disse, em tom triunfal, a prestativa atendente da empresa, com aquela vozinha treinada que imita à perfeição uma secretária eletrônica. Não é maravilhoso você aprender a fazer um suflê de tubérculos tropicais ou empadinhas e em seguida saltar para um documentário sobre o tribunal de Nuremberg? Se Copérnico (ou foi Galileu?) estivesse vivo, reformularia sua tese: o sol e a terra giram em torno da TV a cabo.

Aprendo num programa que elipses e hipérboles (além de serem figuras de linguagem) têm a ver com equações reduzidas... Num outro me garante um economista que o nacionalismo é uma aberração no mundo globalizado (será que isso vale também para as nações do Primeiro Mundo?). Tenho que ir mais devagar com este controle remoto (que, aliás, nunca saberei exatamente como funciona: nem fio tem!).

[...]

(Cândido de Castro, inédito)

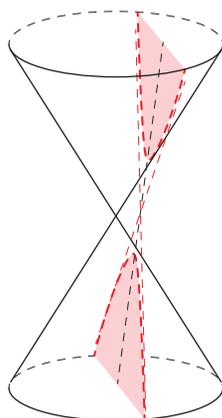
O autor do texto aprendeu que elipses e hipérboles têm equações reduzidas. A expressão $\left(\frac{x^2}{100}\right)+\left(\frac{y^2}{36}\right)=1$ é a equação reduzida de uma elipse de

A excentricidade $\frac{5}{3}$.
B distância focal 16.
C eixo menor igual a 6.
D eixo maior igual a 10.
E centro no ponto (5, 6).

3 **Unirio** A área do triângulo PF_1F_2, em que $P(2, -8)$ e F_1 e F_2 são os focos da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, é igual a:

A 8
B 16
C 20
D 32
E 64

4 **UnB** O cometa Halley tem uma órbita elíptica com eixo maior e eixo menor iguais a 540×10^7 km e 140×10^7 km, respectivamente. Sabendo que o Sol está em um dos focos da elipse, calcule o valor $\frac{d}{10^7}$, em que d é a menor distância entre o Sol e o cometa, medida em quilômetros. Desconsidere a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

5 A curva destacada a seguir é uma das curvas conhecidas como cônicas

Essa curva tem várias aplicações práticas, como o uso em arcos arquitetônicos, presentes na Catedral de Brasília, no Planetário de Saint Louis, nas torres de refrigeração de usinas nucleares, entre outros

rmnunes/iStockphoto.com

Catedral de Brasília, Distrito Federal

Joseph Sohm/Shutterstock.com

Planetário de Saint Louis, Estados Unidos.

DanielPrudek/iStockphoto.com

Torres de refrigeração de usina nuclear

A curva mencionada é uma:

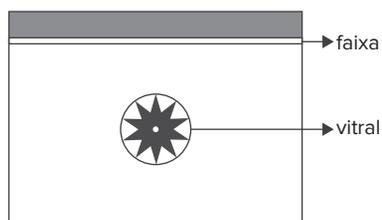
A parábola, lugar geométrico dos pontos que equidistam de um foco e uma reta.
B hipérbole, lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias em relação aos focos fixos é constante.
C hipérbole, lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias em relação aos focos fixos é constante.
D elipse, lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias em relação aos dois focos fixos é constante.
E elipse, lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias em relação aos dois focos fixos é constante.

6 Uma hipérbole tem centro na origem, eixo imaginário medindo 10, focos no eixo Oy e excentricidade $\frac{3}{2}$. Determine sua equação reduzida.

7 Uma hipérbole de eixo real horizontal e centro C(9, 7) tem eixo imaginário medindo 2b = 4 e eixo real medindo 2a = 8. Obtenha:

a) a equação reduzida da hipérbole.

b) as equações das assíntotas da hipérbole.

8 **UFF** Na parede retangular de um palácio renascentista, há um vitral circular e, acima dele, na mesma parede, uma estreita faixa reta, conforme a figura

Essa parede foi ornamentada com um elemento decorativo em forma de uma curva, que tem a seguinte característica: cada ponto da curva está situado a igual distância do centro do vitral e da faixa. Pode-se afirmar que o elemento decorativo tem a forma de um arco:

A de elipse.
B de hipérbole.
C de parábola.
D de circunferência.
E de senoide.

9 Considere uma parábola cujo foco é F(4, 4) e cuja reta diretriz é r: $x = \ \ 3$ Determine:

a) a equação da parábola
b) o vértice V

10 Considere uma parábola de equação $y = 2x^2 \quad 8x + 6$ Determine:

a) as coordenadas do vértice
b) as coordenadas do foco
c) a equação da diretriz
d) equação do eixo

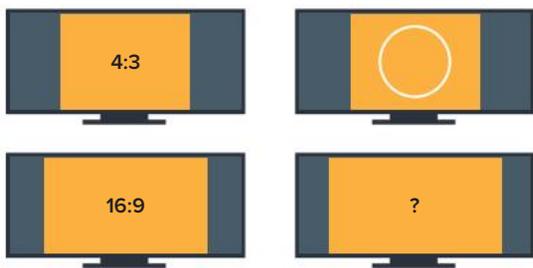
11 Resolva a inequação $2x + y \quad 5 < 0$.

12 Resolva a inequação $(x \quad 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4$.

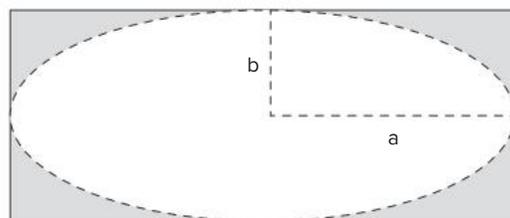
FRENTE 3

13 Resolva a inequação $x \quad y^2 \geq 0$

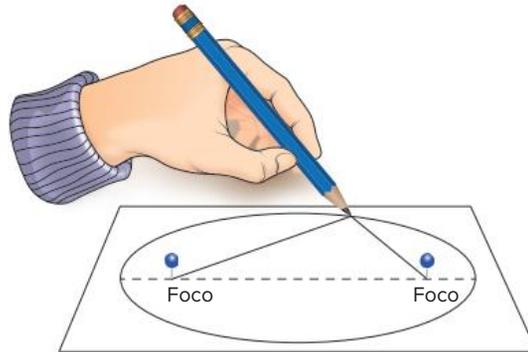
Exercícios propostos

1 A nova tela de televisão *Super Widescreen* exibe as imagens em formato 21:9, mas também apresenta, no menu de opções, os formatos de tela tradicionais 16:9 e 4:3. Quando a regulagem do formato de tela é alterada, a imagem do televisor é dilatada nas direções horizontal e vertical de maneira independente, de acordo com a proporção do novo formato.
Como atualmente há poucas transmissões de filmes no formato *Super Widescreen*, os aparelhos costumam ser assistidos com adaptações em formato que inutiliza parte da tela do televisor, como mostram as figuras a seguir:

Se o descanso da tela de um televisor como esse mostra uma circunferência quando está regulada no formato 4:3, então, quando for regulada no formato 16:9 essa tela mostrará

A uma circunferência maior
B uma circunferência menor
C uma elipse com o eixo maior na horizontal
D uma elipse com o eixo maior na vertical
E uma hipérbole

2 Um fabricante de utensílios feitos de aço inoxidável quer lançar no mercado bandejas elípticas que serão recortadas de chapas retangulares de acordo com o seguinte esquema:

Para estimar a quantidade de metal dispensado em cada corte, o fabricante calculou a área da elipse segundo a expressão $\pi \cdot a \cdot b$, em que a e b representam, respectivamente, a maior e a menor distância do centro da elipse até um de seus pontos Então, observando que tanto a elipse quanto o retângulo do esquema têm os mesmos eixos de simetria, o fabricante calculou a diferença entre a área da chapa retangular e a área da bandeja elíptica, depois substituiu π por 3,14 em seu resultado Dessa forma, se ele efetuou seus cálculos corretamente, deve ter concluído que a quantidade de metal dispensado em cada corte representa apenas

A 21,5% da área da chapa retangular
B 12,5% da área da chapa retangular
C 32,5% da área da chapa retangular
D 6,25% da área da chapa retangular
E 1,25% da área da chapa retangular

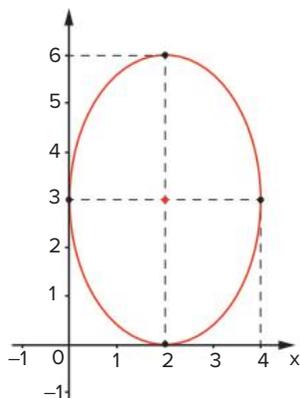
3 O astrônomo e matemático Johannes Kepler descobriu que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas e têm o Sol em um de seus focos As elipses podem ser desenhadas em tábuas de madeira usando-se dois pregos e um barbante, como mostra a ilustração:

Nessas condições, os pontos onde os pregos foram fixados determinam os focos da elipse. A excentricidade de uma elipse pode ser calculada dividindo-se a distância entre os pregos e o comprimento do barbante.
A tabela a seguir apresenta as excentricidades das órbitas dos planetas do Sistema Solar.

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
Excentricidade	0,2	0,07	0,02	0,09	0,05	0,06	0,05	0,009

Fonte: <www.sbfisica.org.br/fne/Vol4/Num2/v4n2a06.pdf>.

Quando o formato de uma elipse está próximo do formato de uma circunferência, dizemos tratar-se de uma elipse arredondada; caso contrário, é uma elipse alongada
Então, de acordo com a tabela, no nosso Sistema Solar, o planeta que tem a órbita mais arredondada e o que tem a órbita mais alongada são, respectivamente:

A Saturno e Marte
B Urano e Marte
C Vênus e Júpiter
D Netuno e Mercúrio.
E Netuno e Terra

4 **Unesp 2014** A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados

Valendo-se das informações contidas nesta representação, determine a equação reduzida da elipse.

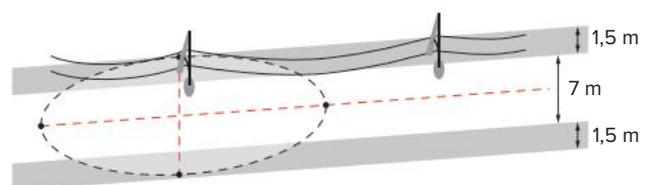
5 **Unesp** A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

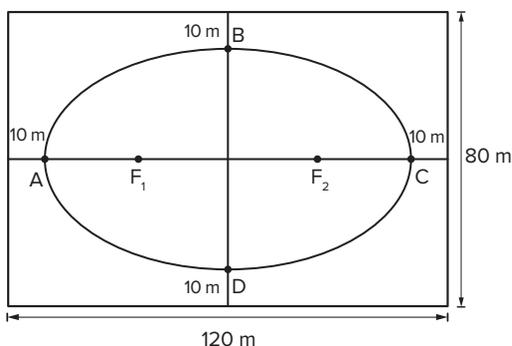
I os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;

II o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;

III o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

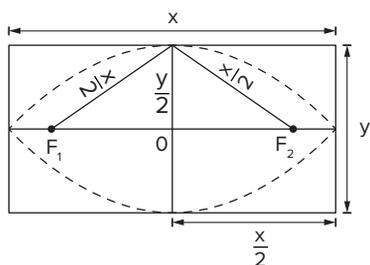
Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dado: $0,943^2 \cong 0,889$ e $\sqrt{0,111} \cong 0,333$

A 35
B 30
C 25
D 20
E 15

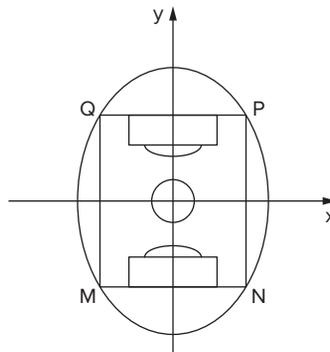
6 **UFPB 2011** A secretaria de infraestrutura de um município contratou um arquiteto para fazer o projeto de uma praça. Na figura a seguir, está o esboço do projeto proposto pelo arquiteto: uma praça em formato retangular medindo 80 m × 120 m, onde deverá ser construído um jardim em forma de elipse na parte central.

Estão destacados na figura os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ que são, respectivamente, o eixo maior e o menor da elipse, bem como os pontos F_1 e F_2, que são os focos da elipse onde deverão ser colocados dois postes de iluminação.

Com base nessas informações, conclui-se que a distância entre os postes de iluminação será, aproximadamente, de:

A 68 m
B 72 m
C 76 m
D 80 m
E 84 m

7 **UEPB 2012** Deseja-se construir uma praça em forma de elipse em um terreno retangular de dimensões x metros e y metros, com x > y, de perímetro 300 m e área 5000 m^2, conforme nos mostra a figura.

Estando previstas as instalações de duas torres de iluminação, uma em cada foco da elipse, F_1 e F_2, local de melhor distribuição e aproveitamento das mes mas, concluímos que a distância em metros entre as torres é

A $100\sqrt{3}$
B $25\sqrt{3}$
C $50\sqrt{3}$
D $40\sqrt{3}$
E $30\sqrt{3}$

8 **EsPCEx 2011** Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo MNPQ, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2}+\frac{y^2}{60^2}=1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo MNPQ.

Assim, a distância entre as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ é

A 48 m
B 68 m
C 84 m
D 92 m
E 96 m

9 **Unesp** Suponha que um planeta P descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela O, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela O a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$, com x e y em milhões de quilômetros.

A figura representa a estrela O, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo PÔA mede $\frac{\pi}{4}$.

(figura fora de escala)

A distância, em milhões de km, do planeta P à estrela O, no instante representado na figura, é:

A $2\sqrt{5}$.
B $2\sqrt{10}$.
C $5\sqrt{2}$
D $10\sqrt{2}$.
E $5\sqrt{10}$.

10 Um *webdesigner* foi contratado para fazer o *site* de uma instituição educacional dedicada à astronomia chamada “Elipse” Os diretores da instituição decidiram que a logomarca presente no *site* deveria ser a figura formada pelos gráficos das equações $4x^2 + 9y^2 = 36$ e $4x^2 + y^2 = 4$ em um mesmo sistema cartesiano tradicional, com o eixo x na horizontal Então, o *webdesigner* digitou corretamente essas equações em um de seus programas de computação gráfica e descobriu que a imagem da logomarca da instituição no *site* seria:

A
D
B
E
C
11 **FGV 2013** Sendo m o maior valor real que x pode assumir na equação analítica $(x - 2)^2 + 4(y + 5)^2 = 36$, e n o maior valor real que y pode assumir nessa mesma equação, então, m + n é igual a

A 8. B 7. C 6. D 4. E 3.

12 A comissão de formatura da turma do último ano de uma faculdade de Arquitetura está discutindo a estampa da camiseta comemorativa de conclusão do curso A figura a seguir ilustra uma proposta de uma estampa em duas cores separadas por retas perpendiculares e dois arcos simétricos um ao outro, que se aproximam das retas perpendiculares sem tocá-las:

Essa estampa deverá ser computada em um *software* que aceita como entradas as equações analíticas das curvas cônicas. Assim, para que o *software* compute os arcos que separam as cores apresentadas, os estudantes deverão digitar a equação de uma:

A reta
B circunferência
C elipse
D parábola
E hipérbole

13 **UFPI** O gráfico da equação $x^2 \quad y^2 = 4$ representa uma hipérbole Os focos dessa hipérbole são:

A $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\ \frac{1}{2}, 0\right)$
B (2, 0) e (–2, 0)
C $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ e $\left(\ 2\sqrt{2}, 0\right)$
D $\left(0, \sqrt{2}\right)$ e $\left(0, -2\sqrt{2}\right)$
E $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(0, \ \frac{1}{2}\right)$

14 Uma hipérbole equilátera tem centro na origem e focos no eixo Ox. Sabendo que sua distância focal é 6, dê sua equação.

15 **UEL** Considere o círculo $x^2 + y^2 \quad r^2 = 0$ de raio r e a hipérbole $x^2 \quad y^2 = 1$

Nesse caso, pode-se afirmar que:

A se $r < 1$, então as curvas se intersectam em quatro pontos.
B se $r = 1$, então as curvas têm quatro pontos em comum.
C se $r = 1$, as curvas se intersectam em (0, 1) e (0, –1).
D se $r = \sqrt{17}$, então as curvas se intersectam apenas nos pontos $\left(3, 2\sqrt{2}\right)$ e $\left(\ 3, \ 2\sqrt{2}\right)$.
E se $r > \sqrt{17}$, então as curvas se intersectam em quatro pontos.

16 **UFC** No plano cartesiano, a hipérbole $xy = 1$ intersecta a circunferência τ em quatro pontos distintos A, B, C e D. Calcule o produto das abscissas dos pontos A, B, C e D.

17 **UFRGS** O produto de duas variáveis reais, x e y, é uma constante Portanto, dentre os gráficos abaixo, o único que pode representar essa relação é

A
y
0
x

D
B
y
0
x

E
C
y
0
x

18 A hipérbole cujo eixo real é paralelo a um dos eixos coordenados tem equação $3x^2 \quad y^2 \quad 6x \quad 4y + 2 = 0$. Determine sua equação reduzida

19 As mais modernas máquinas de cortar chapas de aço-carbono, aço inoxidável, alumínio e cobre utilizam a tecnologia do corte a plasma, que é feito por um braço robótico cujos movimentos são programados em um computador Uma maneira eficiente de se programar os movimentos do braço dessa máquina é introduzir os dados dos cortes que se deseja fazer na forma de equações analíticas, como:

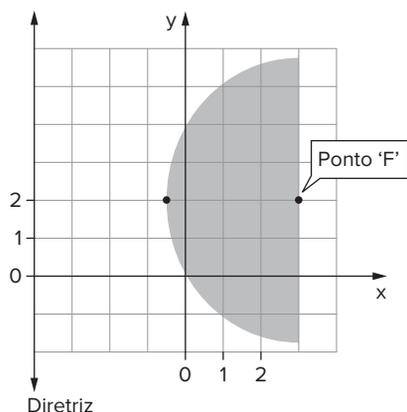
I. $x^2 - y^2 = 1$
II $4x^2 + y^2 = 4$
III. $x^2 + 4y^2 = 4$
IV. $x^2 + y^2 = 4$
V. $x^2 + 4y = 4$

Assim, para programar um corte circular e um corte parabólico, pode-se usar as seguintes equações analíticas:

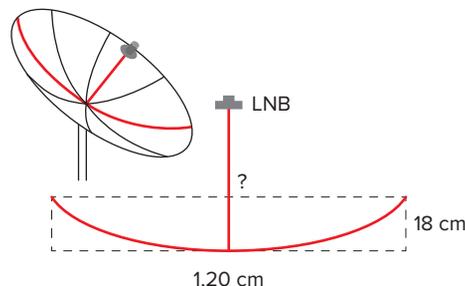
A I e IV
B II e III
C III e IV
D IV e V
E I e V

20 Para a parábola de equação $x = \frac{1}{8}y^2 \quad y + 5$, determine:

a) as coordenadas do vértice
b) as coordenadas do foco.
c) a equação da diretriz
d) a equação do eixo.

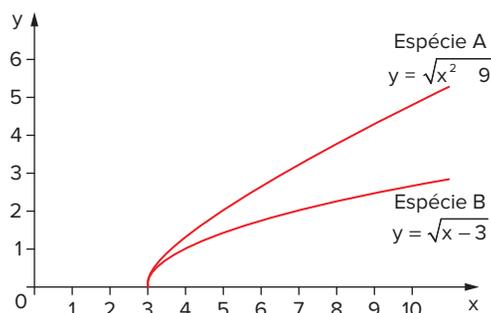
21 **Uema 2014** Uma família da cidade de Cajapió-MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida abaixo, coberta com uma folha quadriculada.

Note que a figura projetada na parede é uma cônica Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será

A $(y - 2)^2 = 7(2x + 1)$.
B $(y + 2)^2 = 7(2x + 1)$.
C $(y \quad 3)^2 = 12(x + 1)$.
D $(y \quad 2)^2 \quad 7\left(2x \quad \frac{1}{7}\right)$
E $(y + 3)^2 = \frac{12}{7}(x - 1)$.

22 As antenas parabólicas, utilizadas para recepção de sinais de rádio e televisão, têm a forma geométrica de um paraboloide de revolução que reflete feixes paralelos de radiação eletromagnética vindos do espaço, concentrando os no foco da antena onde fica localizado o receptor chamado LNB (*Low-Noise Block*) A figura a seguir mostra uma antena parabólica com 1,2 m de diâmetro e uma de suas seções meridianas:

A seção da antena tem a forma de um arco de parábola inscritível em um retângulo de 1,2 m por 18 cm, em cujo eixo de simetria fica localizada uma **haste** de alumínio presa ao vértice da parábola que serve para manter o receptor LBN posicionado no foco da parábola.

Sabendo que a distância entre o vértice e o foco de uma parábola de equação $y = ax^2$ é dada pela expressão $\frac{1}{4|a|}$, pode-se estimar o comprimento da **haste** dessa antena em:

A 20 cm
B 30 cm
C 40 cm
D 50 cm
E 60 cm

23 Dois arbustos de espécies diferentes foram plantados no mesmo dia e brotaram três dias depois. O gráfico a seguir compara o crescimento, em centímetros, dos dois arbustos em função do número x de dias após o plantio:

De acordo com as expressões algébricas que modelam o crescimento das espécies A e B, pode-se concluir que as curvas apresentadas no gráfico são arcos de:

A parábola (espécie A) e elipse (espécie B).
B hipérbole (espécie A) e parábola (espécie B)
C elipse (espécie A) e parábola (espécie B).
D elipse (espécie A) e hipérbole (espécie B).
E hipérbole (espécie A) e elipse (espécie B)

24 **ITA** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, seja (L) o lugar geométrico dos pontos P(x, y) que satisfazem a seguinte condição: "a distância de P(x, y) ao ponto Q (6, 0) é igual à distância do ponto P(x, y) ao eixo das ordenadas". Nestas condições (L) é:

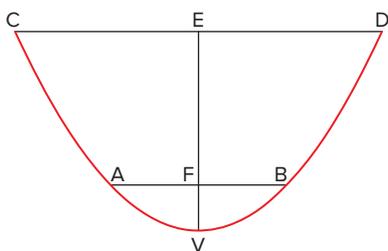
A uma parábola de equação $y^2 = 6x$.

B uma elipse de equação $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C um quadrado.

D uma hipérbole de equação $3x^2 \quad = 2y^2 \quad \sqrt{6}$

E uma parábola de equação $y^2 \quad 12x + 36 = 0$.

25 **UFCG** Uma secção transversal de um refletor parabóli co é mostrada na figura abaixo A lâmpada é colocada no foco F e sabe-se que |AB| = 8 cm e |VE| = 11 cm, onde V é o vértice da parábola Considere um sistema de coordenadas em que V seja o ponto (0, 0) Sabe-se que uma equação de uma parábola de vértice V(0, 0) e foco F(0, c) é $x^2 = 4cy$.

Com essas informações, a equação da parábola e o comprimento |CD| são, respectivamente:

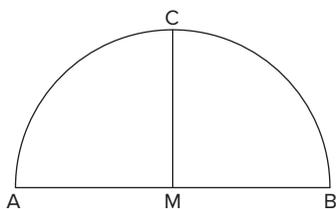
A $x^2 = 8y$, $|CD| = 11$ cm.

B $x^2 = 10y$, $|CD| = \sqrt{80}$ cm.

C $x^2 = -9y$, $|CD| = 9$ cm.

D $x^2 = 8y$, $|CD| = 4\sqrt{22}$ cm.

E $x^2 = 8y$, $|CD| = 10$ cm.

26 **Unifesp** A figura mostra um arco parabólico ACB de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

A altura do arco em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de M, é

A 15
B 14
C 13
D 12
E 10.

27 Resolva graficamente as inequações:

a) $2x + 3y + 1 > 0$

b) $3x - 4y - 6 < 0$

28 Resolva graficamente as inequações:

a) $2x - y \leq 0$

b) $2x \quad 4y + 4 \geq 0$

29 Resolva graficamente as inequações:

a) $x^2 + y^2 < 16$

b) $x^2 + y^2 \quad 2x \quad 2y \quad 7 \geq 0$

30 Resolva graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x \quad + y \; < 1 \quad 0 \\ x + y + 2 < 0 \end{cases}$$

31 Resolva graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x + 3y < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

32 Determine graficamente os pontos P(x, y) do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem o seguinte sistema de inequações: $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \quad > 2 \quad 0 \end{cases}$

33 Determine graficamente a solução dos sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 6x + 3y - 6 \leq 0 \\ 3x + 6y \geq \quad 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 5y < 10 \\ y \leq 2 \end{cases}$

34 Resolva graficamente a inequação: $\frac{x - y - 2}{x + y \quad 2} \geq 0$

35 Resolva graficamente o sistema: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 4 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 > 16 \end{cases}$

36 Resolva a inequação $\frac{(x \quad 1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} \leq 1$.

37 Resolva a inequação $y > x^2 \quad 5x + 4$.

38 Resolva a inequação $x \leq y^2 - 3y - 4$.

39 Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} (x+2)^2 + (y \quad > 1)^2 \quad 9 \\ y \geq 2 \end{cases}$

40 Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} y > x^2 \quad -5x \quad 4 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$

Textos complementares

Kepler e a órbita elíptica

[...] Copérnico calculou as distâncias dos planetas ao Sol no pressuposto de que eles se deslocassem com velocidades constantes em órbitas circulares centradas no Sol. Os dados de observação, entretanto, eram insuficientes para comprovar isso [ ] Essa insuficiência de dados precisos era uma das dificuldades maiores para se decidir qual dos [ ] modelos planetários correspondia à realidade. E quem compreendeu bem o problema e empenhou toda uma vida para superar essas dificuldades foi o dinamarquês Tycho Brahe [ ]

Tycho Brahe (1546-1601) tornou-se apaixonado da Astronomia aos 14 anos de idade [...]. Dos 17 aos 26 anos de idade, Tycho adquiriu vários instrumentos de observação e construiu muitos outros, maiores e cada vez mais precisos [ ]

[...] Era chegada "a vez e a hora de Tycho Brahe". Ele acabara de construir um novo sextante, cujos braços mediam quase dois metros de comprimento! E que se articulavam com precisão num eixo de bronze que não permitia folga O arco do instrumento possuía uma escala graduada, não apenas em graus, mas também em minutos de graus! [...]

[...] Tycho Brahe sempre contou com o irrestrito apoio do rei Frederico II da Dinamarca. [...] [Este] ofereceu lhe então a Ilha de Huen, no canal que separa a Dinamarca da Suécia, para que ali construísse o observatório de seus sonhos, casa para morar, oficinas, fábrica de papel, impressora, tudo à custa do reino! [ ] Ali passou os próximos 20 anos de sua vida, coletando o mais rico acervo de observações astronômicas até então conseguido

[...] De posse dessa riqueza de dados, Tycho Brahe podia concluir com segurança que o sistema heliocêntrico, tal qual exposto por Copérnico, era insustentável. [...]

In BRAHE Tycho Astronomiae Instauratae Mechanica Nurembergue Levinus Hulsius 1602.

Tycho Brahe aparece nesse mural em meio a seus instrumentos, na companhia de seus assistentes e de seu inseparável cão [...].

Frederico II morreu em 1588. [ ] [Tycho] fixou residência no castelo de Benatek, próximo à cidade de Praga, como "matemático imperial" do imperador Rodolfo II da Boêmia. Essa mudança aproximava Tycho Brahe da personagem principal da nossa história [ ]

Johannes Kepler (1571-1630) [...] nasceu no sudoeste da Alemanha, em Weil-der-Stadt, um lugarejo situado 30 km a oeste de Stuttgart, a capital de Württenberg. [...]

[...] Não seriam seus pais que iriam bem cuidar de seus estudos, mas o Estado, cujo sistema educacional localizava e encaminhava os meninos inteligentes. Se pobres, como era o caso de Kepler, não faltavam bolsas que os dotavam dos meios necessários para se dedicarem ao trabalho escolar sem preocupações. Foi assim que Kepler, cuja brilhante inteligência revelou-se precocemente, embarcou numa carreira de estudo que o levaria da escola elementar ao seminário e deste a universidade

Aos 23 anos de idade, quando ainda estudante de Teologia em Tübingen, Kepler foi indicado para preencher o posto vago de Professor de Astronomia e Matemática na universidade protestante de Graz, na Áustria. [...]

Johannes Kepler

Tycho Brahe.

[...] O primeiro livro do jovem astrônomo, intitulado *Mysterium Cosmographicum*, [foi] publicado em Tübingen em 1596

Tycho Brahe, como vimos, era exímio observador. Mas não tinha competência matemática para trabalhar os dados de suas observações. Quando recebeu e examinou o livro de Kepler, logo reconheceu em seu autor um talento matemático singular, que ele, Tycho, não possuía, e de que necessitava para ajudá-lo a aperfeiçoar sua nova teoria planetária. [...] Eles trocaram correspondência por cerca de dois anos, e, decerto, perceberam o quanto cada um necessitava do outro. Foram esses interesses mútuos que acabaram fazendo de Kepler um assistente de Tycho Brahe, em Benatek, a partir de fevereiro de 1600.

Tycho Brahe morreu em outubro de 1601, sem que o sistema planetário de seus sonhos pudesse ser concluído. [...]

Com a morte de Tycho Brahe, Kepler foi logo nomeado seu sucessor, no posto de Matemático Imperial, onde permaneceu até a morte de Rodolfo II, em 1612. Nos seis primeiros anos de sua permanência em Benatek, ele descobriu suas duas primeiras leis planetárias, que aparecem no seu segundo livro, publicado em 1609, sob o título *Astronomia Nova* Seu trabalho foi intenso e árduo, envolvendo séries intermináveis de longos e laboriosos cálculos, procurando acertar hipóteses que frequentemente levavam a conclusões falsas e exigiam

recomeçar tudo de novo. As dificuldades vinham de preconceitos antigos Desde Aristóteles, firmara-se a convicção de que os corpos celestes, dada sua perfeição, só podiam mover-se em círculos, pois eram essas as únicas órbitas “perfeitas”; e moviam-se com velocida de uniforme, pois uma variação na velocidade seria uma imperfeição. Presos a esses "dogmas", os astrônomos tinham de recorrer a artifícios geométricos para explicar os movimentos observados nos céus. [...] Em seus intermináveis cálculos e tentativas de ajustar teoria à realidade, Kepler foi abandonando esses artifícios e finalmente os dogmas da órbita circular e do movimento uniforme. [...]

Desde sua chegada a Benatek, Kepler concentrou-se no planeta Marte, e por uma razão muito simples, sendo o primeiro dos planetas exteriores, ele se move mais rapidamente em sua órbita, retornando logo à posição inicial, o que facilita seu estudo. Ele é também aquele cuja órbita é mais elíptica e que, portanto, mais difere de um círculo. [...]

Kepler verificou que a órbita de Marte era uma elipse de excentricidade $e \approx 0{,}093$. Isso nos dá [...] $b \approx 0{,}99a$.

Assim, se desenharmos a órbita de Marte com semieixo maior igual a 10 cm, o semieixo menor será [...] apenas 1 mm a menos que o semieixo maior. Isto mostra que é impossível perceber visualmente que a órbita de Marte não é circular! [...]

Kepler estendeu a todos os planetas do sistema solar a lei da órbita elíptica, que descobrira para o planeta Marte, a qual ficou conhecida como sua 1ª lei e que assim se enuncia:

Cada planeta descreve uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos

[...] Kepler encontrara outra regularidade interessante no movimento dos planetas. [ ] Conhecida como sua 2ª lei, e tem o seguinte enunciado:

Os raios vetores que unem um planeta ao Sol varrem áreas iguais em tempos iguais.

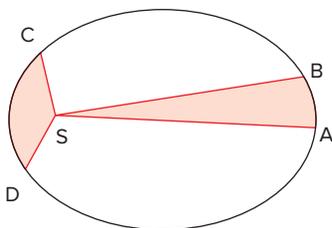



Ilustração das leis de Kepler.

[...] Caberia a Isaac Newton (1642-1727) redescobrir no emaranhado dos escritos de Kepler suas três leis e nelas identificar os funda mentos da Mecânica Celeste, sintetizados em sua Lei da Gravitação Universal.

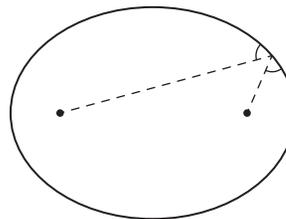
ÁVILA, Geraldo. “Kepler e a órbita elíptica”. *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, 15 ed. Disponível em: <http://rpm org.br/cdrpm/15/2.htm> Acesso em: 25 fev. 2019.

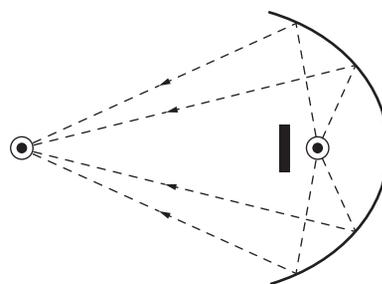
A elipse, a parábola e a hipérbole – propriedades e aplicações

A elipse, a parábola e a hipérbole são curvas que possuem propriedades que as tornam importantes em várias aplicações Aqui vamos ocupar--nos apenas das chamadas propriedades de reflexão dessas curvas, relacionadas com pontos especiais chamados focos.

O caso da elipse

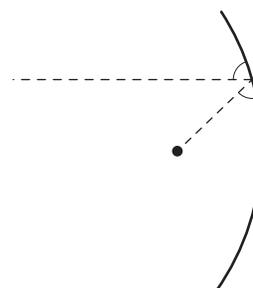
[...] A propriedade de reflexão da elipse é a seguinte: a partir de um dos focos tracemos um segmento de reta qualquer Este segmento encontra a elipse num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco.

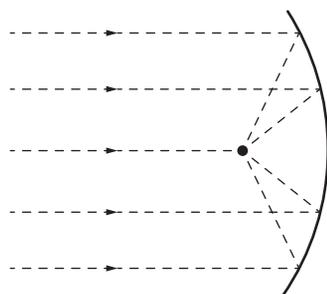
(Nota: Os ângulos com as curvas são os ângulos com as respectivas tangentes nos pontos em causa.)

Propriedade de reflexão da elipse.

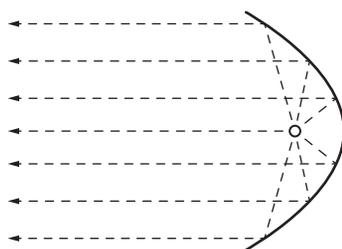
Esta propriedade faz com que a elipse tenha várias aplicações práticas. Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.

Instrumento óptico elíptico.

Uma ilustração acústica da propriedade de reflexão da elipse pode encontrar-se em salas que têm a forma de meio elipsoide (um elipsoide é um sólido que se obtém rodando uma elipse em torno do seu eixo, isto é, da reta definida pelos dois focos) Se duas pessoas se colocarem nos focos e uma delas falar, mesmo que seja baixo, a outra ouvirá perfeitamente, ainda que a sala seja grande e haja outros ruídos. Existem salas deste tipo (às vezes chamadas “galerias de murmúrios”) em vários edifícios públicos [ ].

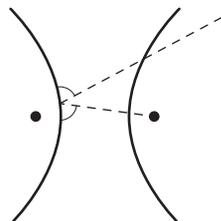
O caso da parábola

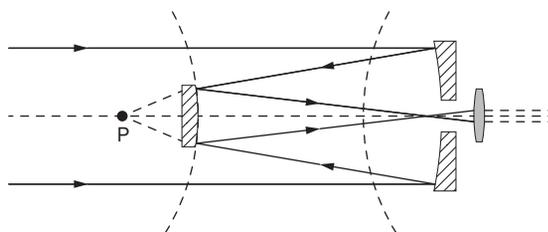
[...] A propriedade de reflexão da parábola é a seguinte: a partir de um ponto qualquer tracemos um segmento de reta paralelo ao eixo da parábola Este segmento encontra a parábola num ponto, e se a partir dele traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo foco.

Propriedade de reflexão da parábola.

Esta propriedade faz com que a parábola tenha várias aplicações práticas. Um exemplo são as vulgares antenas parabólicas, que concentram num aparelho receptor os sinais vindos de um satélite de televisão.

Antena ou espelho parabólico.

Uma aplicação óptica são os faróis dos automóveis e das motocicletas, que são espelhados por dentro e em que se coloca a lâmpada no foco.

Farol parabólico.

O caso da hipérbole

[ ] A propriedade de reflexão da hipérbole é a seguinte: a partir de um ponto qualquer tracemos um segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole. Este segmento encontra o correspondente ramo da hipérbole num ponto, e se a partir dele traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco.

Propriedade de reflexão da hipérbole.

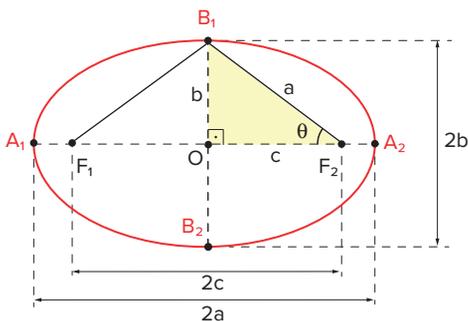
[ ] Um exemplo de uma aplicação óptica é o chamado **telescópio de reflexão** É constituído basicamente por dois espelhos, um maior, chamado **primário**, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da primeira coincida com um dos focos da segunda.

Telescópio de reflexão com seu espelho primário parabólico (à direita) e o secundário hiperbólico (à esquerda).

Quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica.

A vantagem desse tipo de telescópio reside no fato de ter um comprimento muito menor do que os telescópios de refração (isto é, de lentes) com o mesmo poder de ampliação [ ]

QUEIRÓ, João Filipe. "A elipse, a parábola e a hipérbole propriedades e aplicações" *Universidade de Coimbra* Disponível em: <www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes pdf> Acesso em: 25 fev. 2019.

Resumindo

Elipse

Definição: $PF_1 + PF_2 = 2a$

Centro: $O(x_0, y_0)$

Eixo maior: $A_1A_2 = 2a$

Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$

Distância focal: $F_1F_2 = 2c$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$

Propriedade: $a^2 = b^2 + c^2$

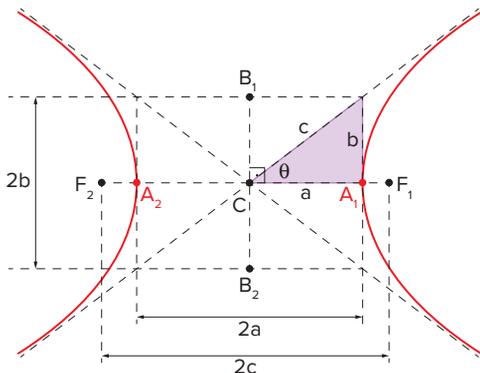
Equações da elipse

Eixo focal paralelo ao eixo Ox:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Eixo focal paralelo ao eixo Oy:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole

Definição: $|PF_1 - PF_2| = 2a$

Centro: $C(x_0, y_0)$

Eixo real: $A_1A_2 = 2a$

Eixo imaginário: $B_1B_2 = 2b$

Distância focal: $F_1F_2 = 2c$

Propriedade: $c^2 = a^2 + b^2$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$

Equações da hipérbole

Eixo focal paralelo ao eixo Ox:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Eixo focal paralelo ao eixo Oy:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

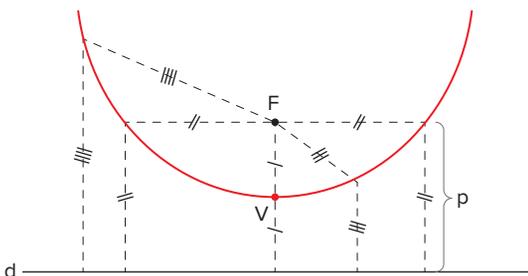
Equações das assíntotas da hipérbole

Eixo real paralelo ao eixo Ox:

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$$

Eixo real paralelo ao eixo Oy:

$$y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0)$$

Parábola

Definição: $d(P, F) = d_{P, d}$

Diretriz: d

Parâmetro: $p = d_{F, d}$

Vértice: $V(x_V, y_V)$

Parábola com diretriz horizontal

$$(y - y_V) = \pm\frac{1}{2p}(x - x_V)^2 \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$$

$$a = \pm\frac{1}{2p}$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Parábola com diretriz vertical

$$(x - x_V) = \pm\frac{1}{2p}(y - y_V)^2 \Leftrightarrow x = ay^2 + by + c$$

$$a = \pm\frac{1}{2p}$$

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

Quer saber mais?

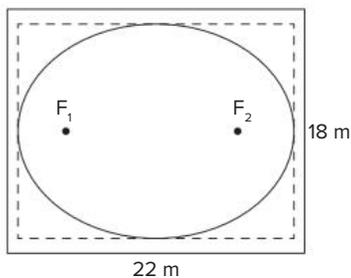
Site

- Quem foi Johannes Kepler?
  Disponível em: <https://super abril.com.br/historia/johannes-kepler/>

Vídeos

- Cosmos A harmonia dos mundos
  Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=oClZIoD8XOc>.
- Cosmos Johannes Kepler
  Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=9wgKPMNb_pM&t=178s>.
- Hubble: segredos do espaço
  Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=UDQskO-vtt8>.
- Catedral de Brasília
  Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=CWmNmQxNNG0>.

Exercícios complementares

1 **UFRN 2013** Um arquiteto projetou, para um salão de dimensões 22 m por 18 m, um teto de gesso em formato de elipse com o eixo maior medindo 20 m e o eixo menor, 16 m, conforme ilustra a figura abaixo.

O aplicador do gesso afirmou que saberia desenhar a elipse, desde que o arquiteto informasse as posições dos focos. Para orientar o aplicador do gesso, o arquiteto informou que, na direção do eixo maior, a distância entre cada foco e a parede mais próxima é de

A 3 m. B 4 m. C 5 m. D 6 m.

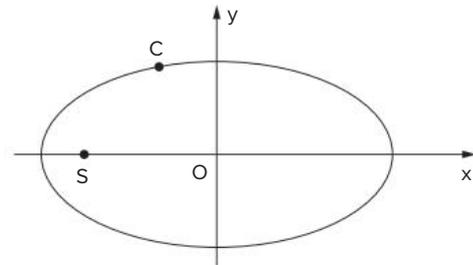
2 **ITA** Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos A(0, 9) e B(x, 3), x > 0, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

A $22\sqrt{10}$ B $18\sqrt{10}$ C $15\sqrt{10}$ D $12\sqrt{10}$ E $6\sqrt{10}$

3 **Unesp** Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Mostre que o ponto $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ pertence à elipse e calcule a distância de P ao eixo das abscissas

b) Determine os vértices Q e R da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, onde $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$

4 **UnB 2012**

A figura acima ilustra a situação em que um cometa (C) percorre uma órbita elíptica de centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy Nessa órbita elíptica, o Sol (S) aparece em um dos focos. Considere que a elipse seja representada pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, em que a > b > 0, e tenha excentricidade igual a 0,96 Nesse caso, se a distância mínima desse cometa ao Sol for igual a 0,58 UA (unidade astronômica), em que 1 UA = 150 × 10^6 km é a distância média da Terra ao Sol, então a distância máxima do cometa ao Sol, **em milhões de km**, será

A inferior a 3700.
B superior a 3700 e inferior a 4000.
C superior a 4000 e inferior a 4300
D superior a 4300

5 **Unesp 2018** A terceira Lei de Kepler sobre o movimento de planetas, aplicada a um certo sistema planetário, afirma que o período P da órbita elíptica de um planeta, em dias, está relacionado ao semieixo maior α da elipse, em milhões de quilômetros, pela fórmula $P = 0{,}199 \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}$. Nos cálculos a seguir, considere 1 ano = 365 dias.

a) Sabendo que o período da órbita de um planeta é 1,99 ano, calcule o valor de $\alpha^{\frac{3}{2}}$.

b) Calcule o período P de um planeta desse sistema planetário cuja órbita elíptica está representada na figura a seguir

6 **EsPCEx 2014** Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 \quad 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.

A Seu centro é (–2, 1)

B A medida do seu eixo maior é 25.

C A medida do seu eixo menor é 9.

D A distância focal é 4.

E Sua excentricidade é 0,8.

7 **Unicamp** Dada uma elipse de semieixos a e b, calcu le, em termos destes parâmetros, a área do quadrado nela inscrito, com lados paralelos aos eixos da elipse

8 **IME 2014** Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semidistância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações y = x e y = x
A área do quadrilátero ABCD é

A 8

B 16

C $\frac{16}{3}$

D $\frac{16}{5}$

E $\frac{16}{7}$

9 **IME 2013** Considere uma haste AB de comprimento 10 m. Seja um ponto P localizado nesta haste a 7 m da extremidade A. A posição inicial desta haste é horizontal sobre o semieixo x positivo, com a extremidade A localizada na origem do plano cartesiano. A haste se desloca de forma que a extremidade A percorra o eixo y, no sentido positivo, e a extremidade B percorra o eixo x, no sentido negativo, até que a extremidade B esteja sobre a origem do plano cartesiano. A equação do lugar geométrico, no primeiro quadrante, traçado pelo ponto P ao ocorrer o deslocamento descrito é

A $49x^2 + 9y^2 \quad 280x + 120y \quad 441 = 0$

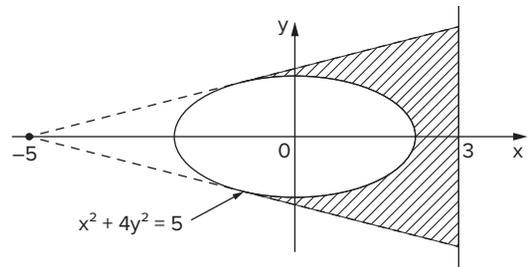
B $49x^2 \quad 406x \quad 49y^2 + 441 = 0$

C $9x^2 + 49y^2 \quad 441 = 0$

D $9x^2 + 9y^2 + 120y \quad 441 = 0$

E $9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$

10 Considere no plano xOy a elipse de focos $F_1(\ 1, 1)$ e $F_2(1,\ 1)$ e semieixo maior igual a 2. Calcule a medida do outro semieixo da elipse e determine a interseção dela com a reta de equação x = 1.

11 **Uerj** Um holofote situado na posição (–5, 0) ilumina uma região elíptica de contorno $x^2 + 4y^2 = 5$, projetando sua sombra numa parede representada pela reta x = 3, conforme ilustra a figura abaixo.

Considerando o metro a unidade dos eixos, o comprimento da sombra projetada é de:

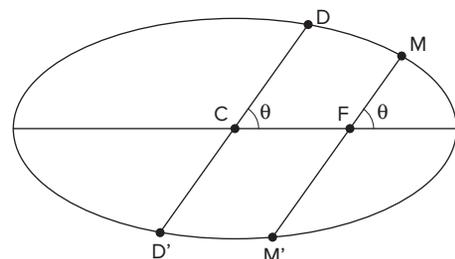
A 2

B 3

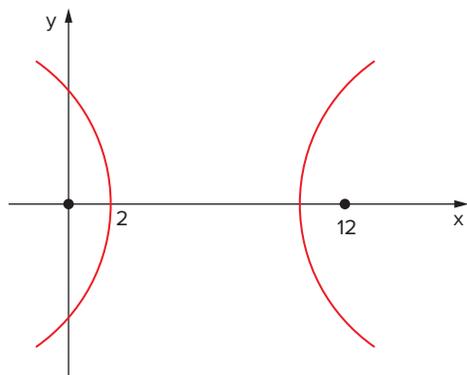
C 4

D 5

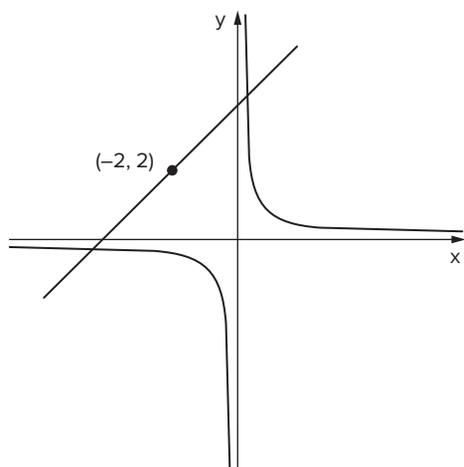
12 **IME 2018** Considere a elipse abaixo, onde $\overline{DD'}$ é uma corda passando pelo seu centro, $\overline{MM'}$ uma corda focal e o eixo maior da elipse é 2a
Prove que: $(DD')^2 = MM' \cdot 2a$

FRENTE 3

13 Os trechos de duas estradas diferentes assumem uma forma hiperbólica que, representada em um determinado sistema de coordenadas, é tal que:

- o foco de um de seus ramos é a origem do sistema O(0, 0);
- o vértice desse ramo é o ponto (0, 2);
- o foco do outro ramo da hipérbole é o ponto (12, 0).

Veja a figura:

Determine:

a) as coordenadas do outro vértice da hipérbole.
b) a medida do eixo imaginário da hipérbole
c) a equação da hipérbole.
d) os pontos em que a hipérbole intercepta o eixo das ordenadas

14 **PUC-Rio 2015** Considere a hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$ mostrada na figura abaixo:

a) Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y - 2 = x + 2$.
b) Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y - 2 = -x - 2$.
c) Para quais valores do parâmetro real m a reta de equação $y - 2 = m(x + 2)$ intersecta a hipérbole em exatamente um ponto?

15 Considere a hipérbole de equação $2x^2 \quad y^2 = 2$ e a reta r de equação $3x \quad y + 5 = 0$. Determine as equa ções das retas que são paralelas à r e tangentes à hipérbole.

16 **IME** Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $\left(\sqrt{5}, 1\right)$. A equação da reta tangente a esta hipérbole e paralela a $y = 2x$ é

A $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$
B $y = -2x + 3\sqrt{3}$
C $3y = 6x + 2\sqrt{3}$
D $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 4$
E $y = 2x + \sqrt{3}$

17 **IME 2011** Uma reta, com coeficiente angular a_1, passa pelo ponto (0, –1). Uma outra reta, com coeficiente angular a_2, passa pelo ponto (0, 1). Sabe-se que $a_1^2 + a_2^2 = 2$. O lugar geométrico percorrido pelo ponto de interseção das duas retas é uma:

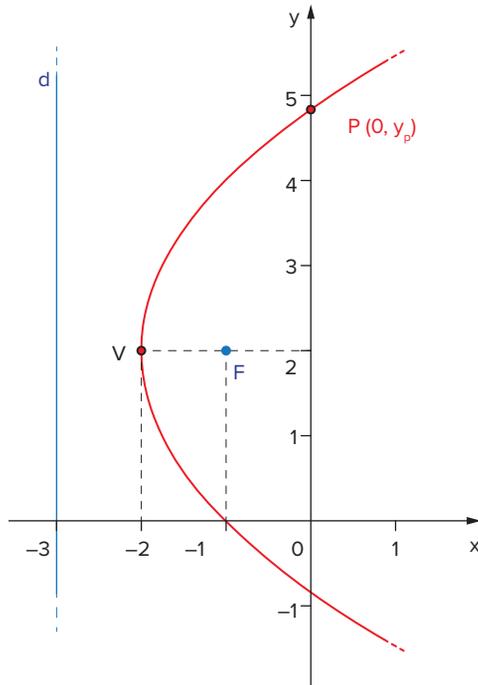
A hipérbole de centro (0, 0) e retas diretrizes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
B circunferência de centro (a_1, a_2) e raio $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
C hipérbole de centro (0, 0) e retas diretrizes $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
D elipse de centro (0, 0) e retas diretrizes $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
E elipse de centro (a_1, a_2) e retas diretrizes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

18 **ITA** Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

19 **IME** Considere as hipérboles que passam pelos pontos (–4, 2) e (–1, –1) e apresentam diretriz na reta y = –4. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

20 **IME** Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B, sobre o eixo positivo das ordenadas Sabe-se que a base mede b e seu ângulo oposto $\hat{B} = 120^\circ$ Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias às outras duas retas que suportam os dois outros lados Determine a(s) equação(ões) do lugar geométrico e identifique a(s) curva(s) descrita(s)

21 **Unesp 2016** Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta d, de equação x =   3, e um ponto F, de coordenadas (1, 2) Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto F e da reta d

forma uma parábola Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice V, de coordenadas (2, 2), e o ponto P, de coordenadas $(0, y_P)$

Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de V e de P Em seguida, calcule y_P.

22 **Fuvest 2014** Considere a circunferência λ de equação cartesiana $x^2 + y^2 \quad 4y = 0$ e a parábola α de equação $y = 4 \quad x^2$.

a) Determine os pontos pertencentes à interseção de λ com α.

b) Desenhe em um plano cartesiano a circunferên cia λ e a parábola α. Indique, no seu desenho, o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem, si multaneamente, as inequações $x^2 + y^2 \quad 4y \leq 0$ e $y \geq 4 \quad x^2$.

23 **ITA** Sejam A(a, 0), B(0, a) e C(a, a), pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas a seguir, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos P(x, y) cuja distância à reta que passa por A e B é igual à distância de P ao ponto C.

A $x^2 + y^2 \quad 2xy \quad 2ax \quad 2ay + 3a^2 = 0$

B $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

C $x^2 + y^2 \quad 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

D $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

E $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

24 **ITA** Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos (2, 5), (–1, 2) e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto (2, 5).

25 **ITA 2016** Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e P(a, b) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se distância de P a S, d(P, S), como a menor das distâncias d(P, Q), com $Q \in S$:

$$d(P, S) = \min\{d(P, Q) | Q \in S\}$$

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$.

a) Determine $d(P, S_1)$ quando P(1, 4) e $d(Q, S_1)$ quando Q(3, 0).

b) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de S_1 e de S_2.

26 **IME 2012** É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal $\overline{MN}$, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda $\overline{MN}$ intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento $\overline{MR}$.

27 Resolva graficamente a inequação $|x| > 1$.

28 Resolva graficamente a inequação $|x \quad y| \leq 1$

29 Resolva graficamente a inequação $|x + y| < 1$

30 Determine graficamente os pontos P do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a desigualdade:

$$|x| + y > 1$$

31 Determine graficamente os pontos P do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a desigualdade:

$$|x| + |y| \leq 1$$

32 Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem as desigualdades:

$$y \quad 2 > 0 \text{ e } |x| \leq 1$$

33 Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem as desigualdades:

$$1 < |y| < 2 \text{ e } 1 < |x| < 3$$

34 Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a inequação produto $3x \quad y + 6) (2x + 4y \quad 12) < 0$.

35 Determine graficamente os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a inequação quociente

$$\frac{x + y - 1}{2x \quad y \quad 2} \geq 0 .$$

36 Determine graficamente os pontos do plano cartesiano que são soluções do sistema $\begin{cases} \dfrac{x + y \quad 2}{x - y + 1} \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

FRENTE 3

37 Fuvest 2017 Um caminhão deve transportar, em uma única viagem, dois materiais diferentes, X e Y, cujos volumes em m^3 são denotados por x e y, respectivamente. Sabe-se que todo o material transportado será vendido. A densidade desses materiais e o lucro por unidade de volume na venda de cada um deles são dados na tabela a seguir.

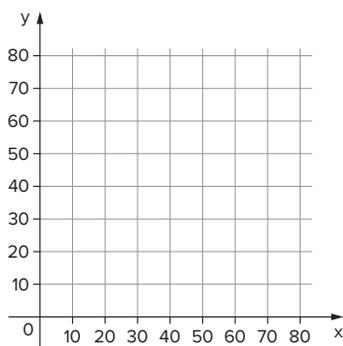
Material	Densidade	Lucro
X	125 kg/m^3	R$ 120,00/m^3
Y	400 kg/m^3	R$ 240,00/m^3

Para realizar esse transporte, as seguintes restrições são impostas:

I. o volume total máximo de material transportado deve ser de 50 m^3;

II. a massa total máxima de material transportado deve ser de 10 toneladas.

Considerando essas restrições:

a) esboce, no plano cartesiano preparado a seguir, a região correspondente aos pares (x, y) de volumes dos materiais X e Y que podem ser transportados pelo caminhão;

b) supondo que a quantidade transportada do material Y seja exatamente 10 m^3, determine a quantidade de material X que deve ser transportada para que o lucro total seja máximo;

c) supondo que a quantidade total de material transportado seja de 36 m^3, determine o par (x, y) que maximiza o lucro total

38 ITA 2017 Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq ||x| \quad 1|\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y + 1)^2 \leq 25\}$ A área da região $S_1 \cap S_2$ é

A $\frac{25\pi}{4} - 2$.

B $\frac{25\pi}{4} - 1$.

C $\frac{25\pi}{4}$

D $\frac{75\pi}{4} - 1$.

E $\frac{75\pi}{4} - 2$.

39 FGV 2016 No plano cartesiano, a área do polígono determinado pelo sistema de inequações

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{4x \quad 12}{3} \leq y \leq 2x + 4 \end{cases}$$

é igual a

A 12

B 12,5.

C 14.

D 14,5

E 15

40 Represente graficamente o conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente as desigualdades:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

gustavofrazao/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

11

Posições relativas no espaço

A Geometria é a área da Matemática que estuda formas, tamanhos e posições, como vimos nos capítulos sobre Geometria Plana Euclidiana e Geometria Analítica. Agora, conheceremos a Geometria Espacial.

Este capítulo é dedicado ao estudo das posições relativas entre as entidades geométricas no espaço. Assim, será apresentado um novo vocabulário visando complementar o que já foi estabelecido pela Geometria Plana, bem como alguns novos conceitos inerentes ao espaço tridimensional.

Sem esse vocabulário e esses conceitos, ficaria difícil definir os formatos das figuras sólidas ou compreender as expressões usadas para calcular as grandezas métricas próprias dessas figuras.

Geometria Posicional

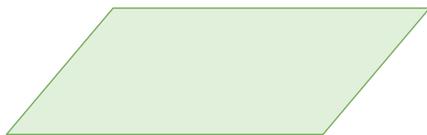
Por volta de 300 a C , Euclides compilou tudo o que se conhecia da Geometria em livros chamados *Os elementos* Essas obras apresentam a estrutura utilizada até hoje para construir as teorias de primeira ordem, os entes primitivos, que são uma série de afirmações denominadas **postulados de Euclides**. A partir deles, podemos deduzir as afirmações mais importantes da Geometria: os teoremas Vamos co nhecê los a seguir

Entes primitivos

Vimos que, em seus livros, Euclides apresentou o que chamamos hoje de entes primitivos, que são todos os entes de uma teoria que não têm definição. Na teoria dos con juntos, por exemplo, não definimos o que são conjuntos e elementos nem a noção de inclusão – embora tenhamos uma boa ideia do que sejam. Na Geometria, por sua vez, há três entes primitivos: o ponto, a reta e o plano.

O **ponto** é uma figura geométrica sem dimensões, ou seja, não tem comprimento, largura e altura. Geralmente, os pontos são representados pela interseção entre duas linhas.

A **reta** é uma figura geométrica que possui uma única dimensão e, embora não tenha definição, pode ser entendi-da como o conjunto de todos os infinitos pontos que estão alinhados em uma mesma direção É importante notar que, ao representar uma reta, indicamos apenas um pedaço finito dela, denominado **segmento de reta**. Este pode ser estendido nos dois sentidos, fazendo com que a reta seja “infinita” em seu comprimento.

O **plano** é uma figura geométrica que possui apenas duas dimensões e pode ser entendido como uma superfície lisa e infinita em todas as direções contidas nela. Desse modo, ele é representado por um pedaço dessa superfície lisa

! Atenção

A norma da notação geométrica para os entes primitivos obedece às seguintes convenções:

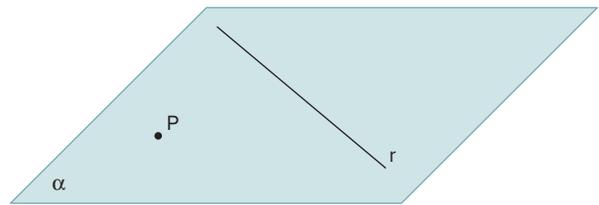
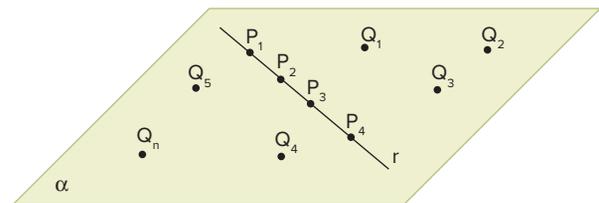
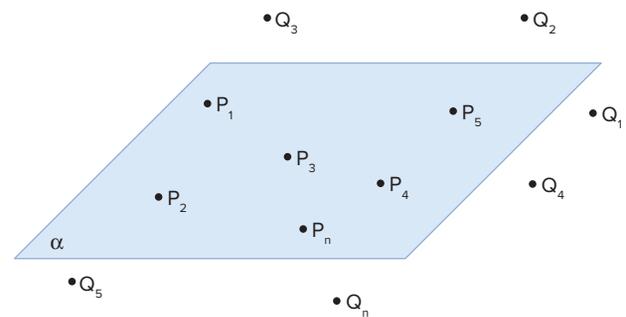
- Letras maiúsculas para pontos: A, B, C, P, Q, ...
- Letras minúsculas para retas: r, s, t,
- Letras gregas para planos: α, β, γ, ...

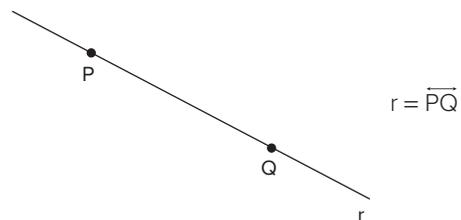
Os postulados de Euclides

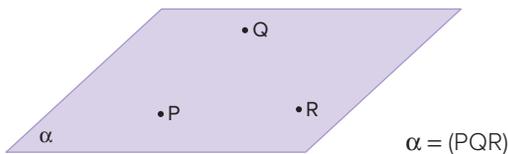
Para construir uma teoria, depois dos entes primitivos, é necessário revelar os postulados, que são afirmações sobre os entes consideradas verdadeiras sem a necessidade de demonstração

Euclides apresentou seus postulados para a Geometria em *Os elementos*, mas, foi em 1759, em um trabalho sobre a Geometria Euclidiana, que o matemático escocês John Playfair publicou os postulados como são conhecidos atualmente. A seguir, vamos separá-los em quatro categorias: existência, determinação, divisão e inclusão.

Postulados da existência

1. Existem ponto, reta e plano.

2. Em uma reta e fora dela, existem infinitos pontos.

3. Em um plano e fora dele, existem infinitos pontos.

Postulados da determinação

1. Dois pontos distintos determinam uma reta.

Devido a esse postulado, é possível dar nome às retas Por exemplo, se uma reta passa por dois pontos distintos P e Q, podemos chamá-la de $\overleftrightarrow{PQ}$.

2 Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.

Devido a esse postulado, é possível dar nome aos planos. Por exemplo, se um plano contém três pontos distintos e não colineares P, Q e R, podemos chamá lo de (PQR)

Exercícios resolvidos

1 **Unicamp** É comum encontrarmos mesas com quatro pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firmes Explique, usando argu mentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

Resolução:

Isso não acontece com uma mesa de três pernas porque três pontos não colineares determinam um único plano, ou seja, o tampo da mesa fica apoiado em três pontos e, portanto, mantém-se em um único plano. Já as mesas com quatro pernas têm seus tampos apoia dos em quatro pontos, que podem determinar até seis planos distintos. Desse modo, o tampo fica variando entre dois desses planos.

2 **FEI** Assinale a alternativa **falsa**:

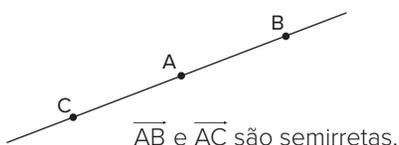
A Dados dois pontos distintos A e B, existe um plano que os contém.
B Por um ponto fora de uma reta existe uma única paralela à reta dada.
C Existe um e um só plano que contém um triângulo dado
D Duas retas não coplanares são reversas
E Três pontos distintos determinam um e um só plano.

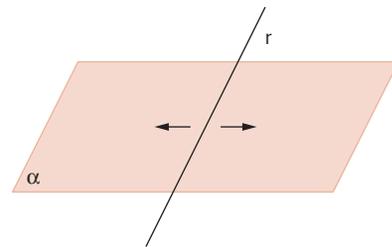
Resolução:

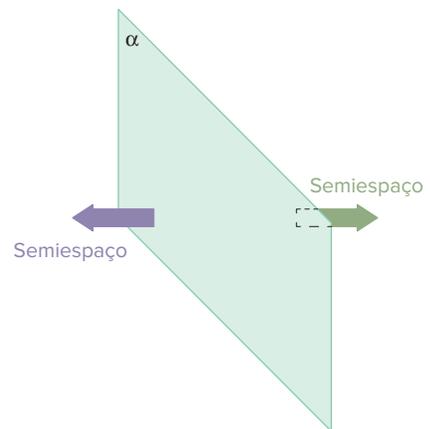
Três pontos distintos podem ser colineares; nesse caso, eles não determinam um plano, e sim uma reta que pode estar contida em "infinitos" planos.
Alternativa: E

Postulados da divisão

1. Todo ponto de uma reta divide-a em duas figuras congruentes chamadas semirretas

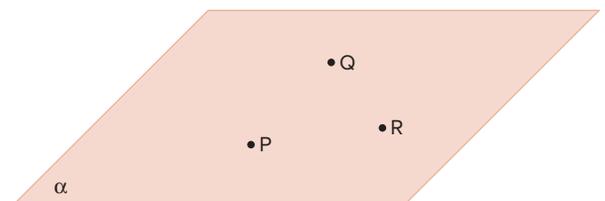
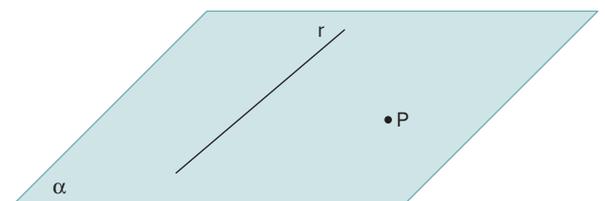
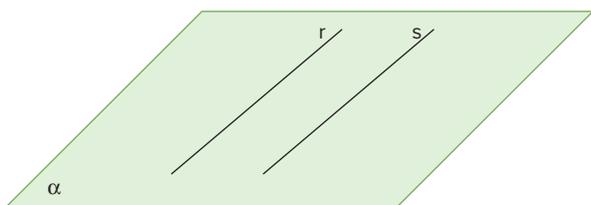
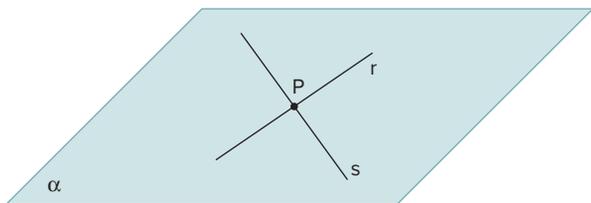
$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semirretas.

Note que a posição do ponto A na reta não interfere na congruência das semirretas determinadas em função da infinitude de suas extensões

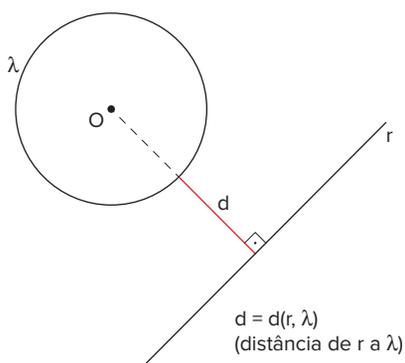
2 Toda reta de um plano divide-o em duas figuras congruentes chamadas semiplanos

Note que a posição da reta r no plano não interfere na congruência dos semiplanos determinados em função da infinitude de suas extensões

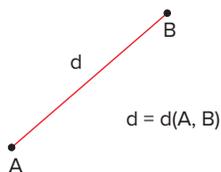
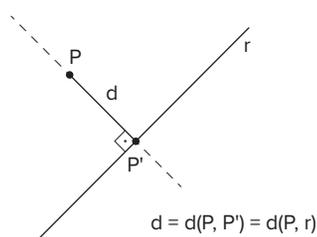
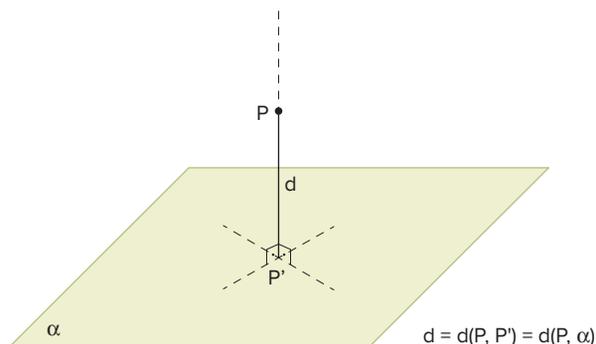
3. Todo plano divide o espaço em dois semiespaços congruentes.

Postulado da inclusão

Se dois pontos distintos de uma reta pertencerem a um mesmo plano, então essa reta estará contida nesse plano.

Determinação de plano

- Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.

- Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

- Duas retas paralelas determinam um plano

- Duas retas concorrentes também determinam um plano.

Distâncias

A palavra “distância” geralmente é usada para repre sentar o comprimento de caminhos necessários para ir de um lugar a outro. Na geometria métrica, porém, há uma definição mais precisa: a distância entre duas figuras geométricas é o comprimento do menor segmento de reta que tenha uma extremidade em cada figura

Assim:

- A distância entre dois pontos A e B é igual ao comprimento do segmento de reta que une esses pontos

- A distância de um ponto P a uma reta r é igual ao comprimento do segmento de reta $\overline{PP'}$, de modo que $\overline{PP'}$ seja perpendicular à reta r e P' pertença à reta r.

- A distância de um ponto P a um plano α é igual ao comprimento do segmento de reta $\overline{PP'}$, de modo que $\overline{PP'}$ seja perpendicular ao plano α e P' pertença ao plano α.

Posições relativas entre duas retas

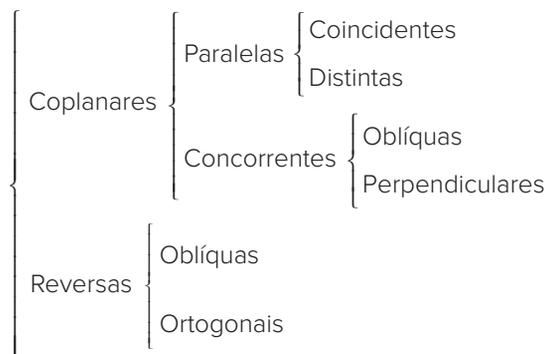
No espaço, duas retas podem, a princípio, ser **coplanares** ou **não coplanares**. Quando são coplanares, recebem o nome de **paralelas** ou **concorrentes**. Elas são paralelas quando determinam uma mesma direção, podendo ser **distintas** ou **coincidentes**.

Retas paralelas são distintas quando não têm pontos em comum, ou seja, quando a interseção entre elas é vazia, e coincidentes quando possuem todos os seus pontos em comum.

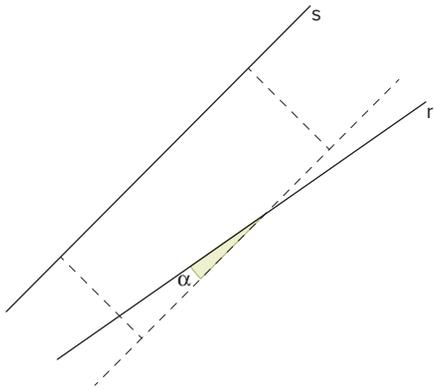
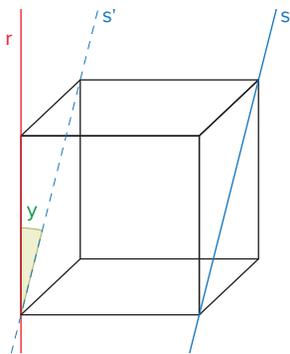
Retas concorrentes são denominadas perpendiculares quando formam ângulos de 90° e oblíquas quando determinam um par de ângulos agudos e outro de ângulos obtusos.

Quando duas retas são não coplanares, dizemos que se trata de um par de retas **reversas**. Assim, duas retas serão reversas se, e somente se, não houver plano que as contenha.

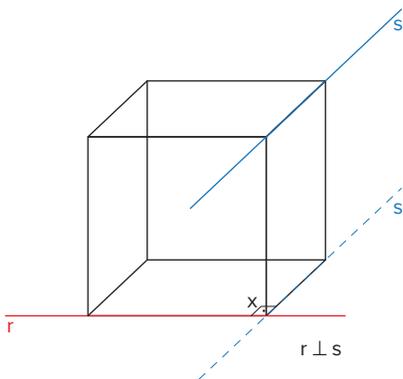
A interseção entre duas retas reversas também é um conjunto vazio, portanto elas não têm pontos em comum e não são paralelas

As retas reversas são denominadas **ortogonais** quando têm inclinação relativa de 90° e **oblíquas** quando possuem inclinação relativa diferente de 90°.

Ângulo entre duas retas reversas

Sabemos que duas retas reversas não se interceptam e também não são paralelas. Desse modo, os ângulos formados por elas não são geométricos, e sim aparentes, pois não têm vértice Mesmo assim, precisamos interpretar a inclinação relativa entre essas retas.

Então, vamos definir o ângulo entre duas retas reversas r e s como o ângulo plano formado entre r e uma terceira reta paralela à s e concorrente à r

Observe este exemplo no cubo:

O ângulo y representa o ângulo entre as retas r e s Note que, para representá-lo, traçamos uma reta paralela à s e concorrente à r, a reta s'.

Atenção

Quando duas retas reversas têm ângulo de inclinação de 90°, elas são denominadas **ortogonais**.

Posições relativas entre uma reta e um plano

No espaço, uma reta e um plano podem, a princípio, assumir três posições relativas diferentes

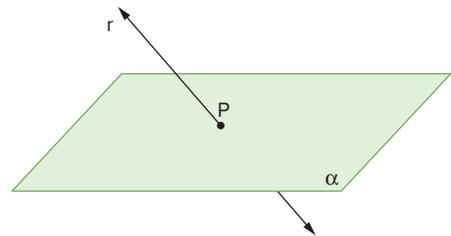
A reta está contida no plano quando todos os pontos dela também pertencem ao plano. Vale lembrar que, de acordo com o postulado da inclusão, para garantir que uma reta esteja contida em um plano, basta encontrar nela dois pontos distintos que também pertençam ao plano.

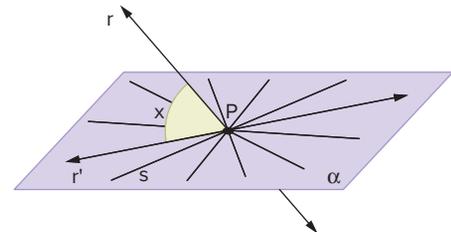
A reta é paralela ao plano quando nenhum dos pontos dela pertence ao plano. Nesse caso, todos os pontos da reta estão a uma mesma distância d do plano. Assim, existe um valor d > 0 que exprime a distância entre o plano e a reta paralela a ele

Além desses casos, a reta pode ser concorrente (ou secante) ao plano Isso ocorre quando há apenas um ponto dela que pertence ao plano. Esse ponto comum a ambos é denominado **traço da reta no plano**.

Quando uma reta é concorrente a um plano, ela tem uma inclinação relativa a ele que pode ou não ser igual a 90°. Se for igual, dizemos que a reta é perpendicular ao plano; se for diferente, dizemos que é oblíqua ao plano.

Ângulo entre uma reta e um plano

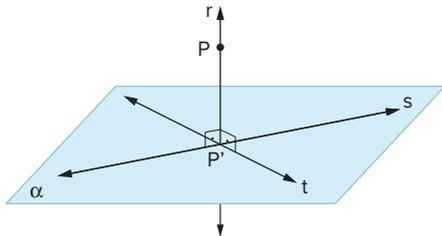
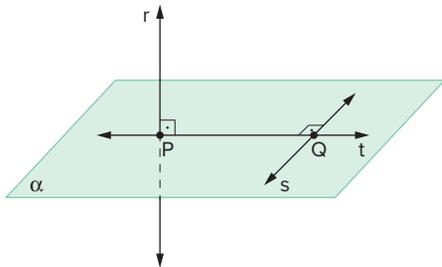
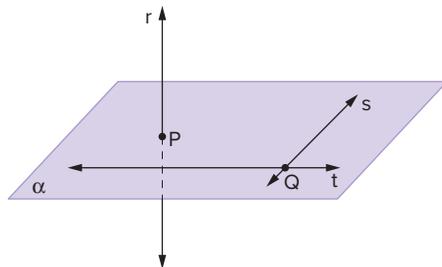
Agora, vamos medir o ângulo formado por um plano e uma reta secante a ele.

Vamos representar o ângulo entre a reta e o plano com vértice no ponto de interseção entre essas figuras Porém, como existem "infinitos" ângulos que podemos tomar entre a reta e o plano com esse vértice, utilizaremos o menor ângulo possível.

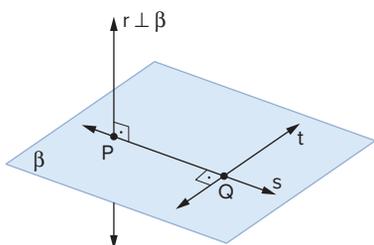
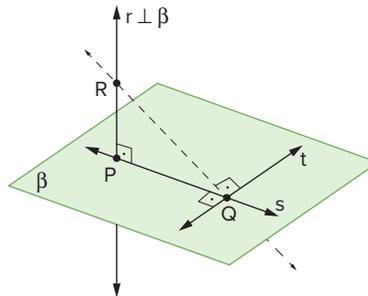
Note que o menor ângulo ocorrerá entre a reta e sua projeção ortogonal no plano.

Dizemos que uma reta será perpendicular a um plano se, e somente se, ela for perpendicular a toda reta do plano que passa pelo seu traço e ortogonal a todas as outras retas contidas nele.

No entanto, na prática, existem alguns teoremas que tratam dessa perpendicularidade.

Teorema fundamental da perpendicularidade

Uma reta será perpendicular a um plano se, e somente se, formar ângulos retos com duas retas concorrentes contidas nesse plano.

Veja as três situações possíveis:

Se uma reta r for perpendicular a duas retas concorrentes s e t de um mesmo plano, então r será, necessariamente, perpendicular ao plano.

Se uma reta r for perpendicular a uma reta t de um plano e ortogonal a outra reta s desse mesmo plano, então r será perpendicular ao plano.

Se uma reta r for ortogonal a duas retas concorrentes r e s de um mesmo plano, então r também será perpendicular ao plano.

Teorema das três perpendiculares

Sejam um plano β, uma reta r perpendicular a β no ponto P, uma reta s contida em β passando por P e uma reta t perpendicular à s por um ponto Q distinto de P Nessas condições, se tomarmos um ponto R de r, $\overleftrightarrow{RQ}$ será perpendicular à t

Para demonstrar esse teorema, considere que α seja o plano determinado pelos pontos P, Q e R e que ele contenha, portanto, as retas r, s e $\overleftrightarrow{RQ}$.

Como a reta t é perpendicular à s e ortogonal à r, podemos afirmar que ela é, necessariamente, perpendicular ao plano α. Assim, a reta r deve formar um ângulo reto com qualquer reta contida em α.

Então, como a reta $\overleftrightarrow{RQ}$ é concorrente à t e está contida em α, concluímos que as retas t e $\overleftrightarrow{RQ}$ são perpendiculares entre si.

Saiba mais

Perpendicularidade entre reta e plano

Com relação à perpendicularidade entre uma reta e um plano, há outros teoremas que podem ser úteis na resolução dos exercícios que serão apresentados nos próximos capítulos. São eles:

a) Se uma reta r for perpendicular a um plano α, então essa reta também deverá ser perpendicular a todas as retas de α que passem pelo traço de r em α

b) Se uma reta r for perpendicular a um plano α, então essa reta também deverá ser ortogonal a todas as retas de α que não passem pelo traço de r em α.

c) Se uma reta r for perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de r no plano α deverá coincidir com o ponto que representa o traço de r em α.

Posições relativas entre dois planos

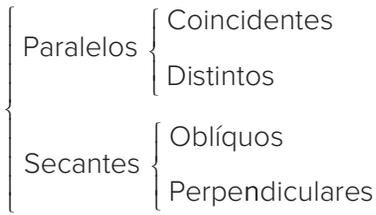
Dois planos no espaço podem ser considerados paralelos ou concorrentes – esses últimos também são chamados de secantes.

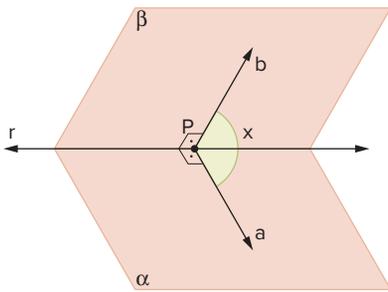
Quando são paralelos, a distância entre eles é indicada por um valor $d \geq 0$, tal que:

a. Se $d = 0$, então os planos paralelos também são coincidentes.

b. Se $d > 0$, então os planos paralelos são distintos.

Planos coincidentes têm todos os seus pontos em comum e também podem ser chamados de planos iguais. Já os planos paralelos distintos não possuem nenhum ponto em comum, ou seja, a interseção entre eles é o conjunto vazio.

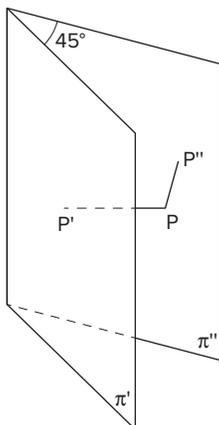
O conjunto dos pontos de interseção entre dois planos secantes tem a forma de uma reta, que também é denominada traço de um plano no outro. Assim, se $\alpha \cap \beta = r$, então r é o traço de α em β e vice-versa

Diedros

Chamamos de **diedro** a figura formada por dois semi planos com origem em uma mesma reta. Esses semiplanos são denominados **faces do diedro**, e a reta é chamada de **aresta do diedro**.

Na figura, *x* é a medida do ângulo diedro de aresta r:

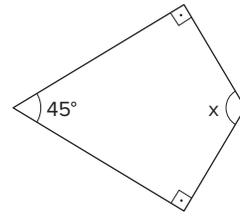
$$x = \text{med}\left(\alpha \hat{r} \beta\right)$$

O ângulo diedro deve ser medido tomando-se duas retas concorrentes, uma em cada face do diedro, de modo que ambas sejam perpendiculares à aresta do diedro.

Exercício resolvido

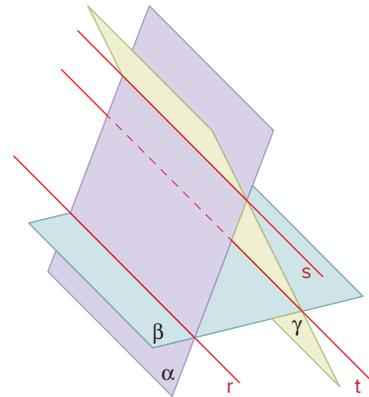
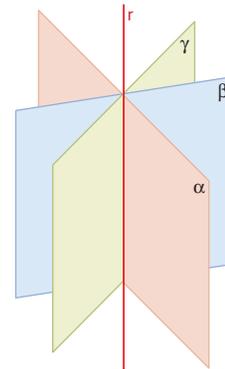
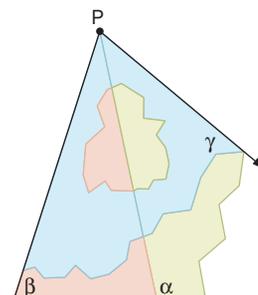
3 Fuvest Sejam π' e π'' as faces de um ângulo diedro de 45° e P um ponto interior a esse diedro. Sejam P' e P'' as respectivas projeções ortogonais de P sobre π' e π'' Então a medida, em graus, do ângulo $P'\hat{P}P''$ é:

A 30 **B** 45 **C** 60 **D** 90 **E** 135

Resolução:

Podemos fazer um corte na figura e obter o quadrilátero a seguir:

Assim, concluímos que $x + 45^{\circ} = 180^{\circ}$, logo $x = 135^{\circ}$.
Alternativa: E

Triedros

Se tomarmos três planos distintos que se intersetam dois a dois, teremos três situações distintas:

a. As três retas serão paralelas.

b. As três retas coincidirão.

c. As três retas se intersetarão em um único ponto.

A figura formada no terceiro caso é chamada de **triedro**. Os triedros são superfícies poliédricas abertas dotadas de:

- 1 vértice, que, na figura, é o ponto P;
- 3 arestas, que são as retas nas quais os planos se intersetam;
- 3 faces em forma de ângulos geométricos, respectivamente contidas nos planos α, β e γ.

O triedro trirretângulo é o mais comum, pois forma três ângulos retos nas faces.

Exercício resolvido

4 Um arquiteto resolveu esconder as quinas de um cômodo, como mostra a figura a seguir:

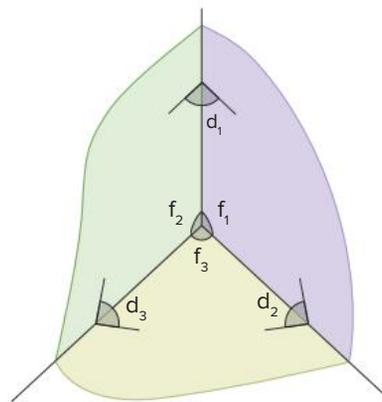
Determine a distância entre o vértice do triedro e cada um dos vértices do triângulo equilátero que surgiu na quina do cômodo

Resolução:

Em primeiro lugar, devemos notar que aparecem três triângulos (OAB, OAC e OBC), retângulos e congruentes pelo caso cateto-hipotenusa, o que nos leva a concluir que cada um deles é isósceles.

Chamando de *x* cada uma das arestas pedidas, temos:

$$6^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}\ \text{cm}$$

Não é possível construir um triedro com quaisquer medidas angulares. Veja a figura:

Os ângulos f_1, f_2 e f_3 são chamados de faces do triedro.

Assim, temos: $\begin{cases} f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{cases}$.

Além disso, $f_1 + f_2 + f_3 < 360°$.

Os ângulos d_1, d_2 e d_3 são os **ângulos diédricos**. Assim, temos: $\begin{cases} d_1 + 180° < d_2 + d_3 \\ d_2 + 180° < d_1 + d_3 \\ d_3 + 180° < d_1 + d_2 \end{cases}$.

Além disso, $180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$

Revisando

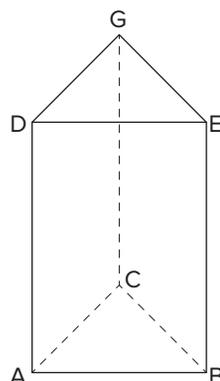
1 A respeito do número de dimensões dos entes primitivos, responda:

a) Quantas dimensões tem um único ponto?
b) Quantas dimensões tem uma reta?
c) Quantas dimensões tem um plano?
d) Quantas dimensões tem o espaço geométrico?

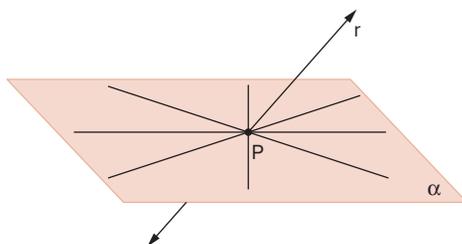
2 **FEI** Na determinação de um plano são suficientes os seguintes elementos:
A duas retas distintas.
B uma reta e um ponto.
C três pontos distintos.
D duas retas concorrentes.
E duas retas reversas.

3 **ITA** Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
A Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.
B Um ponto e uma reta determinam um plano.
C Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.
D Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então é paralela a qualquer reta deste plano.
E Se α é o plano determinado por duas retas concorrentes r e s, então toda reta m desse plano, que é paralela à r, não será paralela à reta s.

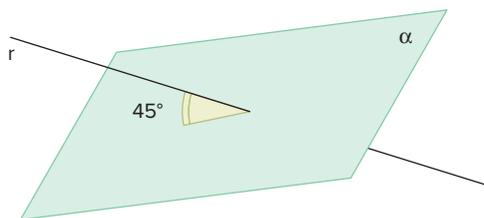
4 **Mackenzie** A reta r é paralela ao plano α. Então:
A Todas as retas de α são paralelas a r.
B A reta r não pode ser coplanar com nenhuma reta de α.
C Existem em α retas paralelas a r e também existem em α retas reversas a r.
D Existem em α retas paralelas a r e também retas perpendiculares a r.
E Todo plano que contém r é paralelo a α.

5 **Fuvest** Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice

A A
B B
C C
D D
E E

6 Quais são as possíveis posições relativas entre dois planos α e β do espaço? Liste todas elas e determine, em cada caso, a forma da figura que resulta da interseção entre α e β, se houver

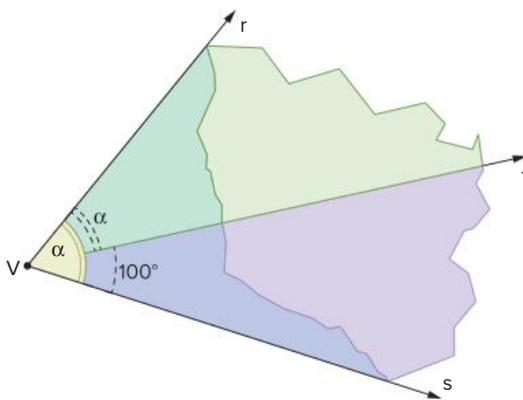
7 A figura a seguir apresenta uma reta r que intercepta um plano α em um ponto P:

Para se ter certeza de que r é perpendicular ao plano α, o número mínimo de retas contidas em α passando pelo ponto P que se deve verificar é:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

8 Uma agulha representada pela reta **r** perfura um tecido esticado representado pelo plano α, formando um ângulo de 45°, como ilustra a figura:

Nessas condições, é correto afirmar que nenhuma semirreta do plano α é capaz de determinar, com a reta **r**, um ângulo de:

A 60° **B** 90° **C** 120° **D** 135° **E** 150°

9 Dois ângulos das faces de um triedro medem 140° e 160° Determine o intervalo de variação do ângulo da terceira face

10 A figura a seguir apresenta um triedro **Vrst** em que duas das faces têm medida angular α e a terceira face mede 100°

Nessas condições, a medida angular α é tal que:

A $\alpha < 50°$

B $50° < \alpha < 100°$

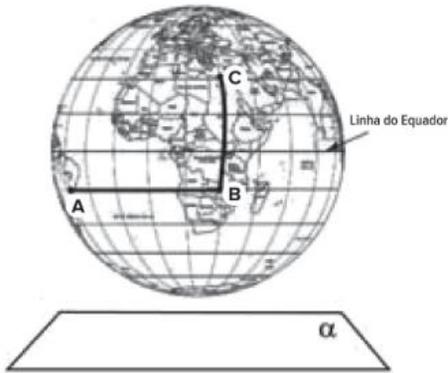
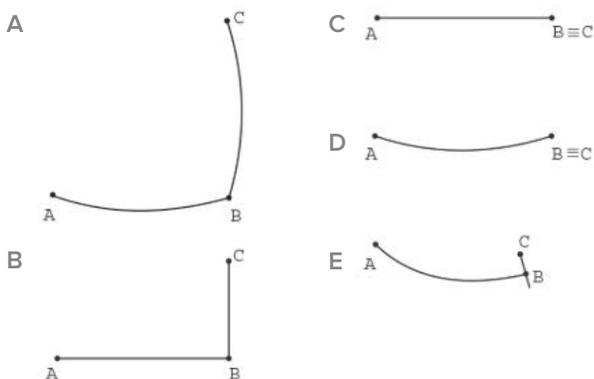
C $50° < \alpha < 130°$

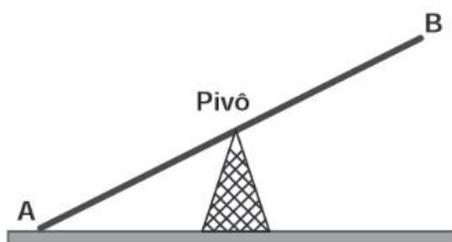
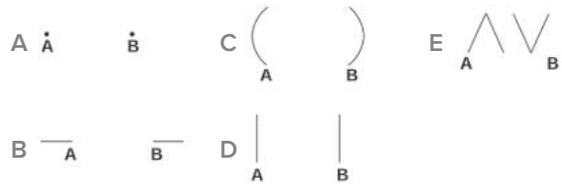
D $100° < \alpha < 130°$

E $\alpha > 130°$

FRENTE 3

Exercícios propostos

1 Enem 2016 A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.

A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

2 Enem 2013 Gangorra é um brinquedo que consiste em uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:

A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

3 EsPCEx 2017 Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $t = \alpha \cap \beta$.

Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

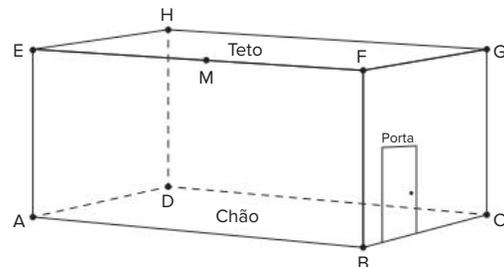
A as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.

B as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.

C as retas r e s são necessariamente concorrentes.

D se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

E o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

4 Enem 2017 Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é represen tado pela figura

A lagartixa parte do ponto **B** e vai até o ponto **A**. A seguir, de **A** ela se desloca, pela parede, até o ponto **M**, que é o ponto médio do segmento **EF**. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto **M** até o ponto **H**. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

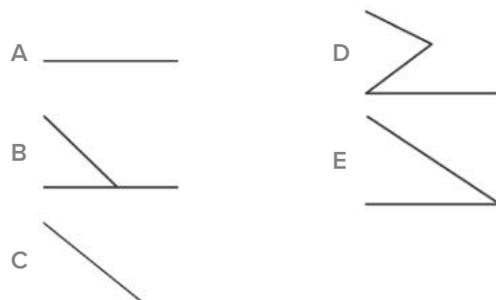
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

5 **Enem 2016** Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade no parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto, em que foram usadas hastes metálicas.

Figura 1

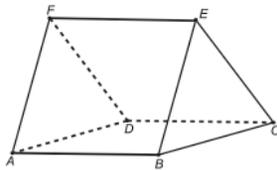
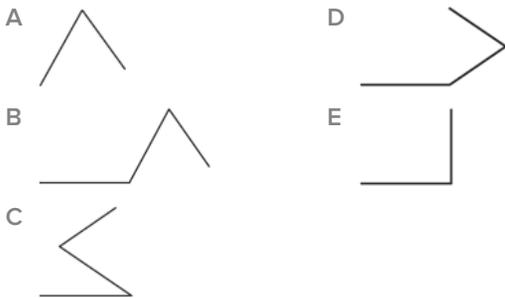



Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os pontos. A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base ABCD é dada por

6 **UFJF 2015** Sejam r uma reta e β_1 e β_2 dois planos no espaço, considere as seguintes afirmações:

I. Se $r \cap \beta_1 = \{P_1\}$ e $r \cap \beta_2 = \{P_2\}$, com P_1 e P_2 pontos distintos, então β_1 é paralelo a β_2.

II. Se $r \cap \beta_1 = \varnothing$ e $r \cap \beta_2 = \varnothing$, então β_1 é paralelo a β_2 ou β_1 é coincidente de β_2.

III. Se existem dois pontos distintos em $r \cap \beta_1$, então $r \cap \beta_1 = r$.

É **CORRETO** afirmar que:

A Apenas I é verdadeira
B Apenas II é verdadeira
C Apenas III é verdadeira
D Apenas I e II são verdadeiras.
E Apenas II e III são verdadeiras.

7 **Esc. Naval 2013** Nas proposições abaixo, coloque (V) na coluna à esquerda quando a proposição for verda deira e (F) quando for falsa.

☐ Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano

☐ Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

☐ Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas

☐ Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro.

☐ Se três planos são dois a dois perpendiculares, eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

A F F V F V
B V – F – V – V – F
C V V F V V
D F – V – V – V – V
E V V V V V

8 **EsPCEx 2013** Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento $\overline{AB}$ sobre um plano α é a metade da medida do segmento $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ faz com α um ângulo de 60°;

III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

A apenas I e II
B apenas II e III
C I, II e III
D I, II e IV
E II, III e IV

9 **ITA 2013** Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é(são) verdadeira(s) apenas

A III.
B I e III.
C II e III.
D III e IV.
E I e II e IV.

10 **EsPCEx 2011** Considere as seguintes afirmações:

I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.

II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.

III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.

Dentre as afirmações acima, é(são) verdadeira(s)

A Somente II
B I e II
C I e III
D II e III
E I, II e III

11 **EsPCEx 2011** Considere um plano α e os pontos A, B, C e D tais que

- O segmento $\overline{AB}$ tem 6 cm de comprimento e está con tido em α.
- O segmento $\overline{BC}$ tem 24 cm de comprimento, está con tido em α e é perpendicular a AB
- O segmento $\overline{AD}$ tem 8 cm de comprimento e é perpendicular a α.

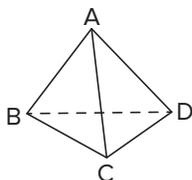
Nessas condições, a medida do segmento $\overline{CD}$ é

A 26 cm
B 28 cm
C 30 cm
D 32 cm
E 34 cm

12 **Fatec** A reta r é a interseção dos planos α e β, perpen diculares entre si. A reta s, contida em α, intercepta r no ponto P. A reta t, perpendicular a β, intercepta-o no ponto Q, não pertencente a r.
Nessas condições, é verdade que as retas

A r e s são perpendiculares entre si.
B s e t são paralelas entre si.
C r e t são concorrentes.
D s e t são reversas.
E r e t são ortogonais.

13 **Unifesp** Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é

A 6.
B 3.
C 2.
D 1.
E 0.

14 **UFSCar** Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α, a interseção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.
Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que:

A a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.
B a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
C a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
D a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
E a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

15 **Fatec** Seja A um ponto pertencente à reta r, contida no plano α. É verdade que

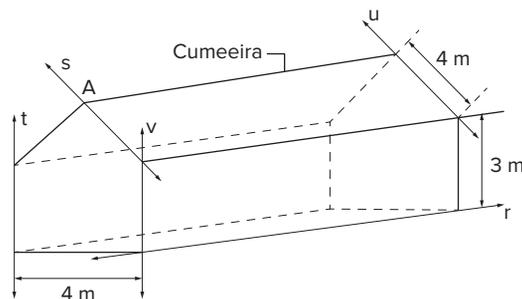
A existe uma única reta que é perpendicular à reta r no ponto A.
B existe uma única reta, não contida no plano α, que é paralela à reta r.
C existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano α, que contêm a reta r.
D existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano α e que contêm a reta r.
E existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano α e que são paralelas à reta r.

16 **UFV** Considere as afirmações a seguir:

I. Se dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ de um triângulo são congruentes aos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{E}$, respectivamente, de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.
II. Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a toda reta desse plano.
III. Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
IV. As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Assinalando V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, a alternativa que apresenta a sequência correta é:

A V – F – F – V
B V – V – F – F
C F – F – F – V
D F – F – V – V
E V – V – V – F

17 **Faap** O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede.

Das retas assinaladas podemos afirmar que:

A t e u são reversas
B s e u são reversas
C t e u são concorrentes
D s e r são concorrentes
E t e u são perpendiculares

18 **Faap** Duas retas são reversas quando:

A não existe plano que contém ambas.
B existe um único plano que as contém.
C não se interceptam.
D não são paralelas.
E são paralelas, mas pertencem a planos distintos.

Texto complementar

O que um ser de quatro dimensões veria ao olhar para você

Ele veria todo o seu corpo, a parte de trás e da frente E também seus órgãos internos Tudo ao mesmo tempo

Apesar de jamais podermos de fato visualizar a quarta dimensão, podemos entender a lógica por trás da progressão de dimensões, e tentar assimilar a possibilidade de alguém conseguir ver o interior de outra pessoa Tudo pelo puro exercício de visualização matemática.

Vivemos em um mundo de três dimensões: altura, largura e profundidade. Tem gente que diz que o tempo é a quarta dimensão, e viveríamos em um mundo de três dimensões + tempo, e outras pessoas dizem que o tempo seria como uma camada 3D de uma quarta dimensão espacial mesmo. Mas esse post fala das três dimensões espaciais com as quais lidamos diariamente.

Para começar, como de costume, quando se fala de dimensões mais altas, é preciso usar analogias, porque dimensões mais altas são ina cessíveis para nós e só conseguimos imaginá-las assim – percebendo o que as nossas três dimensões têm em comum, e como poderíamos aplicar essas características a uma próxima dimensão.

Primeiro vamos imaginar que também existem mundos de 1, 2 e 4 dimensões, cada um deles habitado por seres geométricos

Os habitantes do mundo 1D seriam linhas, podemos chamar a única dimensão de seus mundos de “largura”, por exemplo. Então eles não teriam nem altura nem profundidade Em seus mundos de só uma dimensão eles poderiam se movimentar somente para a direita ou para a esquerda, um pouquinho, até atingirem o vizinho. Eles jamais poderiam ultrapassar seus vizinhos, porque seria impossível pular por cima ou caminhar pelo lado deles sem acessar uma segunda dimensão.

É interessante perceber que habitantes desse universo de uma dimensão, com um olho em uma de suas extremidades, enxergariam só pontos, ao olharem para seus vizinhos. Eles, apesar de terem uma dimensão, enxergariam o mundo em zero dimensão.

Nós, por outro lado, podemos ver o mundo 1D de fora Ou seja, vemos os seres inteiros, inclusive seus “interiores”.

Dois seres de uma dimensão vistos por algum ser com mais de uma dimensão.

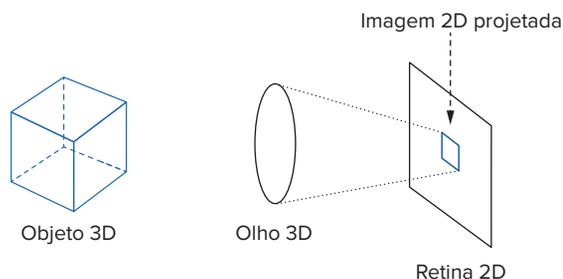
Da mesma forma, seres vivendo na segunda dimensão seriam planos, mas eles mesmos não conseguiriam enxergar os seus conterrâneos inteiros, e só veriam linhas retas (1D). Teriam que caminhar (?) ao redor de cada forma para saber se se trata de um triângulo ou quadrado, por exemplo.

Assim é um quadrado de duas dimensões, visto da terceira dimensão:

E essa seria a aparência do mesmo quadrado visto por um ser de duas dimensões:

A ideia-chave aqui é perceber que sempre enxergamos uma dimensão inferior àquela na qual estamos inseridos.

Seres de uma determinada dimensão sempre conseguem ver o interior dos seres da dimensão abaixo, mas só conseguem ver a superfície de seres com o mesmo número de dimensões que eles próprios. Por exemplo, nós, seres de três dimensões, conseguimos ver o interior de um quadrado de duas dimensões, porque a luz tem outra dimensão por onde passar, mas o próprio quadrado só conseguiria ver a superfície, o contorno, dos objetos do seu mundo.

Então nós, seres de três dimensões, seguindo essa progressão lógica, na verdade vemos apenas duas dimensões por vez, mas conseguimos deduzir através de várias outras informações, (experiências passadas, visão binocular, incidência da luz) a profundidade de cada objeto.

A luz é projetada na nossa retina, que é um plano.

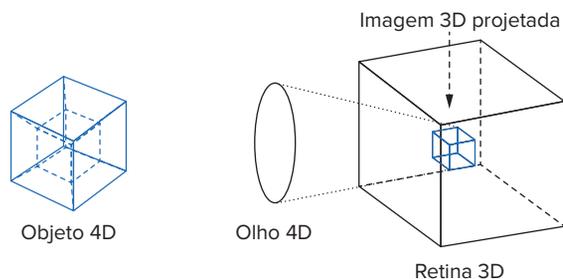
Apesar de lidarmos diariamente com três dimensões, estamos presos nessas dimensões, e a luz não tem por onde passar para poder nos mostrar mais do que a superfície de cada coisa. Mas, se adicionássemos uma nova dimensão, que crescesse a um ângulo de 90 graus de todas as outras, poderíamos ver o lado de trás e o lado da frente e o interior dos objetos ao mesmo tempo.

Então, resumindo, a respeito da quarta dimensão, podemos deduzir que:

1 A retina dos seres da quarta dimensão poderia ver três dimensões por vez

2 Os seres da quarta dimensão poderiam ver também o interior de objetos da terceira dimensão.

3 As superfícies dos objetos de quatro dimensões são formadas por três dimensões

Então ao olhar para um cubo, por exemplo, nós vemos só o lado do cubo que está voltado para nós, [...] nós vemos um plano, mas seres de quatro dimensões poderiam ver os seis lados do cubo ao mesmo tempo, e seu interior. E um ser de quatro dimensões, ao olhar para um hipercubo, veria um cubo, que é o achatamento 3D do hipercubo 4D.

Então, ao olhar para uma pessoa, um ser de quatro dimensões poderia ver todos os seus órgãos internos, e vasos sanguíneos, e o interior dos vasos sanguíneos, e o interior de tudo. De uma forma inconcebível para nós, algo como uma camada 3D de tudo que forma aquela pessoa, e não só sua superfície

BARRUECO, Caroline "O que um ser de quatro dimensões veria ao olhar para você" *Noosfera*, 19 ago. 2015. Disponível em: <https://noosfera.com.br/o-que-um-ser de-quatro dimensoes-veria-ao-olhar-para-voce/>. Acesso em: 11 mar. 2019.

Resumindo

Os postulados de Euclides

Postulados da existência

1 Existem ponto, reta e plano.

2 Existem infinitos pontos em uma reta e fora dela.

3 Existem infinitos pontos em um plano e fora dele

Postulados da determinação

1 Dois pontos distintos determinam uma reta.

2 Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.

Postulados da divisão

1 Todo ponto de uma reta divide-a em duas figuras congruentes chamadas semirretas.

2 Toda reta de um plano divide-o em duas figuras congruentes chamadas semiplanos.

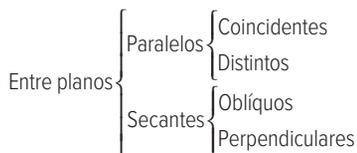
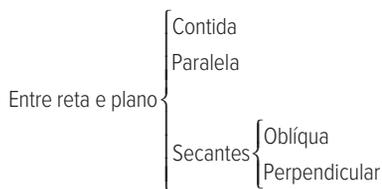
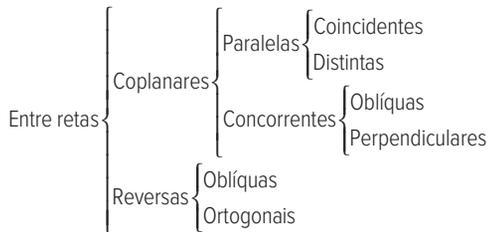
3 Todo plano divide o espaço em dois semiespaços congruentes.

Postulado da inclusão

Se dois pontos distintos de uma reta pertencerem a um mesmo plano, então essa reta estará contida nesse plano

Determinação de plano

- Três pontos distintos e não colineares determinam um plano.
- Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano
- Duas retas paralelas determinam um plano.
- Duas retas concorrentes também determinam um plano.

Posições relativas no espaço

Ângulo entre duas retas reversas

Definimos o ângulo entre duas retas reversas, r e s, como o ângulo plano formado entre r e uma terceira reta paralela à s e concorrente à r.

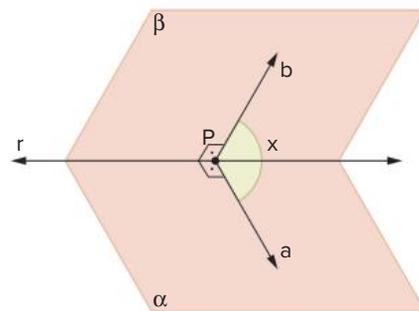
Teorema fundamental da perpendicularidade

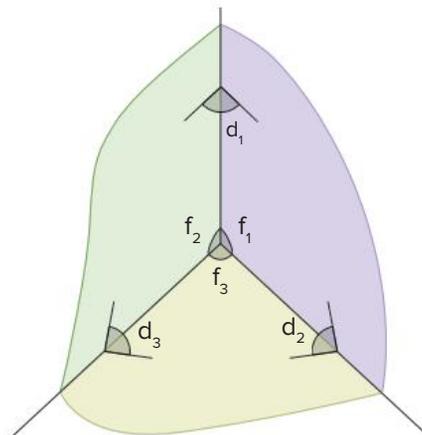
Uma reta será perpendicular a um plano se, e somente se, formar ângulos retos com duas retas concorrentes contidas nesse plano.

Teorema das três perpendiculares

Seja um plano β, uma reta r perpendicular a β no ponto P, uma reta s contida em β passando por P e uma reta t perpendicular à s por um ponto Q distinto de P. Nessas condições, se tomarmos um ponto R de r, $\overleftrightarrow{RQ}$ será perpendicular à t

Diedros

Diedro é a figura formada por dois semiplanos com origem em uma mesma reta Esses semiplanos são denominados **faces do diedro**, e a reta é chamada de **aresta do diedro**.

Na figura, *x* é a medida do ângulo diedro de aresta r: $x = med(\alpha \hat{r} \beta)$.

Triedros

$$\begin{cases} f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f_3 - f_2| < f_1 < f_2 + f_3 \\ |f_3 - f_1| < f_2 < f_1 + f_3 \\ |f_2 - f_1| < f_3 < f_1 + f_2 \end{cases} \text{ e } f_1 + f_2 + f_3 < 360^\circ$$

$$\begin{cases} d_1 + 180^\circ < d_2 + d_3 \\ d_2 + 180^\circ < d_1 + d_3 \\ d_3 + 180^\circ < d_1 + d_2 \end{cases} \text{ e } 180^\circ < d_1 + d_2 + d_3 < 540^\circ$$

Quer saber mais?

Sites

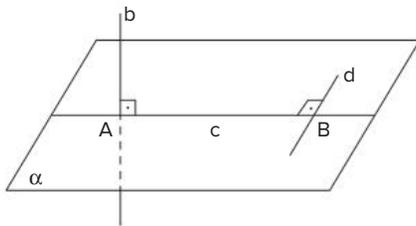
- Geometria
  Disponível em: <www.todamateria.com.br/matematica/geometria/>.
- Geometria Espacial
  Disponível em: <https://esquadraodoconhecimento.wordpress.com/2011/12/13/geometria-espacial/>.

Exercícios complementares

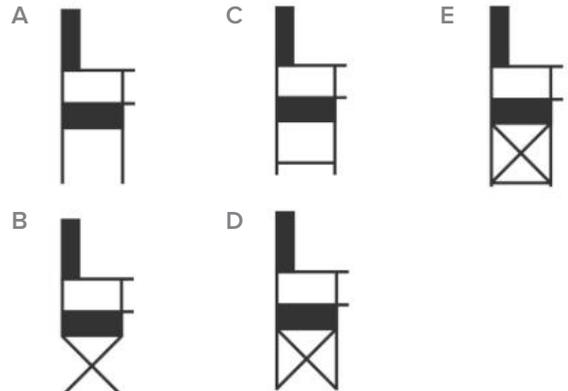
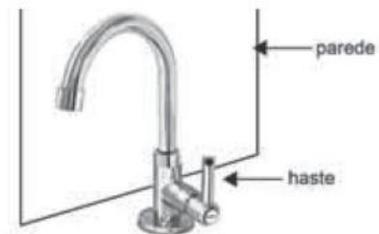
1 UEM 2018 Sobre geometria espacial, assinale o que for correto.

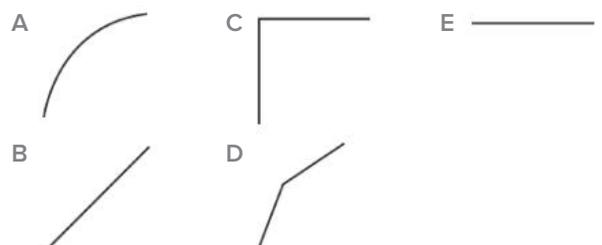
01 Dois planos sempre se interceptam.
02 Duas retas perpendiculares determinam um único plano.
04 Dado um ponto qualquer P em um plano π, existe uma única reta passando por P perpendicular ao plano.
08 Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas.
16 Se uma reta não intercepta um determinado plano, então necessariamente ela é paralela a ele.

Soma:

2 Fatec Na figura abaixo tem-se: o plano α definido pelas retas c e d, perpendiculares entre si; a reta b, perpendicular a α em A, com $A \in c$; o ponto B, interseção de c e d. Se X é um ponto de b, $X \notin \alpha$, então a reta s, definida por X e B,

A é paralela à reta c.
B é paralela à reta b.
C está contida no plano α.
D é perpendicular à reta d.
E é perpendicular à reta b.

3 Enem 2016 Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

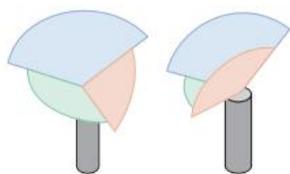
Qual é o esboço obtido pelos alunos?

4 Enem 2018 Uma torneira do tipo $\frac{1}{4}$ de volta é mais econômica, já que seu registro abre e fecha bem mais rapidamente do que o de uma torneira comum. A figura de uma torneira do tipo $\frac{1}{4}$ de volta tem um ponto preto marcado na extremidade da haste de seu registro, que se encontra na posição fechado, e, para abri lo completamente, é necessário girar a haste $\frac{1}{4}$ de volta no sentido anti horário. Considere que a haste esteja paralela ao plano da parede.

Disponível em: www.furkin.com.br. Acesso em: 13 nov. 2014.

Qual das imagens representa a projeção ortogonal, na parede, da trajetória traçada pelo ponto preto quando o registro é aberto completamente?

5 **Fatec** O ponto A pertence à reta r, contida no plano α. A reta s, perpendicular a α, o intercepta no ponto B. O ponto C pertence a s e dista $2\sqrt{5}$ cm de B. Se a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ em r mede 5 cm e o ponto B dista 6 cm de r, então a distância de A a C, em centímetros, é igual a

A $9\sqrt{5}$
B 9
C 7
D 4
E $3\sqrt{5}$

6 **IME 2016** Sejam dois quadrados de lado *a* situados em planos distintos que são paralelos entre si e si tuados a uma distância *d*, um do outro A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado Liga se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um só lido *S* Qual a distância entre estes planos distintos em função de *a*, de modo que os triângulos descri tos acima sejam equiláteros?

A $\frac{a}{2}$
B $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
C $\frac{a\sqrt{10}}{8}$
D $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$
E $\frac{a(4\quad 3\sqrt{2})}{2}$

7 Pretende-se montar uma escultura metálica composta de três chapas com a forma de setores circulares soldadas entre si e sobre um pedestal cilíndrico, como mostram as figuras.

Para fazê-la, um escultor pode usar cinco chapas com diferentes raios e ângulos internos:

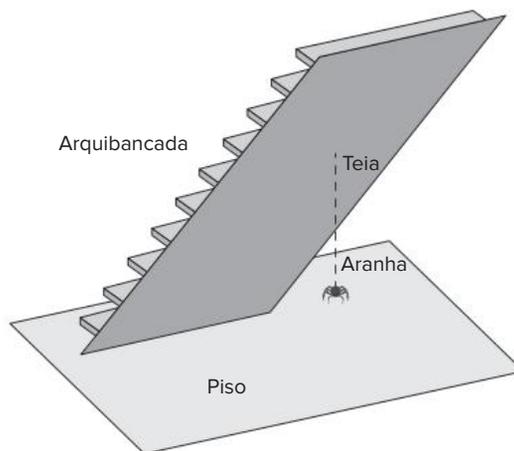
Tipo	Raio	Ângulo central
A	1,3 m	85°
B	1,5 m	115°
C	1,4 m	125°
D	1,1 m	165°
E	1,8 m	170°

Como a escultura apresenta características espaciais, pois as três placas soldadas formam um vértice triédrico, o escultor deverá, necessariamente, usar a combinação:

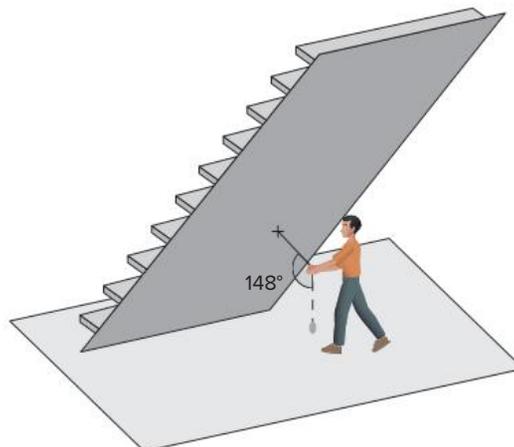
A A, B e D.
B B, C e D.
C C, D e A.
D A, B e C.
E E, A e C.

8 Se, em um triedro, duas faces medirem 175° e 120°, o intervalo de variação da terceira face será:

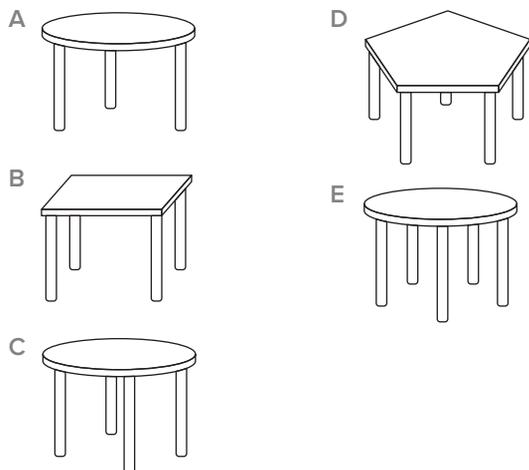
A $50° \leq x < 60°$
B $55° < x < 65°$
C $50° < x < 60°$
D $40° < x < 50°$
E $45° \leq x \leq 55°$

9 O plano de apoio de uma arquibancada forma com o plano do piso um ângulo diedro θ, tal que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$ Uma aranha, que inicialmente está sob a arquibancada, em um ponto situado a dois metros de distância da aresta do diedro, começa a tecer sua teia descendo verticalmente, sob ação do vento, como ilustra a figura a seguir:

Em um determinado momento em que a aranha já teceu um metro de teia, o vento cessa e a teia fica completamente esticada, deixando a aranha afastada:

A 25 cm do piso.
B 20 cm do piso.
C 15 cm do piso.
D 10 cm do piso.
E 5 cm do piso.

10 Um chefe de construção deseja verificar a medida do ângulo de inclinação de uma escada em relação ao solo. Para isso, ele se posiciona sob a rampa de concreto que sustenta a escada dispondo de um objeto de madeira, capaz de ser apoiado em qualquer superfície plana de modo que uma de suas hastes fique perpendicular ao plano de apoio. Em uma extremidade do objeto, um barbante é amarrado, e, na outra, um peso faz com que o barbante fique esticado como um fio de prumo.

O operário mede, com um transferidor, o ângulo entre a haste e o barbante e encontra 148° Assim, ele pode concluir que o ângulo de inclinação da escada em re lação ao solo mede:

A 148°
C 48°
E 32°
B 58°
D 45°

11 Algumas vezes, pequenas imprecisões nas medidas das pernas de uma mesa fazem com que ela balance um pouco, mesmo quando apoiada em um piso perfei tamente plano. Isso acontece porque os pés da mesa não determinam pontos de apoio que sejam coplanares. Uma fábrica de móveis produz diversos tipos de me sas de madeira, e as alternativas a seguir ilustram cinco modelos diferentes produzidos por essa fábrica. Assinale a que mostra um modelo de mesa que não balança quando apoiada em um piso perfeitamente plano, mesmo que haja pequenas imprecisões nos comprimentos de suas pernas:

12 Embora destinada a ficar na vertical, a Torre de Pisa começou a inclinar-se logo após o início de sua construção, em 1173, devido à sua fundação, construída em um solo mal compactado. Após ser fechada em 1990 por causa do aumento da inclinação, várias propostas foram feitas para aprumar a torre até que uma foi aceita, reduzindo a inclinação em 40 cm.

S_A_N/iStockphoto.com

Imagine que a inclinação da torre em relação à ver tical seja de 6° 17'. No momento em que os raios de sol projetam a sombra da torre no solo horizontal, a medida, em graus, do ângulo formado entre a torre e sua sombra:

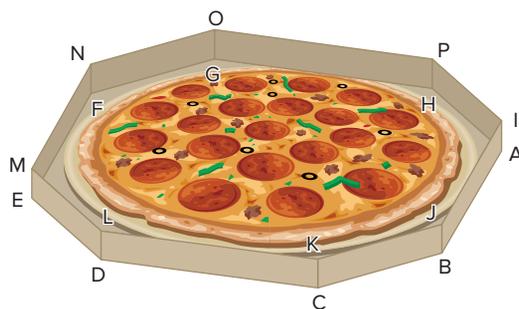
A não pode ser de 90°, pois a torre não está perfeitamente na vertical

B não pode ultrapassar 93° 43' qualquer que seja o horário do dia

C não pode ultrapassar 96° 17' qualquer que seja o horário do dia

D pode assumir qualquer valor entre 80° e 100° dependendo da hora do dia

E pode assumir qualquer valor entre 90° e 110° durante o período da manhã

13 Uma pizzaria entrega suas *pizzas* em caixas de papelão cujo formato é o de um prisma reto de bases octogonais, como mostra a figura a seguir:

Considere que os vértices dessa caixa determinam as retas declaradas na seguinte tabela:

Reta	r	s	t	u	v
Vértices	A e B	F e G	D e L	J e K	M e N

Sabendo que os ângulos internos dos octógonos ABCDEFGH e IJKLMNOP têm todos a mesma medida, determine qual é a posição relativa entre a reta r e cada uma das retas a seguir, justificando sua resposta:

a) s b) t c) u d) v

14 Um pedaço de cartolina é recortado na forma de um losango com lado medindo 6 cm e ângulos internos de 60° e 120°, como mostra a figura 1. Esse pedaço é dobrado, formando um vinco sobre sua diagonal menor, de modo que forma um ângulo diedro, como mostra a figura 2.

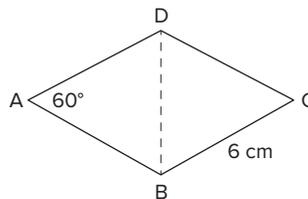



Figura 1

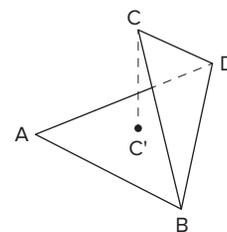
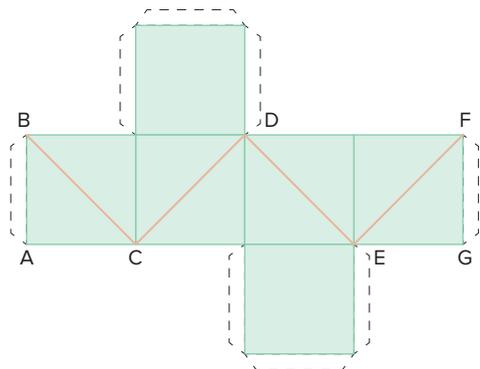
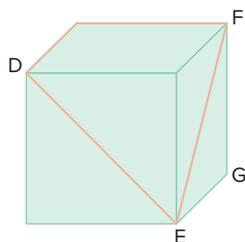
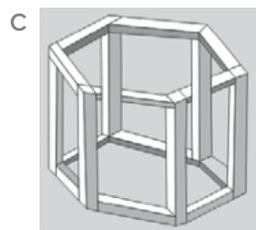
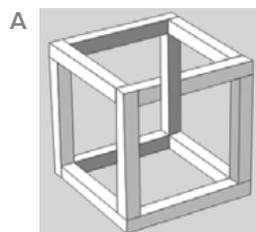



Figura 2

Sabendo que, na figura 2, o ponto C', projeção ortogonal do ponto C no plano determinado pelos pontos A, B e D, é o centro do triângulo equilátero ABD, qual é o valor do cosseno do ângulo diedro formado pelos triângulos ABD e BCD?

15 Uma papelaria vende caixas cúbicas desmontadas para presentes Essas caixas são de papelão estampado e apresentam um friso BCDEF em zigue zague, que indica quais serão as faces laterais da caixa depois de montada

Considere as medidas **x**, **y** e **z** dos ângulos DÊG, DÊF e GÊF, respectivamente, e observe que, enquanto a caixa está desmontada e esses ângulos são coplanares, verifica-se a relação $x = y + z$, mas, quando a caixa for montada, fazendo-se coincidir as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$, esses ângulos deixarão de ser coplanares, e suas medidas passarão a verificar a relação $x < y + z$.

Determine as medidas *x*, *y* e *z* dos ângulos DÊG, DÊF e GÊF depois de montada a caixa.

16 **Enem** Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia **Belvedere**, reproduzida a seguir.

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

A
D
B
E
C
17 Um queijo parmesão de formato cilíndrico deverá ser dividido em oito partes congruentes.

vovashevchuk/iStockphoto.com

O menor número de cortes planos suficientes para se efetuar essa divisão é:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

18 Determine os comprimentos das arestas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ de um triedro trirretângulo em que AB = 5 cm, BC = 6 cm e AC = 7 cm.

FRENTE 3

CAPÍTULO

12

Paralelepípedos

Olhe à sua volta. Se você está em um lugar fechado, provavelmente ele é cercado por quatro paredes laterais planas, um piso plano e um teto também plano. Portanto, você deve estar dentro de uma forma geométrica espacial cercada por seis retângulos ao todo. Em qualquer ambiente como esse, é possível observar oito vértices triédricos, cada um deles com três ângulos retos, além de uma dúzia de arestas determinadas pelo encontro de duas paredes ou de uma parede com o plano do teto ou do piso. Os comprimentos podem ser iguais ou diferentes dependendo das dimensões do lugar. Além disso, cada retângulo caracteriza uma superfície fechada e, portanto, dotada de área.

Em um lugar como esse, há muitas grandezas a serem medidas, como ângulos, comprimentos e áreas. Mas não é somente isso. Todos esses elementos – vértices, arestas e faces, que dão forma geométrica ao ambiente – cercam e estabelecem os limites de uma porção do espaço, o interior dele, que é ocupado por móveis, objetos, pessoas, ar etc.

A grandeza do volume

Além das grandezas angulares, lineares e superficiais, há um último tópico na Geometria Métrica a ser estudado, que é a grandeza espacial. Toda forma dotada de largu ra, comprimento e profundidade possui essa grandeza. Mas isso não se restringe aos corpos sólidos; até mesmo líquidos ou gases ocupam porções do espaço e, por isso, possuem uma grandeza espacial a ser medida.

As porções do espaço que são ocupadas por algum tipo de matéria, tanto sólida quanto líquida ou gasosa, podem ser medidas e comparadas entre si, de acordo com os valores numéricos de suas grandezas espaciais. O nome dessa grandeza é volume.

Essa grandeza, ao mesmo tempo física e geométrica, que chamamos de volume, avalia a extensão de porções do espaço tridimensional e deve ser expressa por um número real positivo, devidamente acompanhado de uma unidade de volume

Neste capítulo, estudaremos como calcular os volumes de algumas formas tridimensionais.

Unidades de volume

No Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI), a principal unidade de medida adotada para expressar o volume é o metro cúbico (m^3).

Assim como a unidade metro (m), usada para expressar a grandeza do comprimento, o metro cúbico também admite múltiplos e submúltiplos no SI:

- O quilômetro cúbico:

$$1\ km^3 = 1000\,000\,000\ m^3 = 10^9\ m^3$$

- O hectômetro cúbico:

$$1\ hm^3 = 1000\,000\ m^3 = 10^6\ m^3$$

- O decâmetro cúbico:

$$1\ dam^3 = 1000\ m^3 = 10^3\ m^3$$

- O decímetro cúbico:

$$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3 = 10\ ^{3}\ m^3$$

- O centímetro cúbico:

$$1\ cm^3 = 0{,}000001\ m^3 = 10\ ^{6}\ m^3$$

- O milímetro cúbico:

$$1\ mm^3 = 0{,}000000001\ m^3 = 10^{-9}\ m^3$$

Perceba que 1 metro cúbico tem 1 milhão de centí metros cúbicos ($1\ m^3 = 1000\,000\ cm^3$) e que 1 centímetro cúbico tem mil milímetros cúbicos ($1\ cm^3 = 1000\ mm^3$), por exemplo. Para compreender as transformações de unidades, observe os exercícios a seguir.

Exercícios resolvidos

1 Transforme em metros cúbicos o volume de $0{,}3\ km^3$.

Resolução:

Considerando que cada quilômetro possui mil metros (1 km = 1000 m):

$$0{,}3\ km^3 = 0{,}3\times(1km)^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 0{,}3\times(1000\,m)^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 0{,}3\times1000^3\,m^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 0{,}3\times1000\,000\,000\,m^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 300\,000\,000\,m^3$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica partindo da relação $1\ km = 10^3\ m$:

$$0{,}3\ km^3 = 3\times10^{-1}\times(1\ km)^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 3\times10^{-1}\times(10^3\ m)^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 3\times10^{-1}\times10^{3\cdot3}\ m^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 3\times10^{-1}\times10^{9}\ m^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 3\times10^{-1+9}\ m^3$$
$$0{,}3\ km^3 = 3\times10^{8}\ m^3$$

2 Transforme em metros cúbicos o volume de $280000\ cm^3$

Resolução:

Considerando que cada centímetro equivale a um centésimo do metro (1 cm = 0,01 m):

$$280\,000\ cm^3 = 280\,000\times(1\ cm)^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 280\,000\times(0{,}01\ m)^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 280\,000\times(0{,}01)^3\ m^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 280\,000\times0{,}000001\ m^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 0{,}28\ m^3$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica partindo da relação $1\ cm = 10\ ^{2}\ m$:

$$280\,000\ cm^3 = 2{,}8\times10^5\times(1\ cm)^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 2{,}8\times10^5\times(10^{-2}\ m)^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 2{,}8\times10^5\times10^{-2\cdot3}\ m^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 2{,}8\times10^5\times10^{-6}\ m^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 2{,}8\times10^{5-6}\ m^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 2{,}8\times10^{-1}\ m^3$$
$$280\,000\ cm^3 = 0{,}28\ m^3$$

3 Transforme em milímetros cúbicos o volume de 0,0741 hm^3

Resolução:

Considerando que cada hectômetro possui cem metros (1 hm = 100 m) e cada metro possui mil milímetros (1 m = 1000 mm):

$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \times (1\ hm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \times (100\ m)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \times (100\,000\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \times 100\,000^3\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 0{,}0741 \times 1\,000\,000\,000\,000\,000\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 74\,100\,000\,000\,000\ mm^3$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica partindo das relações 1 hm = 10^2 m e 1 m = = 10^3 mm:

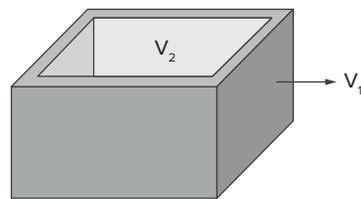
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{-2} \times (1\ hm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{-2} \times (10^2\ m)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{-2} \times (10^2 \times 10^3\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{-2} \times (10^{2+3}\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{-2} \times (10^5\ mm)^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{-2} \times 10^{5 \cdot 3}\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{-2+15}\ mm^3$$
$$0{,}0741\ hm^3 = 7{,}41 \times 10^{13}\ mm^3$$

A grandeza da capacidade

Além do volume, outra grandeza física é usada para avaliar porções de espaço tridimensional: a capacidade. Alguns formatos tridimensionais côncavos, como o de copos de vidro ou caixas térmicas de isopor, têm dois volumes a serem avaliados:

1 O da porção de espaço cercada pela superfície da forma geométrica, que coincide com o volume do material usado na confecção desse objeto (no caso dos copos, o volume de vidro; e no caso das caixas térmicas, o de isopor).

2 O da concavidade ou concavidades dos objetos sólidos que são capazes de armazenar matéria líquida ou gasosa. Esse volume é denominado capacidade do objeto.

O termo capacidade serve para designar o volume V_2 da porção de espaço cercada pelas superfícies internas da concavidade de um sólido como a caixa de isopor ilustrada a seguir.

Nesse exemplo:

- V_1 é o volume de isopor presente na caixa;
- V_2 é a capacidade de armazenamento da caixa.

Unidades de capacidade

Para expressar a grandeza da capacidade, o Sistema Internacional de Pesos e Medidas (SI) também admite a unidade litro, que deve ser indicada pela letra L (maiúscula) ou ℓ (minúscula cursiva).

Assim como a unidade metro (m), usada para expressar a grandeza do comprimento, o litro também admite múltiplos e submúltiplos no SI:

- O quilolitro: 1 kL = 1000 L = 10^3 L
- O hectolitro: 1 hL = 100 L = 10^2 L
- O decalitro: 1 daL = 10 L = 10^1 L
- O decilitro: 1 dL = 0,1 L = 10 ^{1} L
- O centilitro: 1 cL = 0,01 L = 10 ^{2} L
- O mililitro: 1 mL = 0,001 L = 10^{-3} L

Por ser uma grandeza simples, transformações entre múltiplos e submúltiplos do litro seguem as mesmas regras das grandezas lineares, como o metro. Assim, cada quilolitro possui mil litros (1 kL = 1000 L), e cada litro possui 100 centilitros (1 L = 100 cL), por exemplo. Observe as transformações de unidades apresentadas nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

4 Transforme em litros a capacidade de 0,05 kL

Resolução:

Considerando que 1 kL = 1000 L:

$$0{,}05\ kL = 0{,}05 \times 1\ kL$$
$$0{,}05\ kL = 0{,}05 \times 1000\ L$$
$$0{,}05\ kL = 50\ L$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica

$$0{,}05\ kL = 5 \times 10^{-2} \times 1\ kL$$
$$0{,}05\ kL = 5 \times 10^{-2} \times 10^3\ L$$
$$0{,}05\ kL = 5 \times 10^{-2+3}\ L$$
$$0{,}05\ kL = 5 \times 10^1\ L$$

5 Transforme em litros a capacidade de 20 cL.

Resolução:

Considerando que 1 cL = 0,01 L:

$$20\text{ cL} = 20 \times 1\text{ cL}$$
$$20\text{ cL} = 20 \times 0{,}01\text{ L}$$
$$20\text{ cL} = 0{,}2\text{ L}$$

O mesmo problema pode ser resolvido em notação científica:

$$20\text{ cL} = 2 \times 10^{1} \times 1\text{ cL}$$
$$20\text{ cL} = 2 \times 10^{1} \times 10^{-2}\text{ L}$$
$$20\text{ cL} = 2 \times 10^{1-2}\text{ L}$$
$$20\text{ cL} = 2 \times 10^{-1}\text{ L}$$

Comparando volume e capacidade

Embora ambas as grandezas sirvam para medir porções do espaço, o volume possui unidades de medida compostas, enquanto a capacidade possui unidades de medida simples.

No SI, a unidade composta para a medição de volumes é o metro cúbico. No entanto, fora do SI há outras opções, como a polegada cúbica ou a jarda cúbica. Já a unidade simples para a medição de capacidades, no SI, é o litro; fora do SI há o dracma, a onça, o barril ou o galão, por exemplo.

Como vimos nos exemplos anteriores, o uso de uma unidade de medida simples facilita as transformações entre múltiplos e submúltiplos, ao contrário do que ocorre com as unidades compostas, como o metro cúbico, cujas transformações dependem das relações entre múltiplos e submúltiplos da unidade primitiva, nesse caso, o metro.

Do mesmo modo que 1 m^3 é a medida da porção de espaço ocupada por um único cubo cujas arestas medem 1 m, também ocorre que 1 dm^3 é a medida do espaço ocupado por um único cubo cujas arestas medem 1 dm e que 1 cm^3 é a medida do espaço ocupado por um único cubo cujas arestas medem 1 cm. Assim:

$$\mathbf{1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000\,000\ cm^3}$$

Suponha que dez pequenos cubos com arestas de 1 cm sejam colocados um sobre o outro, como mostra a figura. O sólido formado por esses cubos ocupará um espaço que mede 10 cm^3 Assim, embora 1 dm = 10 cm, não é correto assumir que 1 dm^3 seja equivalente a 10 cm^3

O espaço de 1 dm^3 equivale ao volume de um cubo com 1 dm = 10 cm de aresta Esse é o volume que se define como sendo equivalente ao litro (L), grandeza simples em que as transformações seguem o padrão das grandezas lineares:

0,001 kL = 0,01 hL = 0,1 daL = 1 L = 10 dL = 100 cL = 1000 mL

Observe que, nesse exemplo, cada cubo tem 1 mililitro de capacidade, portanto o sólido formado pelos dez cubos tem 10 mililitros de capacidade, o que equivale ao centilitro.

Assim, comparando o comportamento dos valores dessas unidades simples e compostas, para transitar rapidamente entre os múltiplos e submúltiplos do litro (unidade simples), uma sugestão é escrever todos eles em ordem decrescente e considerar duas regras para as unidades consecutivas:

1 Da esquerda para a direita, multiplica-se a medida por **10** para trocar de unidade.

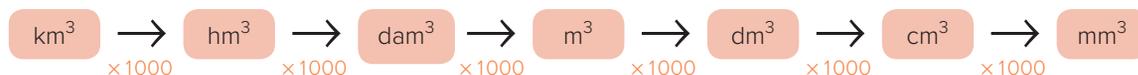
kL → (× 10) hL → (× 10) daL → (× 10) L → (× 10) dL → (× 10) cL → (× 10) mL

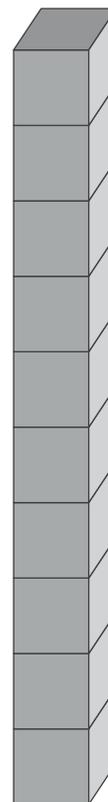
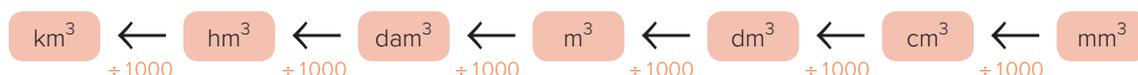
2. Da direita para a esquerda, divide-se a medida por **10** para trocar de unidade.

kL ← (÷ 10) hL ← (÷ 10) daL ← (÷10) L ← (÷ 10) dL ← (÷ 10) cL ← (÷ 10) mL

Para transitar entre os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico (unidade composta), pode-se escrever todos eles em ordem decrescente e considerar duas outras regras para as unidades consecutivas:

1 Da esquerda para a direita, multiplica-se a medida por **1000** para trocar de unidade

km^3 → (× 1000) hm^3 → (× 1000) dam^3 → (× 1000) m^3 → (× 1000) dm^3 → (× 1000) cm^3 → (× 1000) mm^3

2 Divide-se a medida por **1000** para trocar de unidade da direita para a esquerda

km^3 ← (÷ 1000) hm^3 ← (÷ 1000) dam^3 ← (÷ 1000) m^3 ← (÷ 1000) dm^3 ← (÷ 1000) cm^3 ← (÷ 1000) mm^3

Mudança de unidade

Para transformar em metros cúbicos o valor em litros de uma porção de espaço, ou o contrário, recomenda-se memorizar que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico (1 L $\Leftrightarrow$ 1 dm^3), mas também é interessante observar que 1 mililitro equivale a 1 centímetro cúbico (1 mL $\Leftrightarrow$ 1 cm^3) e que 1 quilolitro equivale a 1000 litros ou 1 metro cúbico (1 kL $\Leftrightarrow$ 1 m^3).

Quando se trata dessas grandezas, as unidades mais usadas no cotidiano são o metro cúbico, o litro e o centímetro cúbico. Como a razão entre elas é igual a 1000, também é relativamente simples e bastante útil memorizar que em 1 metro cúbico cabem 1000 litros e que em 1 litro cabem 1000 centímetros cúbicos.

Exercícios resolvidos

6 Que volume, em centímetros cúbicos, comporta um recipiente com capacidade de 25 cL?

A 2500
B 250
C 25
D 0,25
E 0,00025

Resolução:

$25\ c\ell = (25 : 100)\ L = 0{,}25\ L = 0{,}25\ dm^3 = (0{,}25 \cdot 1000)\ cm^3 =$
$= 250\ cm^3$

Alternativa: **B**

7 Uma lata de 36 dL de tinta é oferecida por R$ 127,80 Qual o preço do metro cúbico dessa tinta?

A R$ 35 500,00
B R$ 3 550,00
C R$ 355,00
D R$ 35,50
E R$ 3,55

Resolução:

$36\ dL = (36 : 10)\ L = 3{,}6\ L = 3{,}6\ dm^3 = (3{,}6 : 1000)\ m^3 =$
$= 0{,}0036\ m^3$

Assim, o preço do metro cúbico da tinta é igual a:

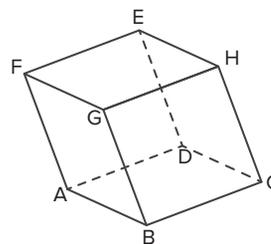
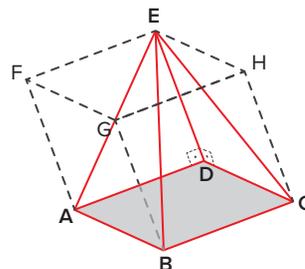
R$ 127,80 : 0,0036 = R$ 35 500,00

Alternativa: **A**

Unidades arbitrárias

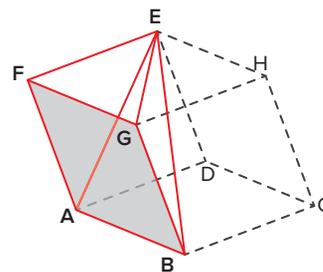
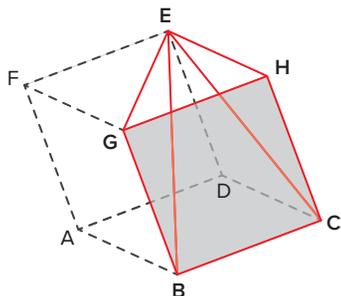
Mesmo existindo diversas opções de unidades para medir volumes e capacidades, muitos problemas que tratam de comparações dessas grandezas em diferentes formas geométricas espaciais podem ser respondidos adotando-se como unidade de medida o volume de uma das figuras ou de parte dela. Depois de escolhida a unidade, usa-se esse volume para medir os volumes das demais formas geométricas, podendo-se, assim, estabelecer as razões entre eles

Quando a unidade de comparação é adotada especificamente para um problema e escapa do sistema métrico ou de outros sistemas existentes, ela pode ser representada por $\mathbf{u}^3$ ou, ainda, por **u.v.** (unidades de volume)

Desse modo, é possível observar, por exemplo, que o volume de um cubo é o triplo do volume de uma pirâmide com mesma base e altura do cubo. Para verificar essa afirmação, considere o cubo ABCDEFGH.

Como qualquer face do cubo pode ser considerada sua base e qualquer uma de suas dimensões coincide com sua altura, uma pirâmide com mesma base e altura que o cubo pode ser a de base ABCD e altura ED.

Pirâmide I

Outra pirâmide com mesma base e altura que o cubo pode ser a de base ABGF e altura EF.

Pirâmide II

FRENTE 3

Uma terceira pirâmide com mesma base e altura que o cubo e disjunta das outras duas é a de base BCHG e altura EH

Pirâmide III

O fato de essas três pirâmides serem congruentes entre si pode ser verificado observando-se a simetria de rotação espacial que existe entre elas. Isso porque cada uma delas pode ser obtida a partir da rotação de qualquer outra em torno de um mesmo eixo, que, nesse caso, é a reta que passa pelos vértices E e B do cubo.

Assim, se o espaço ocupado por uma das pirâmides for adotado como unidade de medida de volume, veremos que os volumes V_I, V_{II} e V_{III} de cada uma das pirâmides é unitário:

$$V_I = V_{II} = V_{III} = 1\ u^3$$

Então, sabendo que as pirâmides não se sobrepõem, ou seja, que não ocupam espaço comum, e sim todo o es paço do cubo, pode-se concluir que o volume desse cubo equivale à soma dos volumes dessas pirâmides:

$$V_{CUBO} = V_I + V_{II} + V_{III}$$
$$V_{CUBO} = 1\ u^3 + 1\ u^3 + 1\ u^3$$
$$V_{CUBO} = 3\ u^3$$

Exercício resolvido

8 **Enem** A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista Veja. Ano 41, nº 25, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras ca bem dentro de Júpiter?

A 406
B 1334
C 4002
D 9338
E 28014

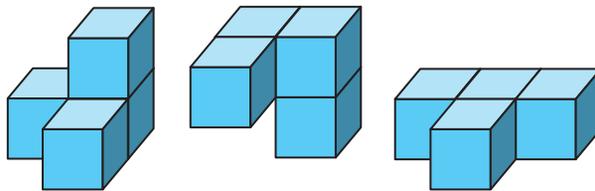
Resolução:

Adotando o volume da Terra como sendo a unidade de medida dos volumes dos demais planetas, tem-se:

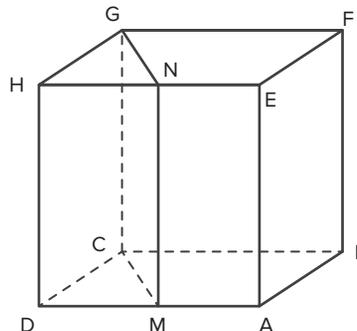
Terra = 1 u.v.
Netuno = 58 u.v.
Júpiter = 23 Netunos = 23 · 58 u.v. = 1334 u.v.
Cabem 1334 Terras dentro de Júpiter.
Alternativa: **B**

! Atenção

Equivalência no espaço

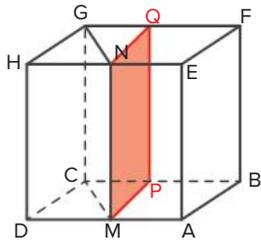
O conceito geométrico de equivalência entre figuras depende do número de dimensões das figuras mensuradas Assim, ângulos equi valentes têm a mesma medida, linhas equivalentes têm o mesmo comprimento, formas bidimensionais equivalentes têm a mesma área e formas tridimensionais têm o mesmo volume. Desse modo, sólidos geométricos são equivalentes quando suas superfícies cercam porções de espaço com o mesmo volume

Observe como formas geométricas espaciais obtidas pela justaposição de uma coleção de pequenos cubos podem ter formatos muito diferentes e, mesmo assim, ter o mesmo volume Isso ocorre porque os sólidos que compõem cada uma são congruentes aos que compõem as outras.

Exercícios resolvidos

9 A figura a seguir apresenta o cubo ABCDEFGH e, no interior dele, o sólido ABCMEFGN.

Se M e N são os pontos médios das arestas $\overline{AD}$ e $\overline{HE}$, então a razão entre o volume do sólido e o volume do cubo é igual a:

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{3}{4}$ E $\frac{1}{3}$

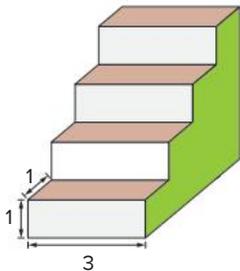
Resolução:

Considere os pontos médios P e Q das arestas $\overline{BC}$ e $\overline{GF}$ do cubo, bem como o plano determinado pelos pontos P, Q, M e N.

Como o plano MPQN divide o cubo em dois sólidos simétricos e congruentes (MDCPNHGQ e MABPNEFQ), conclui-se que o volume de cada um deles corresponde à metade do volume do cubo.

Como o plano MCGN divide uma dessas metades em dois outros sólidos simétricos e congruentes (MDCNHG e CPMGQN), conclui-se que o volume de cada um desses dois novos sólidos ocupa metade da metade do volume do cubo, ou seja, a quarta parte do volume do cubo.

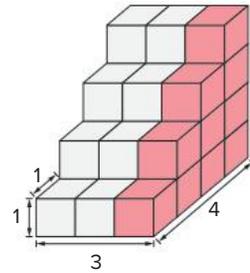
Portanto, o volume do sólido ABCMEFGN equivale a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$ do volume do cubo.

Alternativa: **D**

10 Considere uma escada de quatro degraus em que a largura de cada um meça o triplo da altura e da pro fundidade, como mostra a ilustração a seguir

Se essa escada é um sólido geométrico de volume V, qual é o volume de uma escada com cinco degraus em que a altura e a profundidade de cada um tenham as mesmas medidas dos degraus da escada ilustrada, mas a largura seja o quádruplo desse valor?

A 6V
B 5V
C 4V
D 3V
E 2V

Resolução:

Decompondo a escada em pequenos cubos por meio de planos paralelos aos das faces da escada e adotando o espaço ocupado por um desses cubos como unidade de volume, obtém-se a seguinte figura:

Observando que essa figura possui três seções ver ticais congruentes, e que a que está em destaque é formada por 1 + 2 + 3 + 4 = 10 pequenos cubos unitários, tem-se que:

$$V = 3\ (1 + 2 + 3 + 4) = 3\ \ 10 = 30 \text{ u.v.}$$

Desse modo, é correto inferir que, em uma escada como a mencionada no enunciado, que tenha quatro seções verticais congruentes, cada seção é formada por 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 cubos. Assim, sendo X o volume dessa escada, tem-se:

$$X = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 4 \cdot 15 = 60 \text{ u.v.}$$

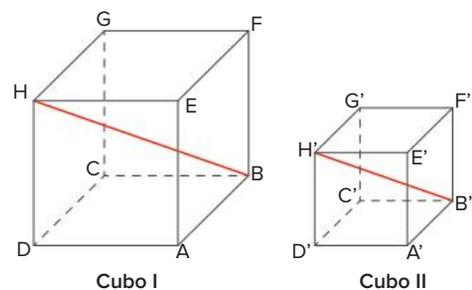
Portanto, X = 2V.

Alternativa: **E**

Razão de semelhança no espaço

No estudo da Geometria, o conceito de figuras semelhantes se estende às figuras espaciais. Assim, havendo uma correspondência biunívoca ponto a ponto entre duas figuras espaciais, a relação de semelhança entre elas fica garantida quando todas as medidas angulares determinadas por pontos correspondentes das figuras forem iguais entre si

Desse modo, dividindo qualquer comprimento de uma figura pelo comprimento correspondente na outra, sempre na mesma ordem, obtem-se um quociente constante, denominado razão de semelhança

Considerando que, por serem formas geométricas regulares, todos os cubos são semelhantes entre si, observe os cubos I e II de tamanhos diferentes e a correspondência biunívoca de cada ponto X do cubo maior para cada ponto X' do cubo menor

Assim, dividindo o comprimento da aresta do cubo maior pelo comprimento da aresta do cubo menor, encontra-se um quociente k:

$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

FRENTE 3

Então, dividindo o comprimento da diagonal do cubo maior pelo comprimento da diagonal do cubo menor, encontra-se o mesmo quociente k:

$$\frac{HB}{H'B'} = k$$

O mesmo ocorre com os comprimentos das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ das bases dos cubos. No entanto, isso não acontece, por exemplo, quando se divide a área do quadrado que é base do cubo maior pela área do quadrado correspondente no cubo menor. Nesse caso, o quociente produzido é igual a k^2, ou seja, o quadrado da razão de semelhança.

$$\frac{[ABCD]}{[A'B'C'D']} = k^2$$

Isso se deve ao fato de que o comprimento é uma grandeza geométrica de uma única dimensão (dim = 1), enquanto a área é uma grandeza geométrica de duas dimensões (dim = 2).

Como o volume é uma grandeza geométrica de três dimensões (dim = 3), quando se divide o volume V_I do cubo maior pelo volume V_{II} do cubo menor, o quociente produzido é igual a k^3, ou seja, o cubo da razão de semelhança

$$\frac{V_I}{V_{II}} = k^3$$

Teorema: Se dois sólidos geométricos são semelhantes entre si e k é a razão dessa semelhança, então a razão entre os volumes desses sólidos é igual a k^3.

Desse teorema decorre, por exemplo, que, duplicando as arestas de um cubo, o volume desse cubo fica multiplicado por 8, pois $2^3 = 8$. Do mesmo modo, triplicando as arestas, o volume fica multiplicado por 27, pois $3^3 = 27$ e assim por diante.

! Atenção

Indicando por **dim** o número de dimensões de um elemento pertencente a um sólido geométrico e pela letra **K** a razão de semelhança entre dois sólidos geométricos, a relação algébrica entre as medidas dos elementos correspondentes entre esses sólidos pode ser resumida da seguinte maneira:

$$\text{Sólido 1} \sim \text{Sólido 2} \Rightarrow \frac{\left(\begin{array}{c}\text{medida de um elemento}\\ \text{qualquer do sólido 1}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{medida do elemento}\\ \text{correspondente no sólido 2}\end{array}\right)} = k^{dim}$$

Indicando por (') as medidas dos elementos do sólido 2 correspondentes às medidas do sólido 1, os casos contidos na expressão geral são:

$$\text{dim} = 1 \Rightarrow \frac{\text{comprimento}}{\text{comprimento'}} = k$$

$$\text{dim} = 2 \Rightarrow \frac{\text{área}}{\text{área'}} = k^2$$

$$\text{dim} = 3 \Rightarrow \frac{\text{volume}}{\text{volume'}} = k^3$$

Exercícios resolvidos

11 O que acontecerá com a área e com o volume de um cubo se todas as suas dimensões forem aumentadas em 20%?

A Ambos também aumentarão em 20%.
B Ambos aumentarão em 44%.
C A área aumentará em 40% e o volume em 60%.
D A área aumentará em 44% e o volume aumentará aproximadamente em 66%.
E A área aumentará em 44% e o volume aumentará aproximadamente em 73%

Resolução:

Com um aumento de 20%, o comprimento ℓ de cada aresta do cubo original passará a valer $1,2\ell$ Assim, a razão de semelhança entre os cubos será $k = \frac{1,2\ell}{\ell} = 1,2$

Assim, a razão entre as áreas desses cubos será $k^2 = (1,2)^2 = 1,44$, o que indica um aumento de 44% na área do cubo; e a razão entre os volumes será $k^3 = (1,2)^3 = 1,728$, o que indica um aumento de 72,8% no volume do cubo.
Alternativa: **E**

12 Se dois cubos são tais que o volume do maior é 64 vezes o volume do menor, então a diagonal do cubo maior é igual ao:

A dobro da diagonal do cubo menor
B triplo da diagonal do cubo menor
C quádruplo da diagonal do cubo menor
D quíntuplo da diagonal do cubo menor
E sêxtuplo da diagonal do cubo menor.

Resolução:

Sendo V o volume do cubo menor e K a razão de semelhança entre os cubos:

$$k^3 = \frac{64 \cdot V}{V} \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = \sqrt[3]{64} \Rightarrow k = 4$$

Portanto, a diagonal do cubo maior mede o quádruplo da diagonal do cubo menor.
Alternativa: **C**

13 Duas caixas de papelão em formato de cubo são tais que a área da superfície da caixa maior mede o dobro da área da superfície da caixa menor Nesse caso, a razão entre as capacidades dessas caixas é igual a:

A $2\sqrt[3]{4}$
B $2\sqrt{2}$
C $2\sqrt[3]{2}$
D 4
E 8

Resolução:

Sendo S o valor da área da superfície do cubo menor e K a razão de semelhança entre os cubos:

$$k^2 = \frac{2 \cdot S}{S} \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

Portanto, a razão entre as capacidades dessas caixas é $k^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$.

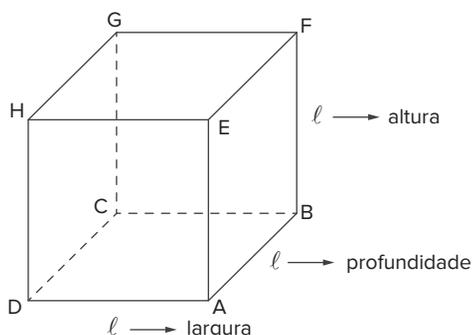
Alternativa: **B**

Fórmulas básicas para o cálculo de volumes

A capacidade de avaliar corretamente volumes de fi guras espaciais cercadas por superfícies planas pode ser desenvolvida a partir da memorização de um número razoável de fórmulas algébricas, como as que expressam os volumes de prismas e pirâmides.

Entre os sólidos que chamamos de prismas estão os paralelepípedos (ou prismas quadrangulares) e, entre estes, estão os cubos

Volume do cubo

Cercados por seis quadrados congruentes, oito vértices triédricos e trirretângulos e doze arestas de mesmo comprimento que coincidem com as medidas de suas três dimensões (largura, profundidade e altura), os cubos podem ser considerados paralelepípedos ou até mesmo prismas, de acordo com as definições dessas figuras.

Seu formato caracteriza, ainda, um dos cinco únicos tipos de poliedros regulares pela definição de Platão, segundo a qual, por apresentarem exatamente seis faces, os cubos também são chamados de hexaedros regulares.

Entretanto, mais importante do que sua denominação é o fato de que os cubos são as formas geométricas que usamos como unidade de volume Desse modo, se as arestas de um cubo possuírem exatamente uma unidade de comprimento, o espaço cercado pelas faces dele terá exatamente uma unidade de volume.

- Aresta do cubo = 1 km ⇔ Volume do cubo = 1 km^3
- Aresta do cubo = 1 m ⇔ Volume do cubo = 1 m^3
- Aresta do cubo = 1 dm ⇔ Volume do cubo = 1 dm^3 (capacidade de 1 litro)
- Aresta do cubo = 1 cm ⇔ Volume do cubo = 1 cm^3

Dividindo o comprimeto ℓ das arestas de um cubo qualquer pelo comprimento da aresta de um cubo unitário, obtém-se uma razão de semelhança entre eles igual a $k = \frac{\ell}{1}$.

Assim, sendo V o volume de um cubo de aresta ℓ, pelo teorema da razão de semelhança, tem-se $\frac{V}{1} = k^3$.

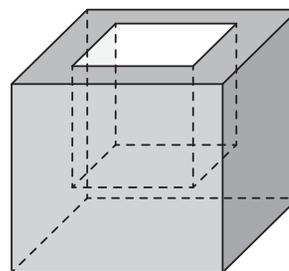
Substituindo k na última expressão: $\frac{V}{1} = \left(\frac{\ell}{1}\right)^3$.

Logo, conclui-se que a fórmula para o volume de um cubo em função do comprimento de suas arestas é a fórmula mais básica para o cálculo de volumes:

$$V_{Cubo} = \ell^3$$

Perceba que até o modo como nos referimos à terceira potência deriva da forma de se calcular o volume desse sólido geométrico.

Exercícios resolvidos

14 **Enem (Adapt.)** Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm

O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

A 12 cm^3
B 64 cm^3
C 96 cm^3
D 1216 cm^3
E 1728 cm^3

Resolução:

O volume do cubo maior é: $V = 12^3 = 1728$ cm^3.
O volume do cubo menor é: $V' = 8^3 = 512$ cm^3.
O volume de madeira no porta-lápis é:

$$V - V' = 1728 - 512 = 1216 \text{ cm}^3$$

Alternativa: **D**

15 **PUC Rio 2017** Um cubo de aresta a tem volume 24.

Assinale o valor do volume de um cubo de aresta $\frac{a}{3}$

A $\frac{8}{9}$
B $\frac{9}{3}$
C 8
D 24
E 72

FRENTE 3

Resolução:

O volume do primeiro cubo citado é: $V = a^3 = 24$.
Já o volume do segundo cubo é:

$$V' = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{3^3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

Alternativa: **A**

16 Quanto mede a aresta de um cubo com volume de $2\sqrt{2}$ m^3?

A 2 m

B $2\sqrt[3]{2}$ m

C $\sqrt[6]{2}$ m

D $\sqrt[3]{2}$ m

E $\sqrt{2}$ m

Resolução:

Sendo ℓ a medida, em metros, da aresta do cubo:

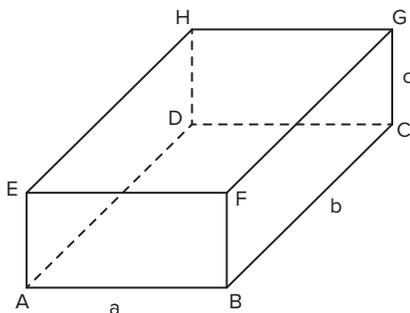
$$\ell^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$$

Como $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$, por substituição tem-se:

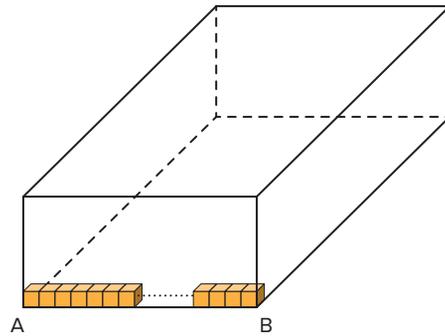
$$\ell = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \sqrt{2} \text{ m}$$

Alternativa: **E**

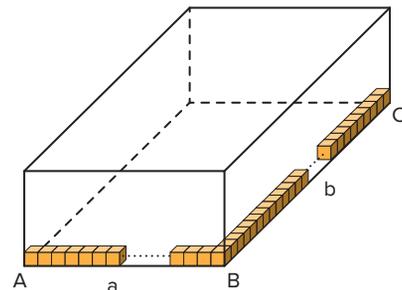
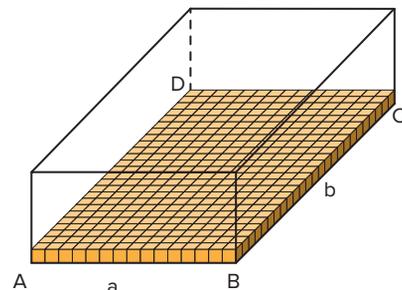
Volume do paralelepípedo retangular e reto

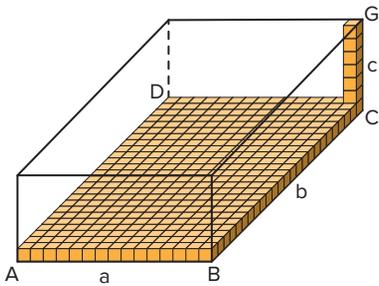
Paralelepípedos são sólidos geométricos cercados por três pares de faces paralelas. Quando essas faces são compostas de seis retângulos, o volume dessas formas geométricas tridimensionais equivale ao produto das medidas de suas três dimensões.

Um paralelepípedo como o mostrado na imagem será retangular se suas bases ABCD e EFGH forem retângulos congruentes entre si. Ele também será denominado reto se suas arestas laterais $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DE}$ forem perpendiculares aos planos das bases.

Caso seja retangular e reto, todos os vértices do paralelepípedo serão triedros trirretângulos. Nesse caso, o paralelepípedo poderá ser completamente preenchido por determinada quantidade de cubos. Assim, a soma dos volumes desses cubos será igual ao volume do paralelepípedo.

Considere que as dimensões do paralelepípedo sejam representadas pelos números inteiros a, b e c, em alguma unidade de comprimento Então, pode-se dizer que *a* é a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípedo, lado a lado, e sobre o comprimento da aresta $\overline{AB}$, por exemplo.

A soma dos volumes dos cubos colocados no interior do paralelepípedo, em unidades de volume, é

$$\underbrace{1+1+1+1+\ldots+1+1}_{\text{a parcelas}} = 1 \cdot a = a$$

Do mesmo modo, pode-se dizer que b é a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípedo, lado a lado, mas agora sobre o comprimento da aresta $\overline{BC}$, por exemplo.

Logo, o produto a · b representa a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípe do, lado a lado, sobre sua base ABCD.

Assim, a soma dos volumes dos cubos colocados no interior do paralelepípedo, em unidades de volume, é $\underbrace{a+a+a+a+\ldots+a+a}_{\text{b parcelas}} = a \cdot b$.

Também pode-se dizer que c é a quantidade de cubos unitários que podem ser dispostos dentro do paralelepípedo, lado a lado, mas agora sobre o comprimento da aresta $\overline{CG}$, por exemplo.

Caso seja colocada uma quantidade c de camadas formadas por uma quantidade $a \cdot b$ de pequenos cubos unitários dentro do paralelepípedo, o volume dele ficará completamente preenchido. Nesse caso, a soma dos volumes dos cubos colocados no interior do paralelepípedo, em unidades de volume, será o próprio volume do paralelepípedo:

$$V_{\text{Paralelepípedo}} = \underbrace{a\cdot b + a\cdot b + a\cdot b + a\cdot b + \ a{+}b \cdot \ \ + a\cdot b}_{c\ \text{parcelas}}$$

Portanto, a fórmula para o cálculo do volume de um paralelepípedo em função das medidas de suas dimensões a, b e c é:

$$V_{\text{Paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$$

Nos próximos capítulos, em que estudaremos o princí pio de Cavalieri no espaço, veremos demonstrações dessa relação que contemplam outros formatos de paralelepí pedo, como os oblíquos, e casos em que as dimensões do paralelepípedo não podem ser expressas por números inteiros em nenhuma unidade de medida.

Exercícios resolvidos

17 Um paralelepípedo retangular e reto tem 12 cm de largura e suas outras dimensões diferem apenas 2 cm uma da outra. Sabendo que o volume desse paralelepípedo é de 420 cm^3, pode-se concluir que a soma de suas dimensões, em centímetros, é igual a:

A 28 cm
B 24 cm
C 20 cm
D 14 cm
E 12 cm

Resolução:

Sendo x e (x – 2) as outras dimensões do paralelepípedo, temos:

$$12 \cdot x \cdot (x - 2) = 420 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x - 420 = 0$$

Dividindo a equação por 12 e resolvendo-a, obtemos:

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$\Delta = (\ \ 2)^2 \ \ \cdot 4 \cdot 1\ (\ \ 35) = 4 + 140 = 144$$

$$x = \frac{(\ \ 2) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} x = 7 \\ x' = \ \ 5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, as dimensões do paralelepípedo são 12 cm, 7 cm e 5 cm, cuja soma é 24 cm

Alternativa: **B**

18 **Enem 2016** O recinto das provas de natação olímpica utiliza a mais avançada tecnologia para proporcionar aos nadadores condições ideais. Isso passa por reduzir o impacto da ondulação e das correntes provocadas pelos nadadores no seu deslocamento. Para conseguir isso, a piscina de competição tem uma profundidade uniforme de 3 m, que ajuda a diminuir a “reflexão” da água (o movimento contra uma superfície e o regresso no sentido contrário, atingindo os nadadores), além dos já tradicionais 50 m de comprimento e 25 m de largura. Um clube deseja reformar sua piscina de 50 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade de forma que passe a ter as mesmas dimensões das piscinas olímpicas.

Disponível em: <http://desporto.publico.pt>. Acesso em: 6 ago. 2012.

Após a reforma, a capacidade dessa piscina superará a capacidade da piscina original em um valor mais próximo de:

A 20%
B 25%
C 47%
D 50%
E 88%

Resolução:

O volume atual da piscina do clube em metros cúbicos é $V = 50 \cdot 20 \cdot 2 = 2000\ m^3$.

O volume que a piscina passará a ter após a reforma será $V' = 50 \cdot 25 \cdot 3 = 3750\ m^3$.

O aumento no volume será $V' - V = 3750 - 2000 = 1750\ m^3$.

Portanto, a taxa de aumento será igual a $\frac{1750}{2000} = 0{,}875 = 87{,}5\%$.

Alternativa: **E**

19 **Enem 2014** Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é:

A $\frac{1}{8}$
B $\frac{7}{8}$
C $\frac{8}{7}$
D $\frac{8}{9}$
E $\frac{9}{8}$

Resolução:

Como o custo com o material é proporcional ao volume das portas, para mantê-lo é necessário que a nova porta tenha o mesmo volume da porta anterior.

Sendo x, y e z as medidas da altura, largura e espessura da porta anterior, tem se que:

I A altura da nova porta é igual a $x + \frac{x}{8} = \frac{9x}{8}$

II. A espessura da nova porta também é igual a z.

Então, sendo y' a largura da nova porta, da igualdade entre os volumes, tem-se que:

$$\frac{9x}{8} \cdot y' \cdot z = x \cdot y \cdot z \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{8}{9}$$

FRENTE 3

Portanto, a razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é $\frac{8}{9}$

Alternativa: **D**

! Atenção

Se um paralelepípedo tem suas dimensões representadas por números inteiros a, b e c em alguma unidade de comprimento, então a aresta ℓ do maior cubo que pode ser usado para preencher completamente o paralelepípedo, como foi mostrado anteriormente, deve ter uma medida igual ao máximo divisor comum dos valores das três dimensões do paralelepípedo. Assim:

$$\ell = \text{mdc}(a, b, c)$$

Exercício resolvido

20 PUC-SP 2017 Um bloco maciço de madeira na forma de um prisma reto de base retangular medindo 18 cm por 24 cm e com 30 cm de altura foi dividido em cubinhos iguais e de maior aresta possível. Supondo que não tenha ocorrido perda alguma no corte do bloco, o volume do cubinho é:

A 64 cm^3
B 125 cm^3
C 216 cm^3
D 343 cm^3

Resolução:

Nas condições do enunciado, o comprimento da aresta do maior cubo, em centímetros, é:

$$\ell = \text{mdc}(18, 24, 30) = 2 \cdot 3 = 6$$

Portanto, o volume de cada cubinho é $V = 6^3 = 216\ cm^3$.

Alternativa: **C**

Média geométrica no espaço

Algebricamente, a média geométrica de três números reais positivos (a, b e c) é expressa pela raiz cúbica do produto desses números, ou seja, $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

Já geometricamente, essa média corresponde ao comprimento da aresta de um cubo, cujo volume coincide com o volume de um paralelepípedo de dimensões a, b e c Assim, sendo ℓ o comprimento da aresta desse cubo:

$$V_{Cubo} = V_{Paralelepípedo}$$
$$\ell^3 = a \cdot b \cdot c$$

Nesse caso, dizemos que l é a média geométrica de a, b e c:

$$\ell = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

Exercício resolvido

21 Considere um paralelepípedo retorretângulo de dimensões 6 m por 90 cm por 10,8 dm. Quanto mede a aresta de um cubo que possui o mesmo volume que esse paralelepípedo?

A 180 cm
B 240 cm
C 360 cm
D 450 cm
E 600 cm

Resolução:

As dimensões do paralelepípedo, em centímetros, são:

$$600 \times 90 \times 108$$

Portanto, a aresta do cubo mede, em centímetros:

$$\ell = \sqrt[3]{600 \cdot 90 \cdot 108}$$

Decompondo em fatores primos os valores dessas dimensões:

$$\ell = \sqrt[3]{\underbrace{2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2}_{600} \cdot \underbrace{2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1}_{90} \cdot \underbrace{2^2 \cdot 3^3}_{108}} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^3}$$

Simplificando a raiz cúbica, tem-se:

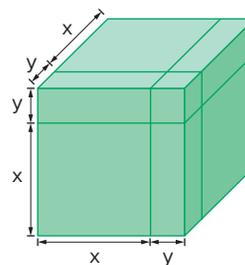
$$\ell = 2^2 \quad 3^2 \quad 5^1 = 4 \quad 9 \quad 5 = 180\ cm$$

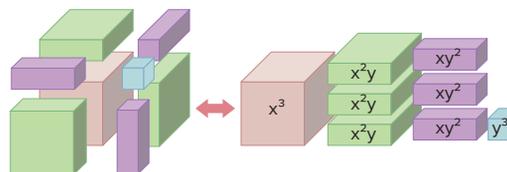
Alternativa: **A**

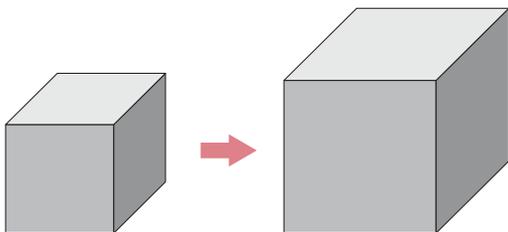
Saiba mais

O produto notável para o cubo da soma é uma importante identidade algébrica, que pode ser representada geometricamente pela justaposição de cubos e paralelepípedos retos de bases quadradas.

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

O primeiro membro dessa identidade representa geometricamente o volume de um cubo, cuja aresta mede x + y

Dessa maneira, a identidade enuncia que em um cubo como esse cabem:

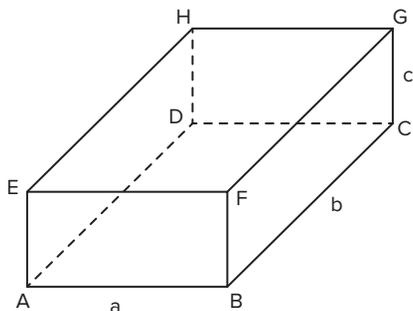
- 1 cubo de aresta x;
- 3 paralelepípedos cujas bases são quadradas, de lado x, e cujas alturas medem y;
- 3 paralelepípedos cujas bases são quadradas, de lado y, e cujas alturas medem x;
- 1 cubo de aresta y.

Exercício resolvido

22 Sabe-se que um aumento de 1 cm nas arestas de um determinado cubo faz com que seu volume aumente para 91 cm^3. Determine o comprimento inicial da aresta desse cubo.

Resolução:

Sendo x o comprimento inicial da aresta do cubo, em cm:
$(x + 1)^3 = x^3 + 91 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 91 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x \quad 90 = 0$
Dividindo a equação por 3 e resolvendo a, tem-se:

$$x^2 + x - 30 = 0$$
$$\Delta = 1^2 \cdot \quad \cdot 4 \mp (\quad 30) \quad 121$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 11}{2} \begin{cases} \nearrow x = 5 \\ \searrow x' = -6 \end{cases}$$

Portanto, o cubo tem, inicialmente, 5 cm de aresta.

Elementos do paralelepípedo

O paralelepípedo retangular e reto da figura possui:

- **8** vértices, que são triedros trirretângulos: A, B, C, D, E, F, G e H.
- **12** arestas, cujas medidas coincidem com algumas das suas dimensões:

$$\begin{cases} \text{largura: } AB = CD = EF = GH = a \\ \text{profundidade: } AD = BC = EH = FG = b \\ \text{altura: } AE = BF = CG = DH = c \end{cases}$$

- **6** faces retangulares: $\begin{cases} [ABCD] = [EFGH] = a \cdot b \\ [ADHE] = [BCGF] = b \cdot c \\ [ABFE] = [DCGH] = a \cdot c \end{cases}$

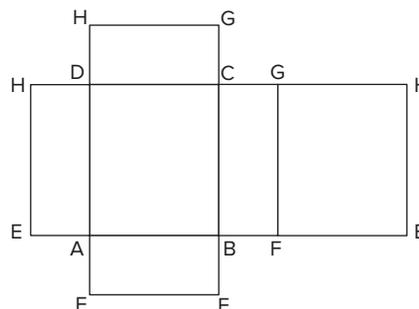
- **12** diagonais sobre a sua superfície:

$$\begin{cases} AC = BD = EG = FH = \sqrt{a^2 + b^2} \\ AF = BE = CH = DG = \sqrt{a^2 + c^2} \\ AH = BG = CF = DE = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$

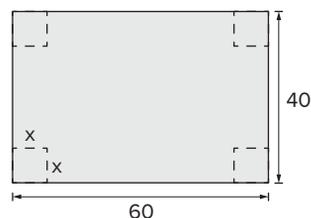
- **4** diagonais no seu interior:

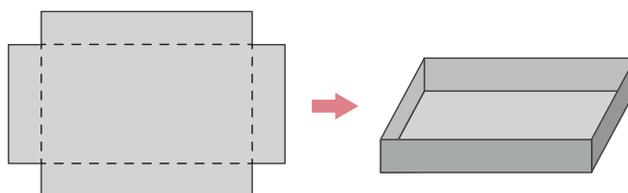
$$AG = BH = CE = DF = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Planificação do paralelepípedo

O conjunto de seis retângulos justapostos ilustrado a seguir representa a planificação de um paralelepípedo retangular reto. Os pontos indicados com as mesmas letras representam o mesmo vértice no sólido espacial.

Para montar o paralelepípedo, basta recortar o polígono formado por todos esses retângulos, dobrar o recorte sobre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{FG}$, formando diedros retos, e fazer coincidir os pontos E, F, G e H no espaço.

Exercício resolvido

23 Dos quatro vértices de um pedaço de cartolina retangular, com dimensões 60 cm por 40 cm, recortam-se quadrados de lado x, como mostra a figura a seguir:

Com a finalidade de se obter uma caixa com a forma de um paralelepípedo de faces retangulares, o pedaço restante de cartolina é dobrado nas linhas pontilhadas, como aparece na próxima figura:

FRENTE 3

Assinale a alternativa em que o polinômio V(x) representa o volume dessa caixa em função da medida x, em centímetros, do lado de cada um dos quadrados que foram recortados do pedaço original de cartolina.

A $V(x) = 4x^3 \quad 200x^2 + 2400x$

B $V(x) = x^3 \quad 20x^2 + 24x$

C $V(x) = 4x^3 + 200x^2 + 240$

D $V(x) = x^3 \quad 2400x^2 + 200x$

E $V(x) = 4x^2 \quad 200x + 2400$

Resolução:

De acordo com o enunciado, as dimensões da base da caixa são (60 – 2x) por (40 – 2x), e a altura do prisma, que resulta da montagem da caixa, é x.

Portanto, o volume da caixa é dado pela função:

$$V(x) = (60 - 2x) \cdot (40 - 2x) \cdot x$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e reduzindo os termos semelhantes, obtém-se:

$$V(x) = 4x^3 \quad 200x^2 + 2400x$$

Alternativa: **A**

A planificação de um sólido geométrico permite obser var com mais clareza como calcular as áreas das diversas partes de sua superfície. Assim, sendo a e b as dimensões da base de um paralelepípedo de altura c, tem-se:

$$\begin{cases} \text{Área da base} = ab \\ \text{Área lateral} = 2ac + 2bc = 2(ac + bc) \\ \text{Área total} = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc) \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

24 **PUC-Rio 2018** Uma caixa de chocolate, com a forma de paralelepípedo, tem dimensões 4 cm × 4 cm × 16 cm Quantos cm^2 de papel são necessários para cobrir completamente a caixa?

A 256

B 272

C 288

D 304

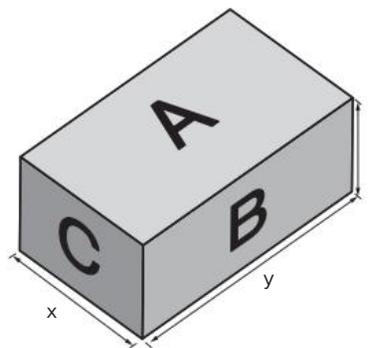
E 320

Resolução:

Com a = 4, b = 4 e c = 16, a área total desse paralelepí pedo, em cm^2, mede:

$A_{Total} = 2(ab + ac + bc) = 2 \cdot (4 \cdot 4 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 16) =$
$= 2 \cdot (16 + 64 + 64) = 2 \cdot 144 = 288\ cm^2$

Alternativa: **C**

25 **Insper 2016** A figura indica um bloco maciço com formato de paralelepípedo retorretângulo. As áreas das faces indicadas por A, B e C são, respectivamente, 48 cm^2, 32 cm^2 e 24 cm^2

O número de blocos como esse que devem ser mergulhados em um tanque completamente cheio de água para que haja um transbordamento de exatamente 4,8 litros de líquido é igual a:

A 28

B 25

C 24

D 20

E 18

Resolução:

De acordo com o enunciado e a ilustração, tem-se o seguinte sistema: $\begin{cases} x \cdot y = 48 & (I) \\ y \cdot z = 32 & (II) \\ x \cdot z = 24 & (III) \end{cases}$

Multiplicando as equações (I) e (II), obtém-se $x \quad z \quad y^2 =$ $= 48 \quad 32$

Substituindo o valor de $x \quad z$ dado pela equação (III), obtém-se $24 \quad y^2 = 48 \quad 32$

Dividindo a última equação por 24, chega se a $y^2 = 64$ e, como $y > 0$, conclui-se que $y = 8$

Então, multiplicando a equação (III) por y, obtém-se $x \quad z \quad y = 24 \quad 8 = 192$

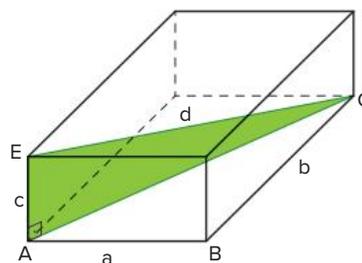
Portanto, o volume do bloco é $V = 192\ cm^3$

O volume de água que deve transbordar é $V' = 4{,}8 \quad 1000\ cm^3 = 4800\ cm^3$

Logo, devem ser mergulhados $\frac{V'}{V} = \frac{4800}{192} = 25$ blocos

Alternativa: **B**

Diagonais internas de um paralelepípedo

A expressão para o cálculo do comprimento d das diagonais internas de um paralelepípedo retangular reto de dimensões a, b e c é consequência do teorema de Pitágoras.

Primeiro, no triângulo ABC contido na base do paralelepípedo:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = a^2 + b^2$$

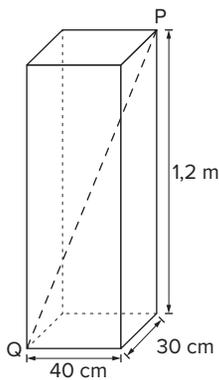
Depois, no triângulo ACE contido no interior do paralelepípedo:

$$CE^2 = AC^2 + AE^2$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Portanto:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Exercício resolvido

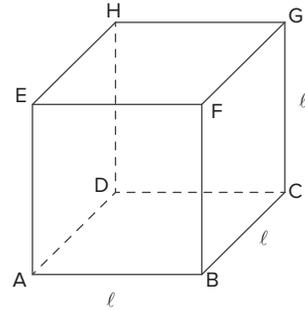
26 Uma caixa em forma de paralelepípedo tem todas as suas faces retangulares, como mostra a figura. Sabendo que as dimensões da caixa são 30 cm × 40 cm × × 1,2 m, qual é, em centímetros, o comprimento da diagonal PQ?

A 100
B 125
C 130
D 135
E 140

Resolução:

Ao escrever as dimensões da caixa em decímetros, tem-se: a = 4, b = 3 e c = 12.
Então, usando a fórmula da diagonal do paralelepípedo, obtém-se:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ dm}$$

Convertendo a medida para centímetros, nota-se que 13 dm = 130 cm
Alternativa: **C**

Elementos do cubo

O cubo ABCDEFGH da figura possui:

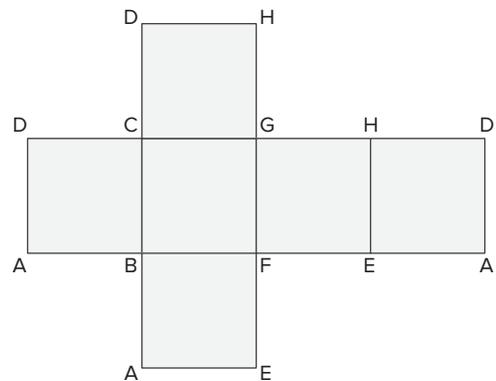
- 8 vértices que são triedros trirretângulos: A, B, C, D, E, F, G e H.
- 12 arestas de mesma medida ℓ:

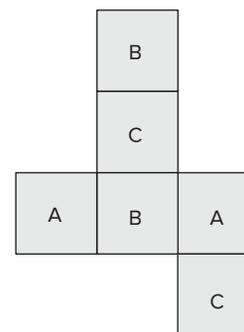
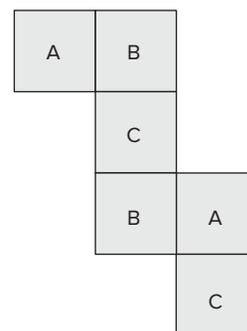
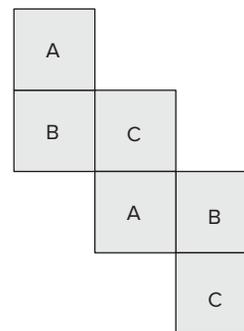
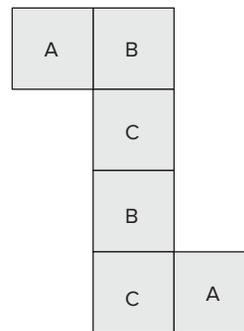
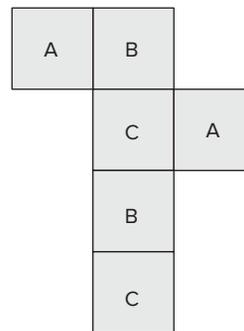
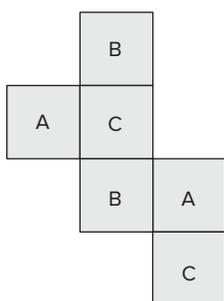
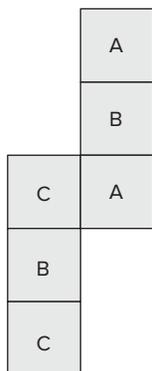
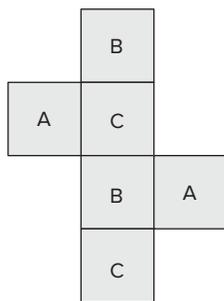
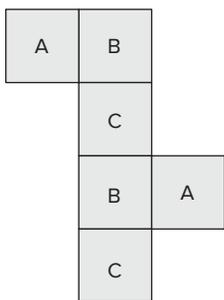
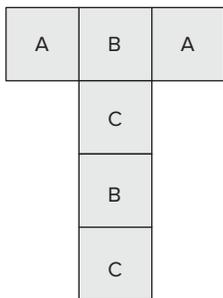
$$\begin{cases} \text{largura: } AB = CD = EF = GH = \ell \\ \text{profundidade: } AD = BC = EH = FG = \ell \\ \text{altura: } AE = BF = CG = DH = \ell \end{cases}$$

- 6 faces quadradas de mesma área ℓ^2:
  $[ABCD] = [EFGH] = [ADHE] = [BCGF] = [ABFE] = [DCGH] = \ell^2$
- 12 diagonais sobre a sua superfície, todas com o mesmo comprimento $\ell\sqrt{2}$:
  $AC = BD = EG = FH = AF = BE = CH = DG = AH = $
  $= DE = BG = CF = \ell\sqrt{2}$
- 4 diagonais no seu interior, todas com o mesmo comprimento $\ell\sqrt{3}$:

$$AG = BH = CE = DF = \ell\sqrt{3}$$

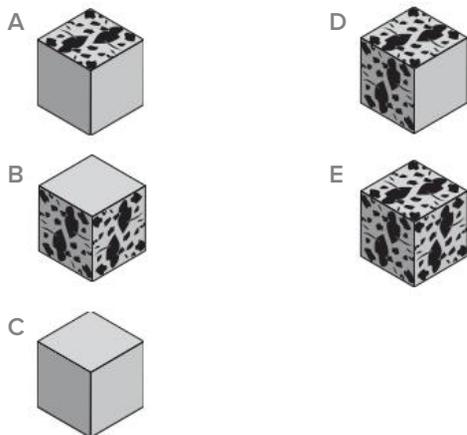
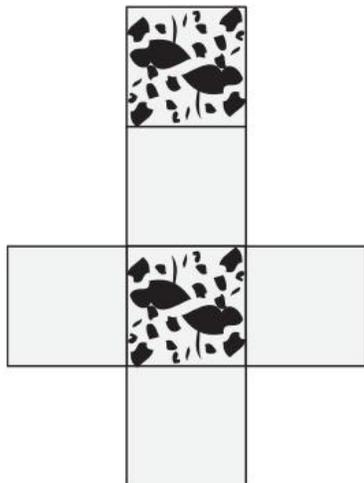
Planificações do cubo

O conjunto de seis quadrados congruentes ilustrado a seguir retrata a mais comum entre as possíveis planificações de um cubo. Os pontos indicados com as mesmas letras representam o mesmo vértice no sólido espacial.

Para montar o cubo, bastaria recortar dessa página o polígono formado por todos esses quadrados, dobrar o recorte sobre os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{FG}$ e $\overline{EH}$ para formar diedros retos e fazer coincidir no espaço os pontos A, E, D e H.

Mas existem outras dez possibilidades para o formato da planificação de um cubo em que nenhuma das faces é seccionada. Veja a seguir a ilustração de cada uma delas, em que as faces que são opostas em cada cubo estão marcadas com as mesmas letras.

As áreas das superfícies do cubo de aresta ℓ podem ser obtidas das seguintes expressões:

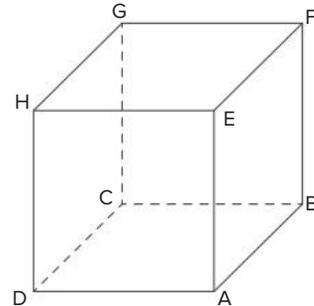
$$\begin{cases} \text{Área da base} = \ell^2 \\ \text{Área lateral} = 4\ell^2 \\ \text{Área total} = 6\ell^2 \end{cases}$$

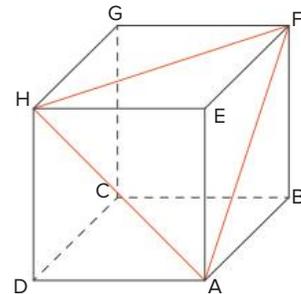
Exercício resolvido

27 **UFJF 2018** Qual sólido geométrico representa a planificação abaixo?

Resolução:

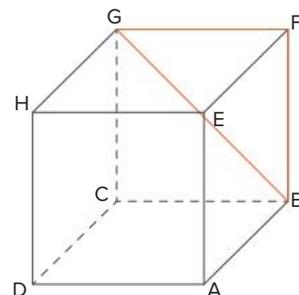
Como só há duas faces pintadas na planificação, a alternativa E não pode estar correta.
Ao observar que as faces pintadas na planificação devem ficar opostas quando o cubo é montado, podem ser eliminadas as alternativas B, C e D. Resta apenas a alternativa A, que deve ter a base pintada para representar o sólido.
Alternativa: **A**

Triângulos no cubo

Dado um cubo ABCDEFGH de aresta ℓ, considere todas as combinações de 3 de seus 8 vértices. São um total de $C_{8,3} = 56$ combinações e, como entre os vértices de um cubo não há três pontos alinhados, cada combinação corresponde a um único triângulo, contido na superfície ou no interior do cubo.

Como os lados desses triângulos podem coincidir com as arestas do cubo que medem ℓ, as diagonais de suas faces que medem $\ell\sqrt{2}$ ou as diagonais interiores que medem $\ell\sqrt{3}$, não há muitos formatos diferentes entre esses triângulos.

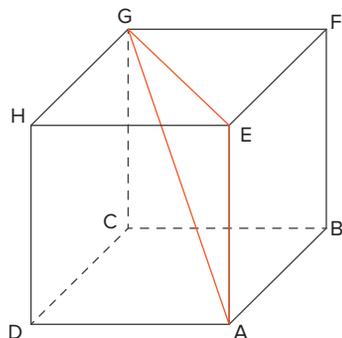
Na verdade, só há três formatos de triângulos entre todas essas combinações e muitos deles são congruentes ao triângulo AFH, por exemplo, que é equilátero, pois todos os seus lados são diagonais de quadrados congruentes.

Os lados desse triângulo medem $AF = AH = FH = \ell\sqrt{2}$

Os ângulos internos do triângulo AFH medem $med(\hat{A}) = med(\hat{F}) = med(\hat{H}) = 60°$.

Outros triângulos entre as combinações são congruentes ao triângulo BFG, por exemplo, que é retângulo, além de isósceles.

Os lados desse triângulo medem $BF = GF = \ell$ e $BG = \ell\sqrt{2}$.

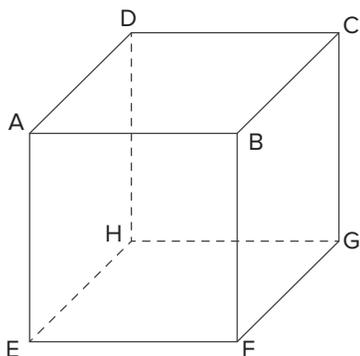
Os ângulos internos desse triângulo medem

$$med(\hat{B}) = med(\hat{G}) = 45° \text{ e } med(\hat{F}) = 90°$$

E ainda há triângulos congruentes ao triângulo AEG, que é retângulo e escaleno.

Os lados desse triângulo medem $AE = \ell$, $EG = \ell\sqrt{2}$ e $AG = \ell\sqrt{3}$. O ângulo de vértice E desse triângulo é reto $\left(med\left(\hat{E}\right) = 90°\right)$, mas seus ângulos agudos não possuem medidas notáveis em graus ou radianos. Essas medidas ficam expressas por funções trigonométricas, como:

$$\begin{cases} \hat{A} = arctg\left(\sqrt{2}\right) \\ \hat{G} = arctg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

28 Quanto mede a área do triângulo ABG, determinado pelos vértices do cubo de volume 216 cm^3, ilustrado a seguir?

A $36\sqrt{3}\ cm^2$

B $36\sqrt{2}\ cm^2$

C $18\sqrt{3}\ cm^2$

D $18\sqrt{2}\ cm^2$

E $18\ cm^2$

Resolução:

A aresta do cubo mede: $\ell = \sqrt[3]{216} = 6\ cm$.

A aresta $\overline{AB}$ é perpendicular à face do cubo que contém a diagonal $\overline{BG}$. Portanto, o triângulo ABG é retângulo no vértice B. Os catetos desse triângulo medem $AB = \ell = 6$ cm e $BG = \ell\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm.

Logo, sua área é igual a $\dfrac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}\ cm^2$.

Alternativa: **D**

29 Calcule o seno do ângulo formado por duas diagonais interiores de um cubo.

A $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

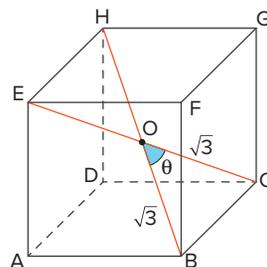
B $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C $\dfrac{1}{2}$

D $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

E $\dfrac{1}{3}$

Resolução:

Como o seno desse ângulo não depende do tamanho do cubo, pode-se estipular uma unidade de medida para a aresta deste, que, no caso, será $\ell = 2$.

Assim, as diagonais desse cubo medem $EC = BH = 2\sqrt{3}$. Como o centro O do cubo é ponto médio dessas diagonais, podemos afirmar que $OB = OC = \sqrt{3}$. Então, do teorema dos cossenos no triângulo OBC, tem-se:

$$2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\theta)$$
$$4 = 3 + 3 \quad 6\cos(\theta)$$
$$6\cos(\theta) = 6 - 4$$
$$\cos(\theta) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Substituindo esse valor na relação fundamental da trigonometria:

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Leftrightarrow sen^2(\theta) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow sen^2(\theta) = 1 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{9 \quad 1}{9} = \frac{8}{9}$$

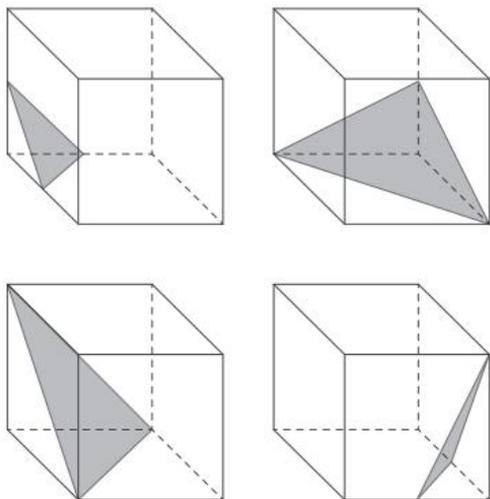
Como os senos dos ângulos internos de qualquer triângulo são estritamente positivos, tem-se que:

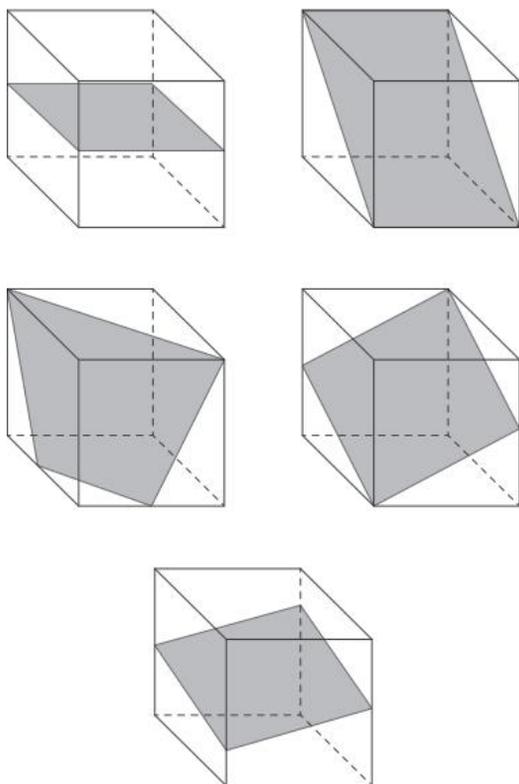
$$sen(\theta) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

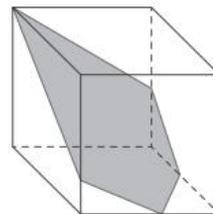
Alternativa: **A**

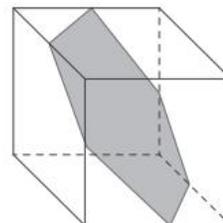
Seções do cubo

Se um plano intercepta um sólido geométrico, então a região comum ao plano e ao sólido é denominada seção plana do sólido. As seções planas dos sólidos podem assumir diversas formas e, no caso do cubo, por exemplo, podem ser triângulos, quadriláteros, pentágonos ou até hexágonos. Veja a seguir:

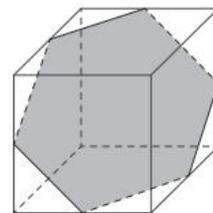
- Seções triangulares

É possível obter triângulos escalenos, isósceles ou equiláteros por meio de seções planas de um cubo, porém todos esses triângulos são acutângulos. Não é possível obter triângulos retângulos, nem obtusângulos, pelas seções planas de um cubo.

- Seções quadrangulares

Pode-se obter quadrados, retângulos trapézios, losangos e paralelogramos por meio de seções planas de um cubo.

- Seção pentagonal

Não é possível obter um pentágono regular pela seção plana de um cubo.

- Seção hexagonal

Pela seção plana de um cubo, é possível obter um hexágono regular, desde que o plano intercepte as arestas do cubo em seus respectivos pontos médios.

Exercício resolvido

30 **UPE 2018** Qual é, aproximadamente, a medida da área do hexágono regular obtido ao seccionarmos um cubo de aresta 4 cm por um plano que contém os pontos médios de seis arestas, opostas duas a duas, conforme apresentado na figura ao lado? Utilize $\sqrt{3} = 1{,}7$

A $5\ cm^2$
B $10\ cm^2$
C $20\ cm^2$
D $25\ cm^2$
E $45\ cm^2$

Resolução:

A distância entre os pontos médios de duas arestas consecutivas de um cubo é igual à metade do comprimento da diagonal do quadrado, que é face do cubo.

Assim, o lado do hexágono mede $\ell = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

Como a área de um hexágono regular equivale a 6 vezes a área de um triângulo equilátero com o mesmo lado, a área dessa seção do cubo deve medir:

$$S = 6 \cdot \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{8 \cdot 1{,}7}{4} = 20{,}4\ cm^2$$

Alternativa: **C**

FRENTE 3

Revisando

1 **Enem**

Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani

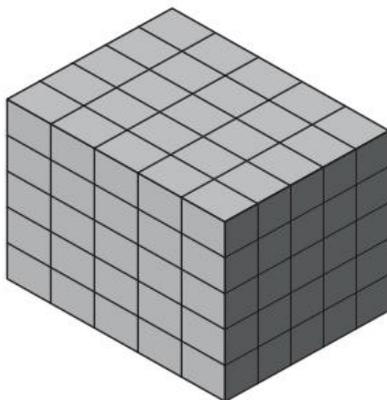
O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1 200 000 quilômetros quadrados, dos quais 840 000 quilômetros quadrados estão no Brasil O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.

Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as uni dades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros

Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2009. (Adaptado.)

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do aquífero Guarani é:

A $1{,}5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.
B $1{,}5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo
C $1{,}5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.
D $1{,}5 \times 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.
E $1{,}5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

2 **Enem 2014** Uma fábrica de rapadura vende seus produtos empacotados em uma caixa com as seguintes dimensões: 25 cm de comprimento; 10 cm de altura e 15 cm de profundidade O lote mínimo de rapaduras vendido pela fábrica é um agrupamento de 125 caixas dispostas conforme a figura

Qual é o volume do lote mínimo comercializado pela fábrica de rapaduras?

A $3750\ cm^3$
B $18750\ cm^3$
C $93750\ cm^3$
D $468750\ cm^3$
E $2343750\ cm^3$

3 **Enem 2014** O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100 foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será:

A 6
B 600
C 6 000
D 60 000
E 6 000 000

4 **Enem 2017** Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm;
- Caixa 2: 75 cm × 82 cm × 90 cm;
- Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm;
- Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm;
- Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm.

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior
A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

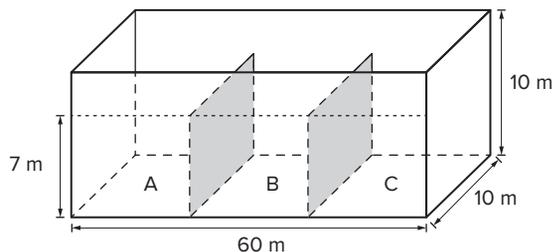
5 **UFRGS 2016** Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por

$$x, x + 4 \text{ e } x \quad 1$$

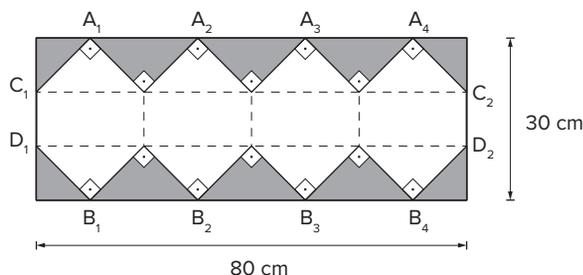
Se o volume desse paralelepípedo é 12, então as medidas das dimensões da caixa são:

A 1, 1 e 12.
B 1, 2 e 6.
C 1, 3 e 4.
D 2, 2 e 3.
E 2, 3 e 4.

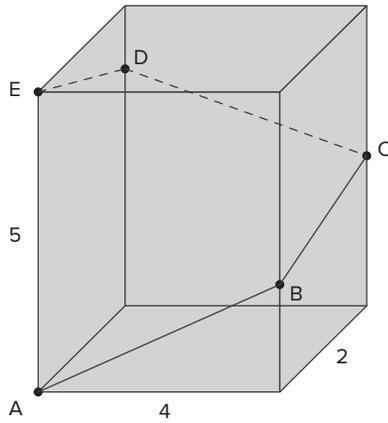
FRENTE 3

6 **Enem 2016** Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima; ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.
Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.
Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de:

A $1,4 \times 10^3$ m^3. **B** $1,8 \times 10^3$ m^3. **C** $2,0 \times 10^3$ m^3. **D** $3,2 \times 10^3$ m^3. **E** $6,0 \times 10^3$ m^3.

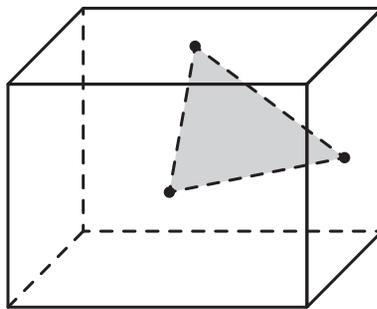
7 Para fazer uma embalagem, um pedaço de papelão retangular de 80 cm × 30 cm será recortado, dobrado e colado. A figura a seguir esboça as características do recorte, que tem o propósito de excluir os triângulos retângulos e isósceles pintados. Depois disso, serão feitas dobras sobre as linhas tracejadas, como mostra a figura.

Após recortado e dobrado, a superfície do sólido deve ser obtida ao se fazer coincidir os pontos A_1, A_2, A_3 com A_4, bem como os pontos B_1, B_2, B_3 com B_4. O ponto C_1 deve coincidir com C_2, e o ponto D_1 com D_2.

a) Faça um esboço do formato tridimensional da embalagem, indicando as medidas das suas dimensões.
b) Quanto mede a superfície exterior dessa caixa?
c) Qual é o volume, em centímetros cúbicos, e a capacidade, em litros, dessa embalagem?
d) Qual é a maior distância entre dois pontos situados na superfície dessa embalagem?

8 **ESPM 2017** Em volta do paralelepípedo retorretângulo mostrado na figura abaixo será esticada uma corda do vértice A ao vértice E, passando pelos pontos B, C e D. De acordo com as medidas dadas, o menor comprimento que essa corda poderá ter é igual a:

A 15 B 13 C 16 D 14 E 17

9 **Enem 2014** A caixa-d'água de uma casa tem a forma de um paralelepípedo retorretângulo e possui dimensões externas (comprimento, largura e altura) de, respectivamente, 4,0 m, 3,0 m e 2,5 m. É necessária a impermeabilização de todas as faces externas dessa caixa, incluindo a tampa. O fornecedor do impermeabilizante informou ao dono da casa que seu produto é fornecido em galões, de capacidade igual a 4,0 litros. Informou, ainda, que cada litro impermeabiliza uma área de 17700 cm^2 e são necessárias 3 demãos de produto para garantir um bom resultado.
Com essas informações, para obter um bom resultado no trabalho de impermeabilização, o dono da casa precisará comprar um número mínimo de galões para a execução desse serviço igual a:

A 9 B 13 C 19 D 25 E 45

10 **Unicamp 2019** Considere um paralelepípedo retângulo, cujas arestas têm comprimento 6 cm, 8 cm e 10 cm, e um triângulo cujos vértices são os centros (interseção das diagonais) de três faces de dimensões distintas, como ilustra a figura a seguir. O perímetro P desse triângulo é tal que

A $P < 14$ cm. B $14 \text{ cm} < P < 16$ cm C $16 \text{ cm} < P < 18$ cm D $p > 18$ cm

FRENTE 3

Exercícios propostos

1 Enem 2011

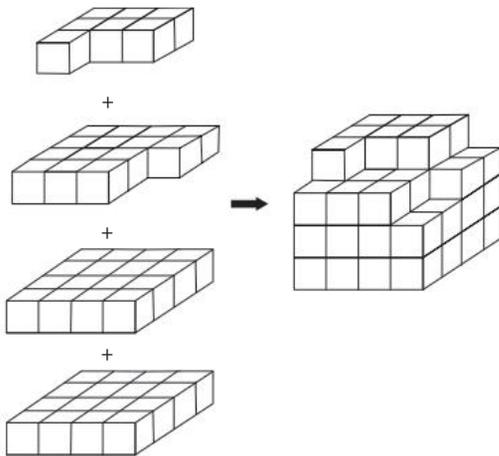
Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.

Veja. Ed. 2158, 31 mar. 2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 mL de café Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior. De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

A 8 bilhões de litros
B 16 bilhões de litros
C 32 bilhões de litros
D 40 bilhões de litros
E 48 bilhões de litros

2 Enem 2018 *Minecraft* é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.
Um jogador deseja construir um cubo com dimensões 4 × 4 × 4. Ele já empilhou alguns dos cubinhos neces sários, conforme a figura.

Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa.
O formato da peça capaz de completar o cubo 4 × 4 × 4 é:

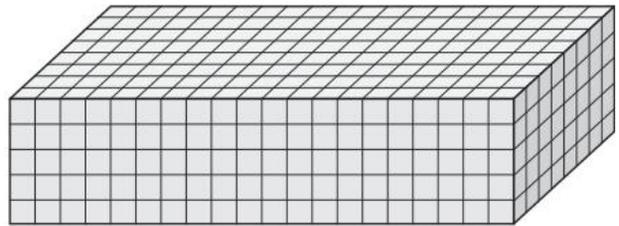
A

B

C

D

E

3 Unicamp 2012 Um queijo tem o formato de paralelepípedo, com dimensões 20 cm × 8 cm × 5 cm. Sem descascar o queijo, uma pessoa o divide em cubos com 1 cm de aresta, de modo que alguns cubos ficam totalmente sem casca, outros permanecem com casca em apenas uma face, alguns com casca em duas faces e os restantes com casca em três faces. Nesse caso, o número de cubos que possuem casca em apenas uma face é igual a:

A 360
B 344
C 324
D 368

4 Enem Uma editora pretende despachar um lote de li vros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm × 20 cm × × 30 cm. A transportadora acondicionará esses pa cotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm × 40 cm × 60 cm. A quantidade mínima neces sária de caixas para esse envio é:

A 9
B 11
C 13
D 15
E 17

5 UFPR 2017 A piscina usada nas competições de natação das Olimpíadas Rio 2016 possui as medidas oficiais recomendadas: 50 metros de extensão, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Supondo que essa piscina tenha o formato de um paralelepípedo retângulo, qual dos valores abaixo mais se aproxima da capacidade máxima de água que essa piscina pode conter?

A 37 500 litros
B 375 000 litros.
C 3 750 000 litros
D 37 500 000 litros.
E 375 000 000 litros.

6 Enem Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

A 5 cm.
B 6 cm.
C 12 cm.
D 24 cm.
E 25 cm.

7 Enem PPL 2017 Para a Olimpíada de 2012, a piscina principal do Centro Aquático de Londres, medindo 50 metros de comprimento, foi remodelada para ajudar os atletas a melhorar suas marcas. Observe duas das melhorias:

Largura das raias
Cada uma das dez raias mede 2,5 metros, conforme o padrão oficial. Nas provas finais, a primeira e a décima ficarão vazias para evitar que as ondas desfavoreçam os atletas

Profundidade 3 metros
Com essa profundidade, a água que se movimenta em direção ao fundo da piscina demora mais para retornar à superfície e não atrapalha a progressão dos nadadores

Veja, n. 2 278, jul. 2012 (adaptado).

A capacidade da piscina em destaque, em metro cúbico, é igual a

A 3750
B 1500
C 1250
D 375
E 150

8 Enem 2017 Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é:

A 11,25
B 27,00
C 28,80
D 32,25
E 49,50

9 PUC-RS 2017 Muitos prédios que estão sendo construídos em nossa cidade possuem caixas-d'água com a forma de um paralelepípedo. Um construtor quer adquirir duas delas que tenham internamente a mesma altura, mas diferindo na base, que deverá ser quadrada em ambas. A primeira deverá ter a capacidade para 16 000 litros, e a segunda para 25 000 litros. A razão entre a medida do lado da base da primeira e da segunda é:

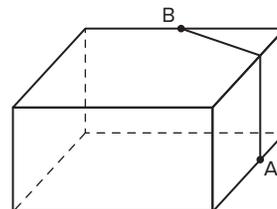
A 0,08
B 0,60
C 0,75
D 0,80
E 1,25

10 Enem 2014 Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando em casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas no aquário.

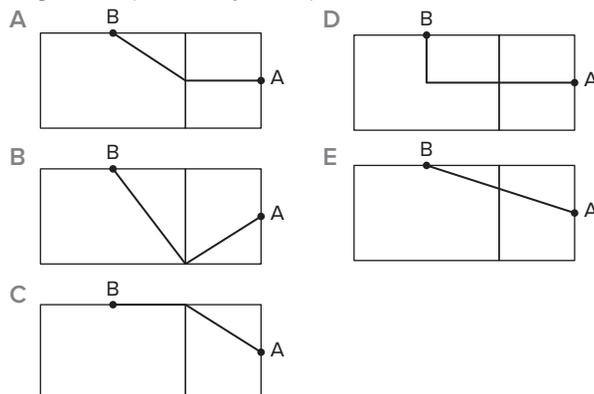
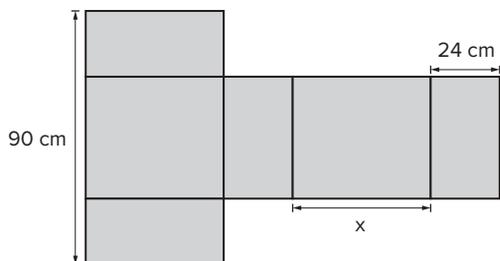
Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm do topo do aquário.

O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a:

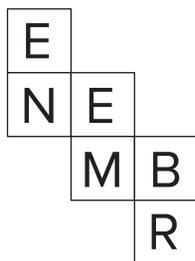
A 48
B 72
C 84
D 120
E 168

11 Enem A figura seguinte ilustra um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.

Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

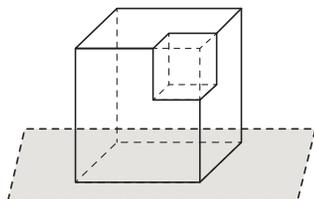
O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

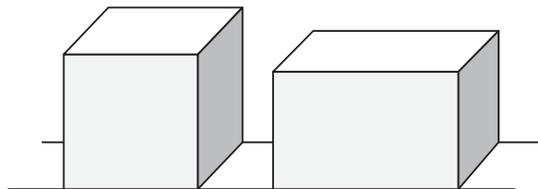
FRENTE 3

12 **Enem 2014** Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.

O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é:

A 25
B 33
C 42
D 45
E 49

13 **Enem PPL 2012** Em uma aula de matemática, a professora propôs que os alunos construíssem um cubo a partir da planificação em uma folha de papel, representada na figura a seguir.

Após a construção do cubo, apoiou-se sobre a mesa a face com a letra M.
As faces paralelas deste cubo são representadas pelos pares de letras:

A E-N, E-M e B-R.
B B-N, E-E e M-R.
C E-M, B-N e E-R.
D B-E, E-R e M-N.
E E-N, B-M e E-R.

14 **UPE 2017** Um sólido foi construído removendo-se um cubo menor de um cubo maior, como mostra a figura a seguir. Se a diferença entre as medidas das arestas dos dois cubos é de 4 cm e a medida do volume do sólido é 208 cm^3, qual a medida da área lateral da superfície do sólido?

A 136 cm^2
B 144 cm^2
C 160 cm^2
D 204 cm^2
E 216 cm^2

15 **Unifesp** Um cubo de aresta de comprimento a vai ser transformado num paralelepípedo retorretângulo de altura 25% menor, preservando-se, porém, o seu volume e o comprimento de uma de suas arestas

A diferença entre a área total (a soma das áreas das seis faces) do novo sólido e a área total do sólido original será:

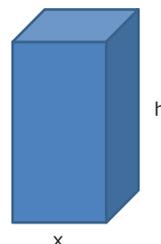
A $\frac{1}{6}a^2$

B $\frac{1}{3}a^2$

C $\frac{1}{2}a^2$

D $\frac{2}{3}a^2$

E $\frac{5}{6}a^2$

16 **PUC-PR 2017** Considere uma caixa de leite na forma de um paralelepípedo de base quadrada, cujo volume é de 1 litro. O custo de fabricação da tampa e da base da caixa é de R$ 4,00 por cm^2, e o das faces laterais é de R$ 2,00 por cm^2; considere desprezível o custo da tampinha de plástico. Determine uma função C(x) que expresse o custo de fabricação da caixa em função da aresta da base que vale x.

A $C(x)=8\left(x^2+\frac{1000}{x}\right)$

B $C(x)=8\left(x^2+\frac{1000}{x^2}\right)$

C $C(x)=4\left(x^2+\frac{1000}{x^2}\right)$

D $C(x)=4x^2+2x$

E $C(x)=4x+2$

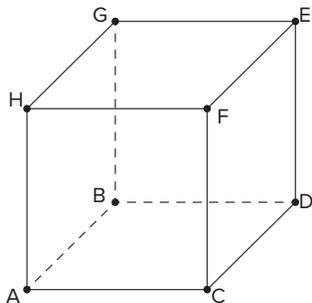
17 **Unicamp 2017** Um paralelepípedo retângulo tem faces de áreas 2 cm², 3 cm² e 4 cm². O volume desse paralelepípedo é igual a:

A $2\sqrt{3}$ cm³.

B $2\sqrt{6}$ cm³.

C 24 cm³.

D 12 cm³.

18 **UFRGS 2018** Uma partícula parte do ponto A e chega ao ponto H percorrendo a poligonal ABCDEFGH no cubo de aresta unitária, representado na figura abaixo

A distância percorrida pela partícula é:

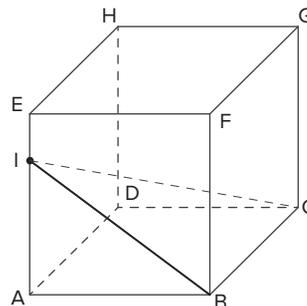
A 1

B $\sqrt{2}$.

C 7

D $5+2\sqrt{2}$.

E $5+2\sqrt{3}$

19 **PUC-RS 2017** No cubo abaixo, de aresta igual a 8, o segmento $\overline{EI}$ mede a quarta parte do segmento $\overline{AE}$

A área do triângulo BCI é igual a:

A 24

B 36

C 40

D 48

E 80

20 **Uefs 2018** Um cubo de isopor foi cortado em dois paralelepípedos retorretângulos congruentes, cada um com área total igual a 144 cm². A medida da aresta desse cubo é:

A 6 cm.

B 8 cm

C 12 cm.

D 18 cm

E 24 cm.

Texto complementar

Bonaventura Cavalieri e algumas de suas ideias

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão por volta de 1598 Foi membro de uma ordem religiosa (os Jesuados) No ano de 1616, ele foi para Pisa, onde estudou Filosofia e Teologia. Conheceu o padre Benedito Castelli (1577-1644) que o apresentou a Galileu (1564-1642), do qual veio a tornar--se discípulo. Em 1629, foi indicado à cadeira de professor em Bolonha. Ocupou esse cargo até sua morte, em 1647 [ ]. Podemos dizer que esse intelectual foi um padre e estudioso da Matemática, tendo estudado e publicado vasto material em Matemática pura e aplicada. Dentre os assuntos em que ele trabalhou podemos citar: geometria, trigonometria, astronomia. Ele é considerado como um dos responsáveis pela introdução dos logaritmos na Europa [ ] Em 1632, Cavalieri apresentou seu livro *Directorium universale uranometricum*, onde publicou tabelas de seno, tangentes e secantes, junto com seus logaritmos, até oito casas.

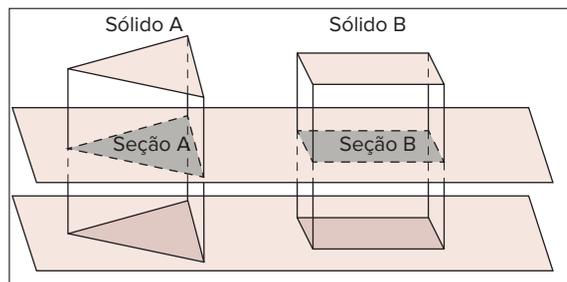
Durante o ano de 1635, Cavalieri apresentou a primeira versão da obra que lhe deu muito destaque, a famosa *Geometria indivisibilibus continuorum*. Nesse trabalho, ele apresenta seu método dos indivi síveis. Em seu livro de *Introdução à História da Matemática*, o autor Howard Eves, diz que o método dos indivisíveis de Cavalieri tem raízes que remontam a Demócrito e Arquimedes, mas cuja motivação direta, talvez, se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes

Segundo Boyer, o autor diz que na obra dos indivisíveis de Cavalieri, o argumento em que ele se baseia é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu, que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que volume pode ser conside rado como composto de áreas que são volumes indivisíveis.

[...] Cavalieri entendia por indivisível [...] de uma porção plana é uma corda dessa porção e, um indivisível de um sólido dado é uma seção desse sólido Podemos considerar que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de seções planas paralelas.

As ideias desenvolvidas por Cavalieri, deram origem a dois princípios, denominados princípios de Cavalieri, um relativo ao cálculo de áreas e o outro que é muito utilizado para o cálculo de volumes. [ ]

O princípio de Cavalieri para volumes

[ ] Considere dois sólidos A e B. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas, tais que a razão entre suas áreas é uma constante, então a razão entre os volumes V(A) e V(B) é essa constante.

Princípio de Cavalieri.

O princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas, para isso, devemos comparar as áreas das seções obtidas nos sólidos por planos paralelos ao plano das suas bases, sendo que esses sólidos deverão ter mesma altura e devem ser considerados apoiados sobre o mesmo plano. Se a razão entre as áreas de seções correspondentes é constante, então a razão entre os volumes dos sólidos considerados é essa mesma constante. Esse fato nos leva a entender que, se as áreas das seções correspondentes são iguais, os sólidos têm o mesmo volume.

PRIMO, Márcio Eduardo. *O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora Juiz de Fora, 2013 p. 20-2

Resumindo

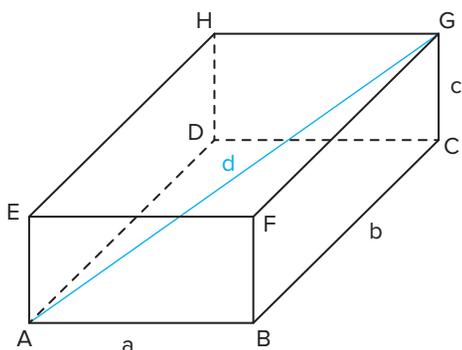
Unidades de volume e capacidade

$1\ m^3$ equivale a 1 000 L	1 L equivale a $1\ dm^3$	1 L equivale a $1\,000\ cm^3$	1 mL equivale a $1\ cm^3$

Teorema da razão de semelhança no espaço

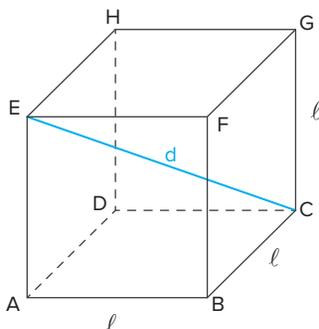
Se dois sólidos geométricos são semelhantes um ao outro e k é a razão dessa semelhança, então:

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{comprimento}'} = k \qquad \frac{\text{área}}{\text{área}'} = k^2 \qquad \frac{\text{volume}}{\text{volume}'} = k^3$$

Paralelepípedo retorretângulo

Volume: $V = a \cdot b \cdot c$

Área total: $A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Diagonal: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cubo

Volume: $V = \ell^3$

Área total: $A_{total} = 6\ell^2$

Diagonal: $d = \ell\sqrt{3}$

Quer saber mais?

Sites

- Unidades de medida: volume e capacidade

  Disponível em: <https://blogdoenem.com.br/volume-capacidade-matematica-enem>.

- Distância entre pontos no espaço

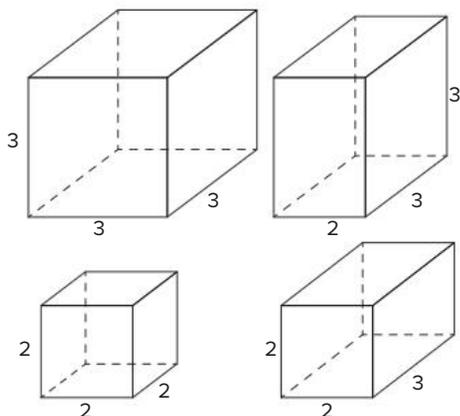
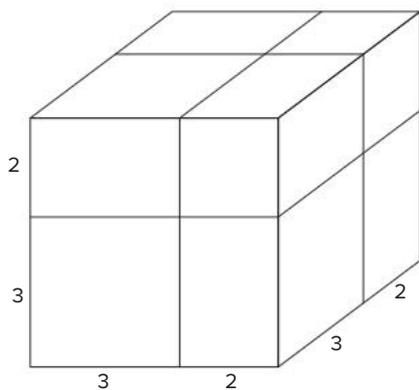
  Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/distancia-entre-dois-pontos-no-espaco.htm>.

- Seções de um cubo

  Disponível em: <www.casadasciencias.org/cc/redindex.php?idart=303&gid=39258701>.

Exercícios complementares

1 UFJF 2017 Um quebra-cabeça tem 8 peças, sendo:

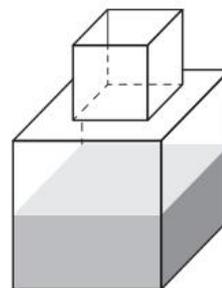
– 01 peça cúbica com 2 cm de lado;
– 01 peça cúbica com 3 cm de lado;
– 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas 2 cm × 2 cm × 3 cm;
– 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas 3 cm × 3 cm × 2 cm.

Além disso, o quebra-cabeça montado é um cubo 5 × 5 × 5 conforme ilustração abaixo

Se pintarmos todas as faces do cubo montado, após desmontá-lo podemos afirmar que as peças:

A cúbicas totalizam 5 faces não pintadas.
B cúbicas totalizam 5 faces pintadas.
C 2 × 2 × 3 totalizam 16 cm^2 de área de faces não pintadas.
D 3 × 3 × 2 totalizam 63 cm^2 de área de faces não pintadas.
E não cúbicas totalizam 15 faces não pintadas.

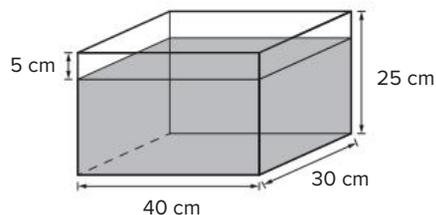
2 Enem 2015 Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consis tência cremosa

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar. O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

A 450
B 500
C 600
D 750
E 1000

3 Enem 2014 Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

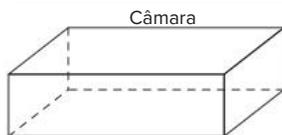
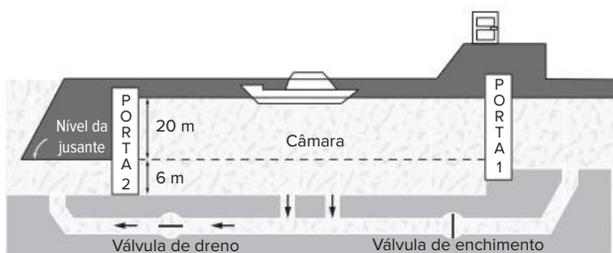
A 8
B 10
C 16
D 18
E 24

4 Enem 2012 Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.

O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2400 cm^3?

A O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
B O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
C O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
D O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
E O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

5 **Enem** Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1 m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte. Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?

A 10 viagens
B 11 viagens
C 12 viagens.
D 24 viagens
E 27 viagens

6 **Enem** Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do rio Paraná até o nível da jusante.

Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

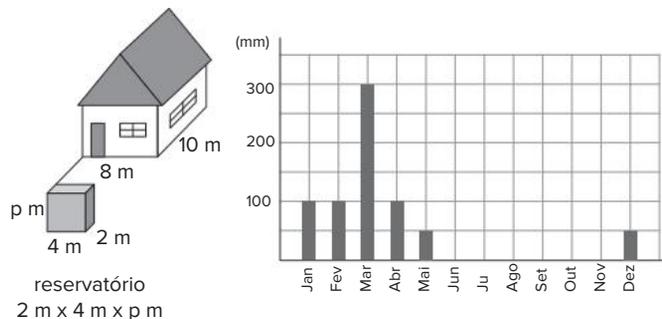
A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4200 m^3 por minuto Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embar cação leva cerca de

A 2 minutos
B 5 minutos
C 11 minutos.
D 16 minutos.
E 21 minutos.

7 **UPE/SSA 2018** Um engenheiro construiu uma piscina em formato de bloco retangular a qual mede 7 m de comprimento, 4 m de largura e 1,5 m de profundidade. Após encher a piscina completamente, o engenheiro abriu um ralo que tem a capacidade de esvaziá-la à razão de 20 litros por minuto. Utilizando esse ralo, em quanto tempo o nível da água dessa piscina vai baixar em 10 centímentros?

A 40 minutos.
B 1 hora e 40 minutos.
C 1 hora e 58 minutos
D 2 horas e 20 minutos
E 2 horas e 46 minutos.

8 **Enem** Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período anual chuvoso.

As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.

Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade (p) do reservatório deverá medir

A 4 m.
B 5 m
C 6 m
D 7 m
E 8 m

9 **Enem PPL 2012** Em um terreno, deseja-se instalar uma piscina com formato de um bloco retangular de altura 1 m e base de dimensões 20 m × 10 m. Nas faces laterais e no fundo desta piscina será aplicado um líquido para a impermeabilização. Esse líquido deve ser aplicado na razão de 1 L para cada 1 m^2 de área a ser impermeabilizada. O fornecedor A vende cada lata de impermeabilizante de 10 L por R$ 100,00, e o B vende cada lata de 15 L por R$ 145,00.

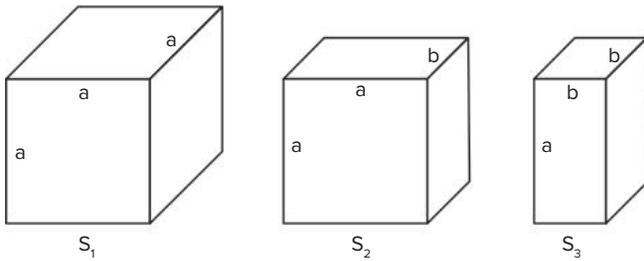
Determine a quantidade de latas de impermeabilizante que deve ser comprada e o fornecedor a ser escolhido, de modo a se obter o menor custo.

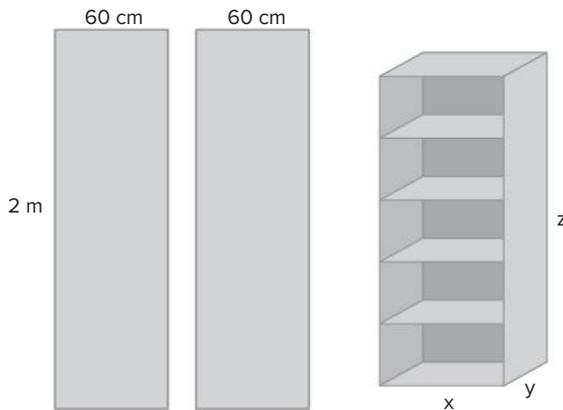
A Fabricante A, 26 latas.
B Fabricante A, 46 latas
C Fabricante B, 17 latas.
D Fabricante B, 18 latas.
E Fabricante B, 31 latas

10 **UEPG 2016** Três cubos idênticos foram colados entre si formando um paralelepípedo, cuja área total vale 350 cm^2. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01 O volume do paralelepípedo é 475 cm^3.
02 A área total de cada cubo é 150 cm^2.
04 O volume de cada cubo é 125 cm^3.
08 A soma das arestas do paralelepípedo é 80 cm.

Soma:

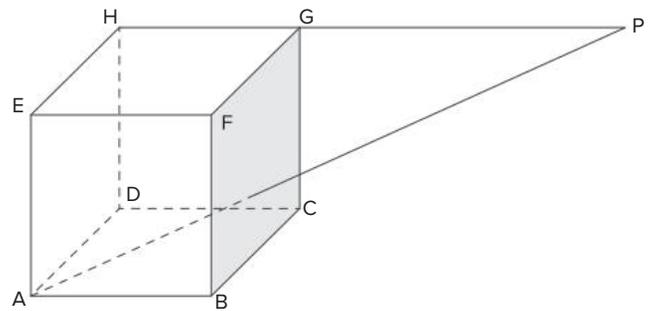
11 **Unicamp 2016** Considere os três sólidos exibidos na figura abaixo, um cubo e dois paralelepípedos retângulos, em que os comprimentos das arestas, a e b, são tais que $a > b > 0$.

a) Determine a razão $r = \frac{a}{b}$ para a qual o volume de S_1 é igual à soma dos volumes de S_2 e S_3.
b) Sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas dos três sólidos é igual a 60 cm, determine a soma das áreas de superfície dos três sólidos.

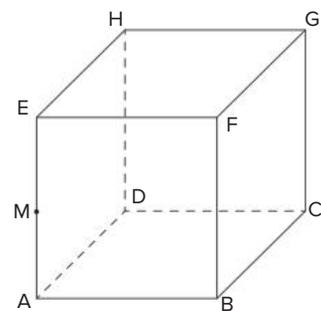
12 **ESPM 2018** Um marceneiro dispunha de 2 placas de madeira iguais, medindo 60 cm por 2 m Sem sobre por as placas, ele fez exatamente 7 cortes retilíneos, dividindo-as em peças retangulares, com as quais construiu a estante mostrada ao lado, sem sobra al guma de material

Supondo desprezíveis as espessuras dos cortes e das placas, podemos afirmar que o volume $V = x \cdot y \cdot z$ ocupado pela estante, em cm^3 é igual a:
A 264 000
B 176 000
C 198 000
D 236 000
E 218 000

13 **UEG 2016** Alterando-se as dimensões de uma caixa retangular de altura h, as dimensões da base serão multiplicadas por k e as da altura somado k, em que k é uma constante positiva e não nula. Logo, verifica se que o volume da nova caixa será em relação à anterior

A k^3 vezes maior
B $k^2 + kh$ vezes maior
C $k^2 + \frac{k^3}{h}$ vezes maior.
D $k^3 + \frac{\sqrt{h}}{k}$ vezes maior.

14 **IFSul 2016** Um tanque vazio, com formato de paralelepípedo retorretângulo, tem comprimento de 8 metros, largura de 3 metros e altura de 1,5 metros. Esse tanque é preenchido com óleo a uma vazão de 1000 litros a cada 15 minutos.
Nesse sentido, após duas horas do início do preenchimento, a altura de óleo no interior do tanque atingirá, aproximadamente,
A 24 cm.
B 33 cm.
C 1,05 m.
D 1,15 m.

15 **UPE 2018** Na figura representada a seguir, em que o segmento GP mede 6 cm, e o ângulo $A\hat{P}H$ tem tangente igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}$, qual é o volume do cubo ABCDEFGH?

A 6 cm^3.
B 8 cm^3.
C 27 cm^3.
D 64 cm^3.
E 125 cm^3.

16 **Fuvest** O cubo de vértices ABCDEFGH, indicado na figura, tem arestas de comprimento a Sabendo-se que M é o ponto médio da aresta $\overline{AE}$, então a distância do ponto M ao centro do quadrado ABCD é igual a

A $\frac{a\sqrt{3}}{5}$
B $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
C $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
D $a\sqrt{3}$
E $2a\sqrt{3}$

17 **UFJF 2017** Gui ganhou um aquário em forma de paralelepípedo retangular, e quer enchê-lo com 640 mL de água. Gui resolveu colocar o aquário em cima da mesa. Ao apoiar a face A em cima da mesa, a água atingiu altura de 4 cm. Ao apoiar a face B em cima da mesa, a altura que a água atingiu foi de 8 cm. Ao colocar a face C em contato com a mesa, a água atingiu a altura de 10 cm.

a) Determine as medidas das dimensões do aquário.

b) Determine a medida da área da menor face do aquário.

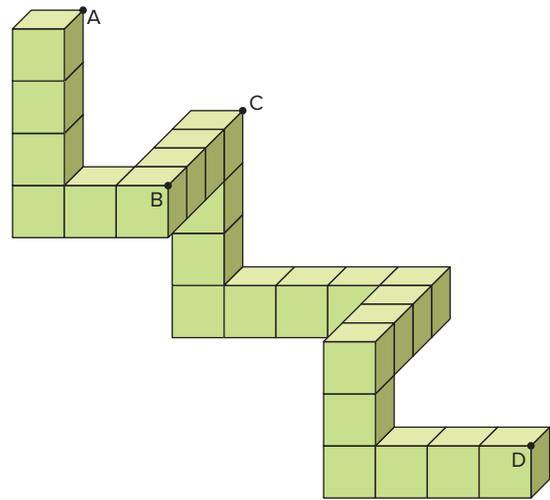
c) Determine a medida do volume do aquário, em litros.

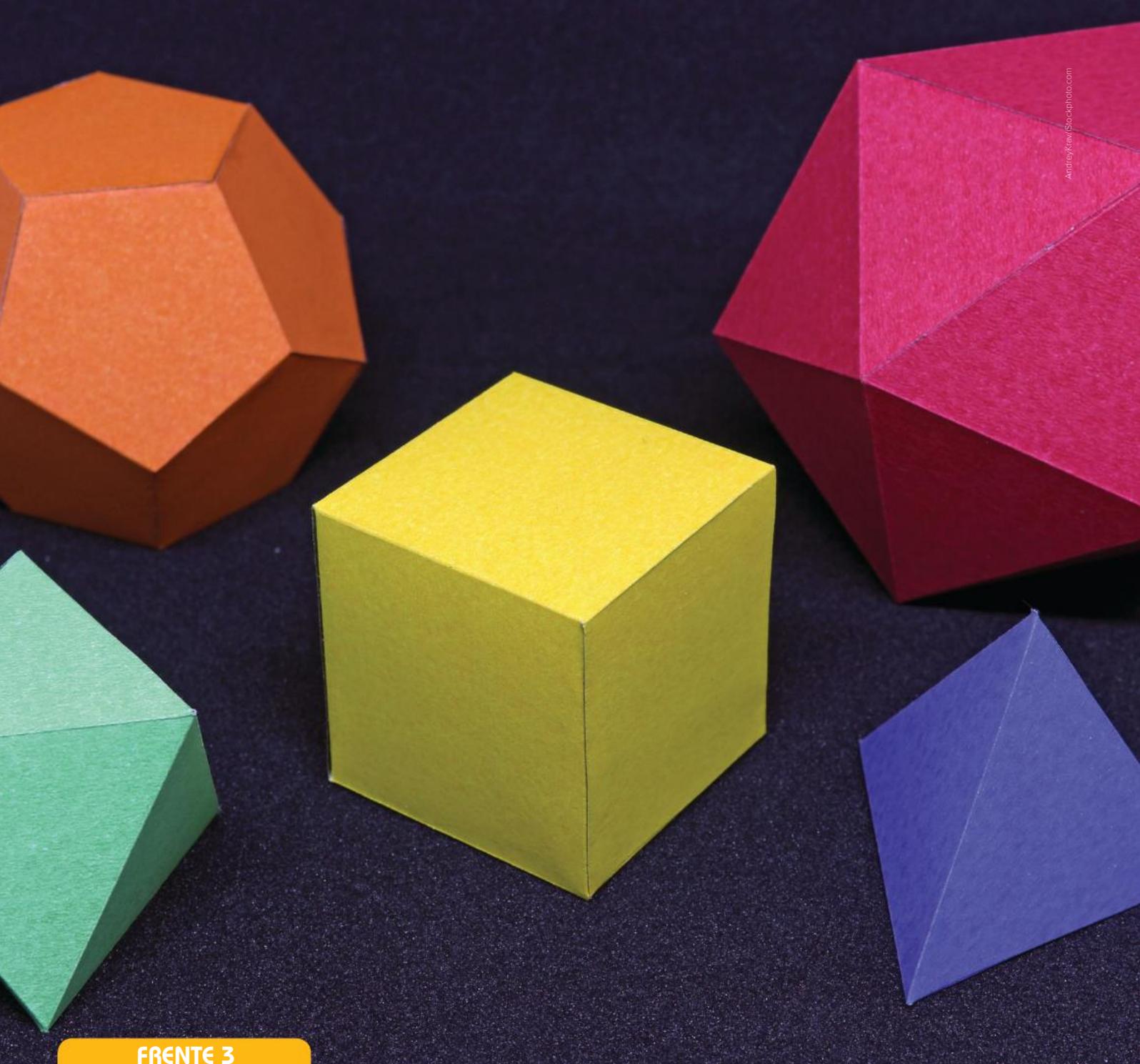
18 **EsPCEx 2015** As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a 48 cm. Então a medida de sua área total, em cm^2, é:

A 752
B 820
C 1024
D 1302
E 1504

19 **IME 2018** Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 cm^2. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

A $\sqrt{17}$ cm
B $\sqrt{19}$ cm
C $\sqrt{21}$ cm
D $2\sqrt{7}$ cm
E $\sqrt{29}$ cm

20 **Unifesp 2017** Um sólido é formado por 24 cubos idênticos, conforme a figura. O contato entre dois cubos contíguos sempre se dá por meio da sobreposição perfeita entre as faces desses cubos. Na mesma figura também estão marcados A, B, C e D, vértices de quatro cubos que compõem o sólido.

a) Admitindo-se que a medida de $\overline{AB}$ seja $2\sqrt{7}$ cm, calcule o volume do sólido.

b) Calcule a medida de $\overline{CD}$ admitindo-se que a medida da aresta de cada cubo que compõe o sólido seja igual a 2 cm.

CAPÍTULO

13

Poliedros

Após estudar paralelepípedos e cubos detalhadamente, vamos conhecer outros tipos de sólidos que também são delimitados por faces planas, como os prismas, as pirâmides e outros poliedros.

Poliedros

Qualquer sólido geométrico cercado exclusivamente por superfícies planas é denominado poliedro. A palavra, que vem do grego antigo, é a junção de "*poli*", que significa muitos, e "*hedros*", que significa planos

Alguns poliedros são abertos, como os diedros (dois planos) e os triedros (três planos), que já estudamos. Embora também existam poliedros abertos formados por mais de três planos, o foco deste capítulo será o estudo dos poliedros fechados, ou seja, aqueles cuja superfície cerca completamente uma região do espaço e, portanto, são dotados da grandeza do volume

Métrica dos poliedros fechados

Poliedros fechados são formas geométricas compostas de **vértices**, **arestas** e **faces**. Cada vértice de um poliedro possui, no mínimo, três medidas angulares. A cada aresta, que pertence a duas faces que determinam um ângulo die dro, além do comprimento, podemos associar uma medida angular. Cada face é um polígono que possui ângulos internos, perímetro, diagonais (se não for uma face triangular) e, principalmente, área.

O conjunto de todas as faces de um poliedro determina o que chamamos de superfície Esta também possui uma área, que denominamos **área total**. Assim, a área total de um poliedro equivale à soma das áreas de todas as suas faces.

Sendo $A_F = (A_1, A_2, A_3, \ \ )$ a sucessão dos valores das áreas de cada face de um poliedro fechado, a área total desse poliedro é expressa por:

$$A_{total} = \sum A_F = A_1 + A_2 + A_3 +$$

Em alguns tipos de poliedros, como as pirâmides e os prismas, uma ou mais faces (poligonais) podem ser chamadas de base ou bases. As pirâmides, por exemplo, possuem apenas uma base; os prismas possuem duas bases com mesma área; e os troncos de pirâmide pos suem duas bases com áreas diferentes. Nesses casos, sobre a superfície do poliedro, podem ser definidas as seguintes áreas:

Área da base	Área lateral	Área total

A área total de um poliedro é definida como a soma das áreas laterais (todas as faces que não são bases) com a área das bases (ou da base, quando for o caso)

Por fim, todo poliedro fechado possui volume.

Exercício resolvido

1 Uma caixa de madeira tem o formato de um poliedro aberto cuja base é um hexágono regular de lado 20 cm e as faces laterais são retângulos com 10 cm de altura.

Usando $\sqrt{3} = 1{,}73$, encontre os valores aproximados:

a) da área da base da caixa.
b) da área da superfície lateral exterior da caixa.
c) da área total da superfície exterior da caixa.

Resolução:

a) A área de um hexágono regular de lado ℓ é dada por $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$, assim, como $\ell = 20$ cm, a base do poliedro tem uma área de:

$$\frac{3 \cdot 20^2\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3} = 600 \cdot 1{,}73 = 1038 \text{ cm}^2$$

b) A área da face lateral desse poliedro mede:

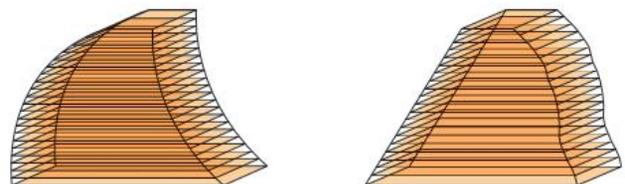
$$20 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2$$

Então, como o poliedro possui seis faces laterais congruentes, sua área lateral é de $6 \cdot 200 = 1200 \text{ cm}^2$.

c) Como a caixa é um poliedro aberto com apenas uma base:

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 1200 + 1038 = 2\,238 \text{ cm}^2$$

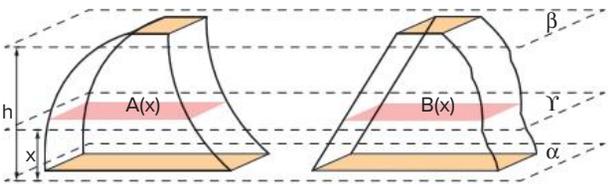
Princípio de Cavalieri no espaço

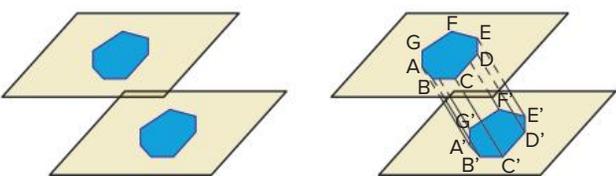
Outra ideia presente no pensamento de Eudoxo e Ar quimedes, formalizada como conhecemos atualmente pelo trabalho do matemático italiano Bonaventura Cavalieri, é a de que porções limitadas do espaço podem ser cobertas por uma infinidade de figuras planas paralelas postas umas sobre as outras.

De acordo com o princípio de Cavalieri, dadas duas regiões espaciais inscritas em um mesmo par de planos paralelos α e β, sendo V_1 e V_2 seus respectivos volumes, temos que:

- Se todo plano γ paralelo a α e β que intercepta as duas regiões determinar seções planas de mesma área, então essas duas regiões terão o mesmo volume

$$A(x) = B(x) \Rightarrow V_1 = V_2$$

- Se todo plano γ paralelo a α e β que intercepta as duas regiões determinar seções planas cujas áreas estão em uma razão constante, então os volumes dessas duas regiões também estarão nessa razão.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = k \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = k$$

Prismas

Considere dois polígonos congruentes que pertençam a planos paralelos e estabeleça uma correspondência entre os pontos que os definem. Se os segmentos de reta que unem cada par de pontos correspondentes forem paralelos uns aos outros, o formato geométrico determinado por esses segmen tos, junto aos polígonos tomados, será denominado **prisma**.

Um prisma possui duas bases e algumas faces laterais Os dois polígonos congruentes situados em planos paralelos são as bases do prisma. O número de lados dos polígonos que são as bases do prisma será designado por *n*. Assim, no caso apresentado, n = 7; isso significa que as bases do prisma são heptagonais.

O número de lados das bases dos prismas permite classificá-los em diversas categorias distintas:

Tipo de prisma	Número de lados das bases	Imagem possível
Prisma triangular	n = 3	
Prisma quadrangular	n = 4	
Prisma pentagonal	n = 5	
Prisma hexagonal	n = 6	

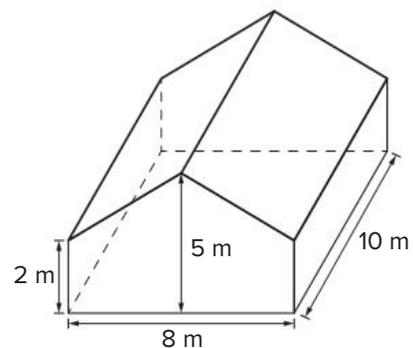
Os elementos de um prisma que não pertencem aos planos das bases são chamados de laterais. Por isso, as arestas paralelas que ligam os vértices de uma base a outra são chamadas de arestas laterais do prisma, e os paralelogramos determinados por essas arestas denominados faces laterais do prisma.

! Atenção

Para determinar se um poliedro é ou não um prisma, devemos verificar as seguintes condições:

- A existência de dois polígonos congruentes opostos um ao outro.
- O paralelismo entre os planos que contém esses dois polígonos (bases).
- O paralelismo entre as arestas laterais

Exercício resolvido

2 A figura a seguir representa o projeto para a construção de um galpão, dotado de simetria bilateral, que ocupará um terreno retangular de 8 m por 10 m.

Sabendo que, depois de construído, o galpão terá o formato de um prisma reto, responda às seguintes perguntas:

a) Que altura terá o galpão?

b) Que altura terá o prisma que dá forma ao galpão?

Resolução:

a) De acordo com a figura, o galpão terá 5 m de altura na parte mais alta e 2 m de altura nas regiões próximas às suas paredes laterais

b) Como as bases do prisma são os pentágonos e a altura de um prisma equivale à distância entre es sas bases, de acordo com a figura, o prisma que dá forma ao galpão terá 10 m de altura.

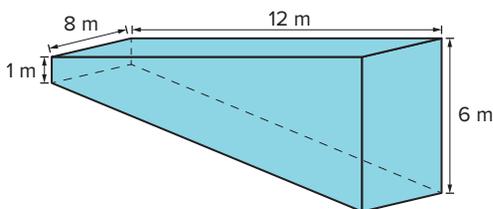
Os **prismas quadrangulares** também são chamados de **hexaedros**, por terem exatamente seis faces, e de **paralelepípedos**, quando todas essas faces são paralelogramos.

Os paralelogramos são os únicos tipos de prismas cujo qualquer par de faces opostas pode ser considerado como o par de bases do prisma

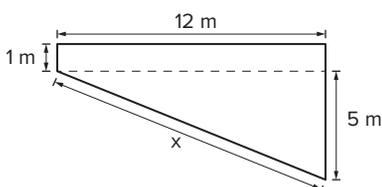
Quando houver, em um hexaedro, faces que não são paralelogramos (sendo trapézios, por exemplo), estas deverão ser consideradas bases do prisma.

Em prismas que possuem um número de faces dife rente de seis, sempre há um par de faces opostas que não possuem quatro lados, sendo, por exemplo, triangulares ou hexagonais. Nesses casos, as faces não quadrangulares devem ser consideradas bases do prisma.

Exercício resolvido

3 O hexaedro a seguir representa o formato de uma piscina de mergulho com 8 m de largura por 12 m de comprimento e profundidade variando de 1 m na parte rasa a 6 m na parte funda.

Sabendo que, uma vez cheia, a água dentro dessa piscina assume o formato de um prisma reto, calcule o perímetro da base desse prisma.

Resolução:

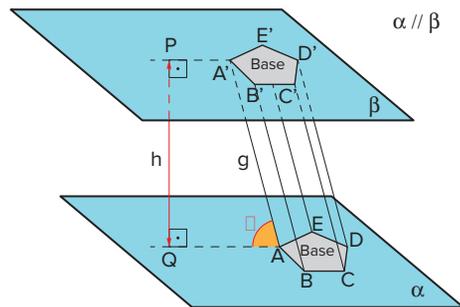
A base do prisma formado pela piscina é o trapézio retângulo, representado pela figura a seguir:

Traçando uma reta paralela ao lado de 12 m, dividimos o trapézio em duas figuras: um retângulo de $1 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ e um triângulo retângulo de catetos 12 m e 5 m.

Sendo *x* a medida da hipotenusa desse triângulo, do teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 12^2 + 5^2, \text{ com } x > 0, \text{ logo } x = 13 \text{ m}$$

Portanto, o perímetro da base do prisma mede: $1 + 12 + 6 + 13 = 32$ m.

Inclinação e altura

Considere um prisma de bases ABCDE e A'B'C'D'E', respectivamente contidas nos planos paralelos α e β.

Os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ são denominados arestas laterais do prisma, uma vez que não estão contidos nos planos de suas bases

Sobre as arestas laterais de um prisma, sabe-se que:

- Têm o mesmo comprimento:

$$AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$$

- São paralelas:

$$AA' // BB' // CC' // DD' // EE'.$$

Por serem paralelas entre si, as arestas laterais de um prisma formam ângulos de mesma medida com os planos que contêm as bases dele. A medida θ desses ângulos é denominada inclinação do prisma

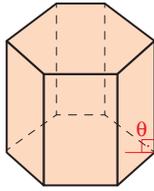
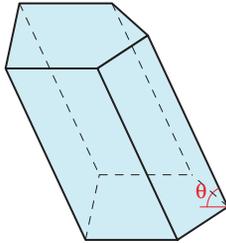
$$\theta = med(\alpha\widehat{A}A')$$

O valor da inclinação de um prisma permite classificá-lo em duas categorias distintas: prismas retos ou prismas oblíquos.

Os prismas retos possuem 90° de inclinação, e os prismas oblíquos não.

Tipo de prisma	Inclinação
Prisma reto	$\theta = 90^{\circ}$
Prisma oblíquo	$\theta \neq 90^{\circ}$

Assim, os prismas devem ser classificados considerando o número de lados de suas bases e o valor de sua inclinação.

Um **prisma hexagonal reto**, por exemplo, possui hexágonos como bases e inclinação de 90°

Já um **prisma pentagonal oblíquo** possui pentágonos como bases e inclinação diferente de 90°.

A altura de um prisma tem medida **h** que coincide com a distância entre os planos onde estão localizadas as bases do prisma.

$$h = d(\alpha, \beta)$$

Essa altura também pode ser calculada multiplicando o comprimento de uma aresta lateral pelo seno do ângulo de inclinação do prisma.

$$h = AA' \cdot \text{sen}(\theta)$$

Como o seno de 90° é unitário, as alturas dos prismas retos coincidem com os comprimentos de suas arestas laterais: $h = AA'$.

Exercícios resolvidos

4 Qual a altura de um prisma triangular oblíquo com 45° de inclinação cujas arestas laterais medem 8 cm e os lados da base medem 2 cm?

A $4\sqrt{3}$ cm.

B $4\sqrt{2}$ cm.

C 4 cm.

D $2\sqrt{2}$ cm.

E 2 cm.

Resolução:

$$h = 8 \cdot \text{sen}\,45^{\circ} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Observação: o comprimento dos lados da base não interfere no valor da altura do prisma.
Alternativa: **B**

5 As chamadas Puerta de Europa, também conhecidas como Torres KIO, são duas torres inclinadas, uma contra a outra, situadas na Praça de Castilla, em Madrid, na Espanha. Veja uma delas na foto a seguir.

fotoVoyager/iStockphoto.com

Sabe-se que as torres têm 15° de inclinação com a vertical e que suas arestas laterais têm, aproximadamente, 120 m de comprimento. Então, usando sen 15° = = 0,26 e cos 15° = 0,96, pode se concluir que as torres têm uma altura aproximada de:

A 96 m.

B 102 m.

C 106 m.

D 110 m

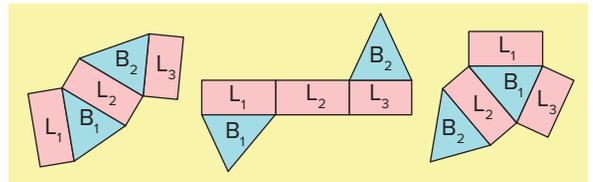
E 115 m.

Resolução:

Como a inclinação de 15° é com a vertical, temos: $h = 120 \cdot \cos 15^{\circ} \cong 120 \cdot 0{,}96 = 115{,}2$ m
Alternativa: **E**

Planificações dos prismas

As planificações de um prisma são figuras geométricas planas formadas pela justaposição de polígonos congruentes às faces do prisma.

As figuras a seguir, formadas por três retângulos e dois triângulos congruentes, são possíveis planificações de um mesmo prisma triangular reto, por exemplo.

Planificações como essas permitem que todas as faces do prisma sejam observadas simultaneamente para que se compreendam melhor as relações entre as áreas da superfície desse tipo de sólido.

Sendo $L_i = (L_1, L_2, L_3, \ \ )$ a sucessão das áreas das faces laterais de um prisma e B_1 e B_2 as áreas das demais faces, sobre a superfície desse prisma, temos que:

Área da base: $B_1 = B_2$

Área lateral: $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$

Área total: $2 \cdot (\text{Área da base}) + (\text{Área lateral})$

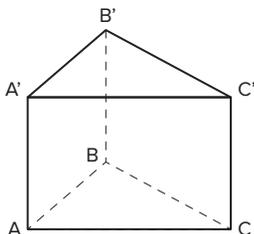
Exercícios resolvidos

6 Calcule, em metros quadrados, a área lateral de um prisma reto com 20 cm de altura cuja base é o triângulo retângulo ABC de catetos AB = 30 cm e AC = 40 cm.

A 2600 m^2.
B 2400 m^2.
C 26 m^2.
D 24 m^2.
E 0,24 m^2.

Resolução:

Do teorema de Pitágoras, temos que o lado $\overline{BC}$, que é a hipotenusa da base ABC desse prisma triangular reto, mede:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 30^2 + 40^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow BC^2 = 2500 \text{ com } BC > 0 \Rightarrow BC = 50 \text{ cm}$$

Sendo A', B' e C' os vértices da outra base do prisma de modo que as arestas laterais sejam $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, como se trata de um prisma reto, sua altura tem o mesmo comprimento dessas arestas laterais:

$$h = AA' = BB' = CC' = 20 \text{ cm}$$

As faces laterais do prisma são:

- o retângulo ABB'A' de área: $AB \cdot h = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$.
- o retângulo ACC'A' de área: $AC \cdot h = 40 \cdot 20 = 800 \text{ cm}^2$.
- o retângulo BCC'B' de área: $BC \cdot h = 50 \cdot 20 = 1000 \text{ cm}^2$.

Portanto, a área lateral do prisma mede:

$600 + 800 + 1000 = 2400 \text{ cm}^2$.

Fazendo a conversão de unidades:

$$2400 \text{ cm}^2 = 2400 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 = 2400 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0{,}24 \text{ m}^2$$

Alternativa: **E**

7 Calcule, em centímetros quadrados, a área total do mesmo prisma da questão anterior

A 3600 cm^2.
B 2400 cm^2.
C 36 cm^2.
D 24 cm^2.
E 0,24 cm^2.

Resolução:

As bases desse prisma são triângulos retângulos cujos catetos medem 30 cm e 40 cm, portanto a área de cada base é igual a $\frac{30 \cdot 40}{2} = 600 \text{ cm}^2$.

Como a área lateral do prisma é de 2400 cm^2 e prismas são dotados de duas bases congruentes, a área total do sólido é igual a $2 \cdot 600 + 2400 = 3600 \text{ cm}^2$.

Alternativa: **A**

8 A base de um prisma reto é um pentágono regular com 1,2 m de lado. Se a altura desse sólido for de 80 cm, então sua área lateral deverá medir:

A 4800 m^2.
B 480 m^2.
C 48 m^2
D 4,8 m^2
E 0,48 m^2.

Resolução:

O prisma descrito possui cinco faces laterais congruentes em forma de retângulos com dimensões de 1,2 m por 80 cm Assim, a área lateral desse prisma, em metros quadrados, é igual a: $5 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 4{,}8 \text{ m}^2$

Alternativa: **D**

Volume do prisma

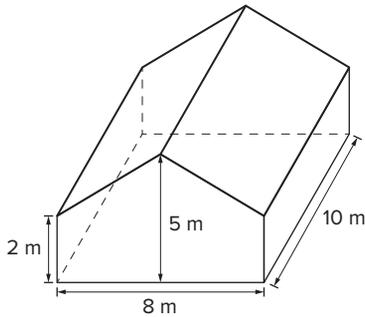
Para se obter o volume de um prisma, basta multiplicar a área de uma das bases pelo comprimento da altura. Assim, sendo **B** o valor da área da base de um prisma de altura **h**, seu volume **V** é expresso por:

$$V = B \cdot h$$

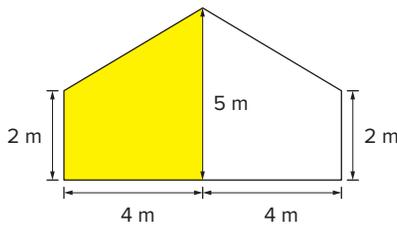
A veracidade dessa expressão, para qualquer tipo de prisma, pode ser comprovada pelo princípio de Cavalieri para volumes. Considere um paralelepípedo retangular reto de dimensões *a*, *b* e *c*, tais que o produto das medidas *a* e *b*, por exemplo, seja equivalente à área da base de determinado prisma (B = a · b) e que a medida *c* coincida com a altura desse mesmo prisma (h = c). Nesse caso, do princípio de Cavalieri para volumes, temos que o paralelepípedo e o prisma têm o mesmo volume:

$$V = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = B \cdot h$$

Exercícios resolvidos

9 A figura a seguir representa o projeto de construção de um galpão, dotado de simetria bilateral, que ocupará um terreno retangular de 8 m por 10 m

Calcule o volume, em metros cúbicos, desse galpão

Resolução:

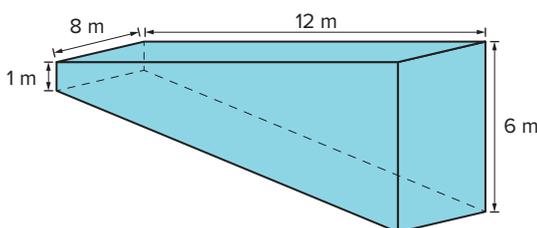
As bases do prisma que dá forma ao galpão são pentágonos, também dotados de simetria bilateral. Por isso, elas podem ser decompostas em dois trapézios retângulos congruentes, como mostra a figura:

A área de cada trapézio mede:

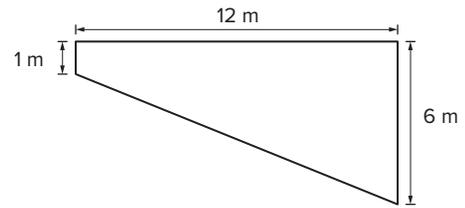
$$A_{trapézio} = \frac{(2+5)\cdot 4}{2} = \frac{7\cdot 4}{2} = 14\ m^2$$

Assim, a área de cada base é: $A_{base} = 2\cdot 14 = 28\ m^2$

Como a altura de um prisma equivale à distância entre os planos de suas bases, de acordo com a figura, o prisma que dá forma ao galpão tem altura h = 10 m. Portanto, o volume do galpão é igual a:

$$A_{base}\cdot h = 28\cdot 10 = 280\ m^3$$

10 Calcule a capacidade, em litros, de uma piscina com a forma do prisma reto representado pela figura a seguir:

Resolução:

As bases do prisma têm a forma do trapézio retângulo a seguir:

Portanto, a área da base desse prisma é:

$$A_{base} = \frac{(1+6)\cdot 12}{2} = \frac{7\cdot 12}{2} = 42\ m^2$$

Como a altura de um prisma equivale à distância entre os planos de suas bases, de acordo com a figura, o prisma que dá forma à piscina tem altura h = 8 m. Assim, o volume da piscina é:

$$V_{piscina} = A_{base}\cdot h = 42\cdot 8 = 336\ m^3$$

Fazendo a conversão de unidades, concluímos que a piscina tem capacidade para 336 000 litros de água

Prismas regulares

Dizemos que um prisma é regular se, e somente se, forem satisfeitas as duas condições a seguir:

1. As bases do prisma são polígonos regulares.
2. O prisma é reto.

Da primeira condição, concluímos que todas as arestas da base têm o mesmo comprimento. Da segunda, concluímos que a altura do prisma tem o mesmo comprimento de suas arestas laterais.

Combinando as informações das duas condições, temos que todas as faces laterais do prisma são retangulares e congruentes umas às outras. Assim, dado um prisma regular de altura *h* em que cada base possui *n* lados de comprimento ℓ, sua área lateral é expressa por:

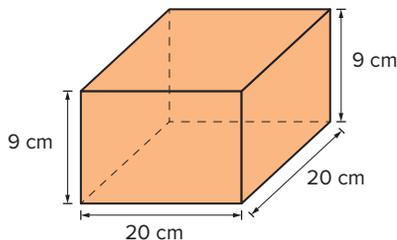
$$A_{lateral} = n\cdot \ell\cdot h$$

Assim, temos:

Tipo de prisma	Área lateral
Triangular regular	$3\cdot \ell\cdot h$
Quadrangular regular	$4\cdot \ell\cdot h$
Pentagonal regular	$5\cdot \ell\cdot h$
Hexagonal regular	$6\cdot \ell\cdot h$

Exercícios resolvidos

11 Calcule a capacidade, em litros, de um prisma quadrangular regular cujas arestas da base medem 20 cm e as arestas laterais medem 9 cm.

Resolução:

As bases do prisma são quadrados de lados com 20 cm
Portanto, a área da base desse prisma é:

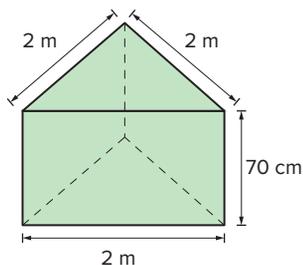
$$A_{base} = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$$

Como a altura de um prisma regular equivale ao comprimento de suas arestas laterais, temos que h = 9 cm. Assim, o volume do prisma é:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 400 \cdot 9 = 3600 \text{ cm}^3$$

Fazendo a conversão de unidades, concluímos que o prisma tem 3,6 litros de capacidade.

12 Calcule a capacidade, em litros, de um prisma triangular regular cujas arestas da base medem 2 m e a altura mede 70 cm

Resolução:

As bases do prisma são triângulos equiláteros de lados medindo 2 m = 200 cm
Portanto, a área da base desse prisma é:

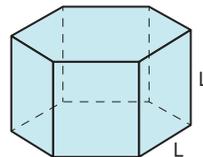
$$A_{base} = \frac{200^2\sqrt{3}}{4} = \frac{40000\sqrt{3}}{4} = 10000\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

A altura do prisma é h = 70 cm Assim, seu volume é:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 10000\sqrt{3} \cdot 70 = 700000\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Fazendo a conversão de unidades, concluímos que o prisma tem $700\sqrt{3}$ litros de capacidade.

13 Um prisma hexagonal regular tem todas as suas arestas do mesmo comprimento. Determine a área lateral desse prisma sabendo que sua capacidade é de $1500\sqrt{3}$ cm^3.

Resolução:

As bases do prisma são hexágonos regulares de lado L.

Portanto, a área da base desse prisma é $A_{base} = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$.

A altura do prisma é h = L Assim, seu volume é:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot L = \frac{3L^3\sqrt{3}}{2}$$

Logo, temos a equação:

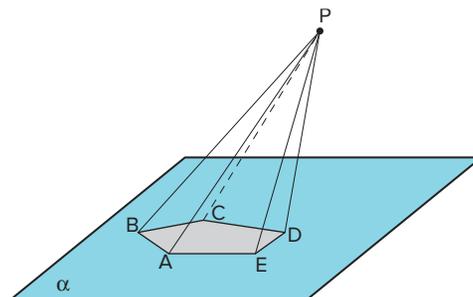
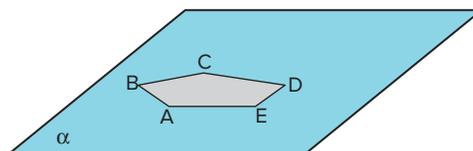
$$\frac{3L^3\sqrt{3}}{2} = 1500\sqrt{3} \Rightarrow L^3 = \frac{2\ 1500}{3} \Rightarrow L^3 = 1000 \Rightarrow L = 10 \text{ cm}$$

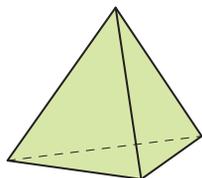
As seis faces laterais do prisma são quadrados de lado 10 cm Portanto, sua área lateral mede:

$$6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100 = 600 \text{ cm}^2$$

Pirâmides

Considere um polígono qualquer e um único ponto que não pertença ao plano do polígono. Unindo esse ponto, por meio de segmentos de reta, a todos os vértices do polígono tomado, a forma geométrica determinada por esses segmentos junto com o polígono é denominada **pirâmide**

$P \notin \alpha$

Acrescentando o ponto tomado fora do plano do polígono aos vértices do polígono, obtemos o conjunto dos vértices da pirâmide

As pirâmides com exatamente quatro vértices também são chamadas de tetraedros, pois esses vértices determinam quatro faces planas Todas as faces de um tetraedro são triangulares e qualquer uma delas pode ser considerada como a base do sólido

Em uma pirâmide com mais de quatro vértices, é sempre possível identificar um plano α que contenha mais vértices do que qualquer outro Além disso, pirâmides com mais de quatro vértices têm apenas uma base, que é, necessariamente, o polígono contido nesse plano α. Portanto, em uma pirâmide, só pode haver uma face que não seja triangular; quando houver, essa face será a base da pirâmide

O número de lados do polígono que é base da pirâmide é designado por *n* Assim, se n = 5, por exemplo, significa que a base da pirâmide é um pentágono.

O número de lados da base de uma pirâmide permite classificá-la em diversas categorias distintas:

Tipo de pirâmide	Número de lados da base	Imagem possível
Pirâmide triangular	n = 3	
Pirâmide quadrangular	n = 4	
Pirâmide pentagonal	n = 5	
Pirâmide hexagonal	n = 6	

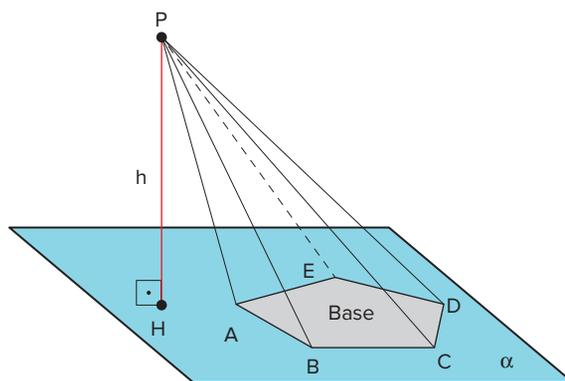
O único vértice que não pertence ao plano da base de uma pirâmide é chamado de vértice da pirâmide; os demais são chamados de vértices da base. Outros elementos de uma pirâmide que não pertencem ao plano de sua base são denominados laterais As arestas que ligam o vértice da pirâmide a algum vértice da base são chamadas de arestas laterais da pirâmide As faces triangulares que possuem o vértice da pirâmide são denominadas faces laterais.

! Atenção

Para determinar se um poliedro é ou não uma pirâmide, devemos verificar as seguintes condições:

- Existem pelo menos quatro faces triangulares.
- Existe, no máximo, uma face que não seja triangular
- Existem pelo menos quatro vértices triédricos.
- Existe, no máximo, um vértice que não seja triédrico.

Altura da pirâmide

Considere uma pirâmide de vértice P e base ABCDE contida no plano α.

Os segmentos de reta $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$, $\overline{DP}$ e $\overline{EP}$ são denominados arestas laterais da pirâmide, uma vez que não estão contidos no plano da base.

A altura de uma pirâmide tem medida **h** que coincide com a distância do vértice da pirâmide ao plano onde está localizada sua base.

$$h = d(P, \alpha)$$

Para determinar essa distância, é necessário encontrar um ponto H pertencente ao plano α tal que H seja a projeção ortogonal do vértice P da pirâmide no plano que contém a sua base Esse ponto H também é chamado de "pé da altura" da pirâmide Assim:

$$\left.\begin{array}{l} H \in \alpha \\ \overline{PH} \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow h = d(P, H)$$

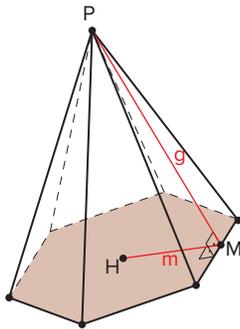
FRENTE 3

Pirâmides regulares

Para determinar se uma pirâmide é ou não regular, devemos verificar as seguintes condições:

- A base da pirâmide é um polígono regular.
- O pé da altura coincide com o centro da base.
- As faces laterais são triângulos isósceles congruentes uns aos outros.

A terceira condição permite concluir que a área lateral de uma pirâmide regular pode ser obtida a partir da área de uma única face lateral multiplicada pelo número de lados de sua base.

Pirâmides regulares possuem outros importantes elementos denominados apótemas, que são de dois tipos: apótemas da base e apótemas laterais, também chamados de apótemas da pirâmide.

Para encontrar os apótemas desses sólidos, é necessário considerar os pontos médios das arestas de sua base Assim, sendo P o vértice de uma pirâmide regular, H o cen tro de sua base e M o ponto médio de uma aresta dessa base, temos que:

- O segmento $\overline{PM}$ é um apótema da pirâmide ou apótema lateral.
- O segmento $\overline{HM}$ é um apótema da base.

Os apótemas laterais de uma pirâmide regular são também as alturas de suas faces laterais, por isso seu comprimento é usado no cálculo das áreas lateral e total.

Assim, dada uma pirâmide regular cuja base possui *n* lados de comprimento ℓ e cujos apótemas laterais têm comprimento *g*, sua área lateral é expressa por:

$$A_{lateral} = \frac{n \cdot \ell \cdot g}{2}$$

Portanto, temos:

Tipo de pirâmide	Área lateral
Triangular regular	$\frac{3 \cdot \ell \cdot g}{2} = 1{,}5 \cdot \ell \cdot g$
Quadrangular regular	$\frac{4 \cdot \ell \cdot g}{2} = 2 \cdot \ell \cdot g$
Pentagonal regular	$\frac{5 \cdot \ell \cdot g}{2} = 2{,}5 \cdot \ell \cdot g$
Hexagonal regular	$\frac{6 \cdot \ell \cdot g}{2} = 3 \cdot \ell \cdot g$

Os comprimentos dos apótemas das bases também podem ser usados no cálculo da área da base Assim, sendo *m* o comprimento dos apótemas da base de uma pirâmide regular, a área da base dessa pirâmide é expressa por:

$$A_{base} = \frac{n \cdot \ell \cdot m}{2}$$

! Atenção

Observando que a expressão $\frac{n \cdot \ell}{2}$ presente nas fórmulas das áreas (lateral e da base) de uma pirâmide regular representa o semiperímetro (p) de sua base, as fórmulas das áreas das superfícies das pirâmides regulares podem ser memorizadas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{llll} & \text{Área da base} & = \text{semiperímetro da base} \cdot \text{apótema da base} & = p \cdot m \\ + & \text{Área lateral} & = \text{semiperímetro da base} \cdot \text{apótema da pirâmide} & = p \cdot g \\ \hline & \text{Área total} & = \text{semiperímetro da base} \cdot \text{soma dos apótemas} & = p(m+g) \end{array}$$

Exercícios resolvidos

14 Determine os comprimentos dos apótemas de uma pirâmide quadrangular regular sabendo que as arestas de sua base medem 6 cm e que suas arestas laterais medem 5 cm.

Resolução:

A base dessa pirâmide é um quadrado de lado 6 cm. Como os apótemas de um quadrado têm a metade do comprimento de seus lados, então os apótemas da base da pirâmide medem $m = \frac{6}{2} = 3$ cm cada um.

As faces laterais dessa pirâmide são triângulos isósceles de lados 6 cm, 5 cm e 5 cm e os apótemas da pirâmide são as alturas desses triângulos. Esses apótemas dividem as faces laterais em dois triângulos retângulos ocupando o lugar de um dos catetos. Então, como a hipotenusa desses triângulos retângulos medem 5 cm e o outro cateto mede $\frac{6}{2} = 3$ cm, sendo g > 0, o comprimento dos apótemas da pirâmide, do teorema de Pitágoras, é:

$$3^2 + g^2 = 5^2 \Rightarrow g^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow g = 4 \text{ cm}$$

Portanto, os apótemas dessa pirâmide medem 4 cm.

15 Quanto mede a área lateral de uma pirâmide triangular regular cujas arestas da base medem 10 cm e os apótemas medem 12 cm?

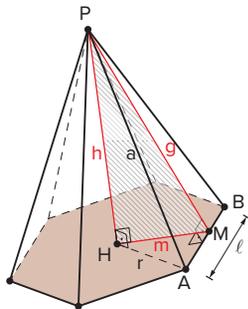
Resolução:

A base dessa pirâmide é um triângulo equilátero de lado 10 cm, e as faces laterais são triângulos isósceles de bases 10 cm e alturas 12 cm, pois os apótemas da pirâmide são as alturas de suas faces laterais

Assim, a área lateral dessa pirâmide mede:

$$A_{\text{lateral}} = \frac{3 \cdot \ell \cdot g}{2} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 12}{2} = 180\ \text{cm}^2$$

Pirâmides regulares e o teorema de Pitágoras

Considere uma pirâmide regular de vértice P cuja base de centro H tem um lado $\overline{AB}$ e o ponto médio M desse lado $\overline{AB}$

Entre os elementos dessa pirâmide, temos os seguintes segmentos:

$\overline{PH}$ é a altura da pirâmide → PH = h

$\overline{PA}$ é uma aresta lateral da pirâmide → PA = a

$\overline{PM}$ é um apótema lateral da pirâmide → PM = g

$\overline{AB}$ é uma aresta da base da pirâmide → AB = l

$\overline{HM}$ é um apótema da base da pirâmide → HM = m

$\overline{HA}$ é o raio do círculo circunscrito à base → HA = r

Como a altura de uma pirâmide é perpendicular ao pla no da base da pirâmide, ambos os triângulos PHM e PHA são retângulos no vértice H Assim, do teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} \Delta PHM \Rightarrow g^2 = h^2 + m^2 \\ \Delta PHA \ \Rightarrow a^2 = h^2 + r^2 \end{cases}$$

Como cada apótema de um polígono regular é perpen dicular a um lado do polígono, o triângulo AMH é retângulo no vértice M Do teorema das três perpendiculares, temos que o triângulo AMP também é retângulo no vértice M Assim, novamente do teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} \Delta AMP \Rightarrow a^2 = g^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \\ \Delta AMH \ \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

16 Quanto mede a altura de uma pirâmide regular cujos apótemas medem 5 cm e 13 cm?

A 14 cm.
B 13 cm.
C 12 cm
D 11 cm
E 10 cm

Resolução:

Como o apótema da base de uma pirâmide é, necessariamente, menor do que o apótema lateral, temos que:

- o apótema da base mede m = 5 cm.
- o apótema da pirâmide mede g = 13 cm.

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

(Apótema da pirâmide)^2 = (Altura)^2 + (Apótema da base)^2

Assim, sendo h > 0, a medida da altura da pirâmide, em centímetros, é:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow h = 12\ \text{cm}$$

Alternativa: **C**

17 Quanto mede, aproximadamente, a aresta lateral de uma pirâmide quadrangular regular em que as arestas da base medem 10 cm e a altura mede 4 cm?

A 7 cm.
B 8 cm.
C 9 cm.
D 10 cm.
E 11 cm.

Resolução:

Como o raio do círculo que circunscreve um quadrado equivale à metade da diagonal do quadrado, temos que esse raio mede $r = 5\sqrt{2}$ cm.

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

(Aresta lateral)^2 = (Altura)^2 + (Raio da base)^2

Assim, sendo a > 0, temos:

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 16 + 50 = 66 \Rightarrow a = \sqrt{66} \cong 8\text{cm}$$

Alternativa: **B**

18 Quanto mede a aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular em que a altura mede 2 cm e as arestas laterais medem $\sqrt{5}$ cm?

A 1 cm
B $\sqrt{2}$ cm
C $\sqrt{3}$ cm.
D 2 cm.
E $\sqrt{5}$ cm.

Resolução:

Como o lado de um hexágono regular equivale ao raio do círculo que o circunscreve (r > 0), basta encontrarmos a medida *r* desse raio. Assim:

(Aresta lateral)^2 = (Altura)^2 + (Raio da base)^2

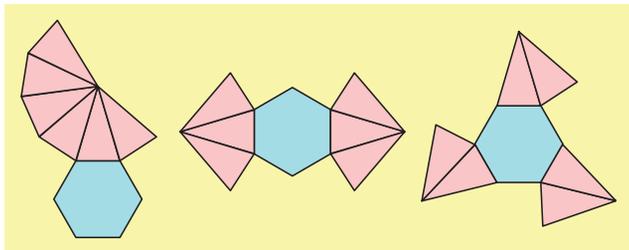
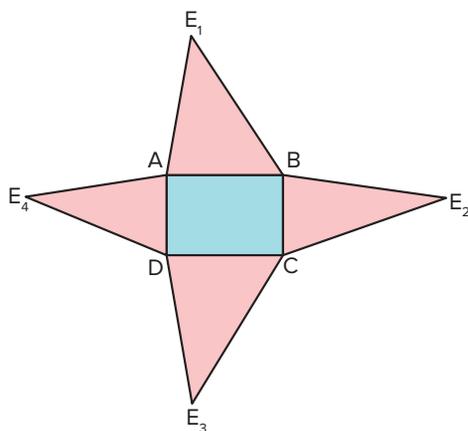
Logo:

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + r^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^2 = 5 - 4 \Rightarrow r = 1\ \text{cm}$$

Alternativa: **A**

Planificações das pirâmides

Semelhante ao que ocorre com os prismas, as planificações de uma pirâmide são figuras geométricas planas formadas pela justaposição de polígonos congruentes às faces da pirâmide.

As figuras a seguir, formadas por seis triângulos isósceles e um hexágono regular, são possíveis planificações de uma pirâmide hexagonal regular, por exemplo.

A figura a seguir é uma planificação possível de uma pirâmide retangular irregular:

Para que as relações entre as áreas da superfície desse tipo de sólido sejam mais bem compreendidas, planificações como essas permitem que todas as faces da pirâmide sejam observadas simultaneamente

Sendo $L_i = (L_1, L_2, L_3, \quad)$ a sucessão das áreas das faces laterais de uma pirâmide, sobre a superfície dessa pirâmide, temos que:

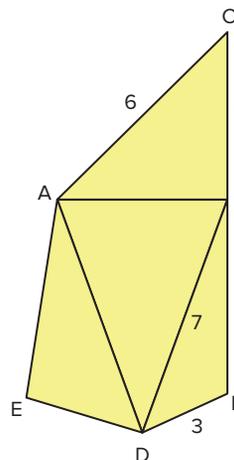
Área lateral: $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n$

Área total: $(\text{Área da base}) + (\text{Área lateral})$

Observe também, na planificação da pirâmide irregular, que a base é o retângulo ABCD. Como só pode haver um vértice que não pertença ao plano da base de uma pirâ mide, os pontos indicados por E_1, E_2, E_3 e E_4 devem ser coincidentes no sólido real. Assim, para que essa figura seja realmente a planificação de uma pirâmide irregular, é necessário haver a igualdade entre as medidas dos seguintes pares de segmentos:

$AE_1 = AE_4$ $BE_1 = BE_2$ $CE_2 = CE_3$ $DE_3 = DE_4$

Exercício resolvido

19 Considere a planificação de um tetraedro, conforme a figura a seguir

Os triângulos ABC e ABD são isósceles de bases $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. As medidas dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DF}$ estão indicadas na figura. A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é:

A 33
B 34
C 43
D 47
E 48

Resolução:

No triângulo isósceles ABC, temos: AB = BC = 5.
No triângulo isósceles ABD, temos: AD = BD = 7.
Quando o tetraedro for montado, os vértices C, E e F coincidirão, assim como os seguintes pares de arestas: $\overline{AC}$ com $\overline{AE}$, $\overline{BC}$ com $\overline{BF}$ e $\overline{DE}$ com $\overline{DF}$.
Portanto, a soma dos comprimentos das seis arestas do tetraedro será: 3 + 5 + 5 + 6 + 7 + 7 = 33.
Alternativa: **A**

Volume da pirâmide

Para obter o volume de uma pirâmide, basta multiplicar a área de sua base pelo comprimento de sua altura e dividir o resultado por 3. Assim, sendo **B** o valor da área da base de uma pirâmide de altura **h**, seu volume **V** é expresso por:

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

A veracidade dessa expressão, para qualquer tipo de pirâmide, também pode ser comprovada retomando alguns dos conceitos vistos neste capítulo e no anterior, como o fato de que os cubos podem ser decompostos em três pirâmides congruentes e a aplicação do princípio de Cavalieri para volumes.

Exercícios resolvidos

20 **Uece 2017** A medida da altura de uma pirâmide é 10 m e sua base é um triângulo retângulo isósceles cuja medida da hipotenusa é 6 m. Pode-se afirmar que a medida do volume dessa pirâmide, em m^3, é igual a

A 60
B 30
C 15
D 45

Resolução:

Sendo *x* a medida, em metros, dos catetos do triângulo isósceles que é base dessa pirâmide, do teorema de Pitágoras temos: $x^2 + x^2 = 6^2 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18$.
Como triângulos retângulos isósceles equivalem à metade da área de um quadrado cujo lado coincide com os catetos do triângulo, a área da base dessa pirâmide, em metros quadrados, é: $A_{base} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

Então, o volume da pirâmide é:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{9 \cdot 10}{3} = 30 \text{ m}^3.$$

Alternativa: **B**

21 Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular de altura 8 cm sabendo que as arestas de sua base medem 6 cm.

Resolução:

A área da base dessa pirâmide é:

$$A_{base} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Então, seu volume é:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 8}{3} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

22 Uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas da base medem 60 cm e arestas laterais medem 50 cm tem volume equivalente a:

A 10 litros.
B $10\sqrt{3}$ litros.
C $10\sqrt{5}$ litros.
D 12 litros.
E $12\sqrt{7}$ litros.

Resolução:

A área da base dessa pirâmide é:

$$A_{Base} = 60^2 = 3600 \text{ cm}^2$$

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos ele mentos da pirâmide regular é:

$$\left(\begin{matrix}\text{Aresta}\\ \text{lateral}\end{matrix}\right)^2 = \left(\begin{matrix}\text{Apótema}\\ \text{da pirâmide}\end{matrix}\right)^2 + \left(\frac{\text{Aresta da base}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50^2 = g^2 + \left(\frac{60}{2}\right)^2 \Rightarrow g = 40 \text{ cm}$$

O apótema da base dessa pirâmide é $m = \frac{60}{2} = 30$ cm.

Outra aplicação do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

$$(\text{Apótema da pirâmide})^2 = (\text{Altura})^2 + (\text{Apótema da base})^2$$
$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 40^2 = h^2 + 30^2 \Rightarrow h = 10\sqrt{7} \text{ cm}$$

O volume dessa pirâmide é

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{3600 \cdot 10\sqrt{7}}{3} = 12000\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

Fazendo a conversão de unidades, temos que esse volume equivale a $12\sqrt{7}$ litros.

Alternativa: **E**

23 **PUC-Rio 2017** Numa pirâmide de base quadrada, todas as arestas medem x. Quanto vale o volume da pirâmide?

A $\frac{\sqrt{2}}{6}x^3$

B πx^3

C $x^3 + x^2 + x + 1$

D x^3

E $\frac{\sqrt{6}}{3}x^3$

Resolução:

A área da base dessa pirâmide é $A_{base} = x^2$

Como o raio do círculo que circunscreve um quadrado equivale à metade da diagonal do quadrado, temos que, em centímetros, esse raio mede $r = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras aos elementos da pirâmide regular é:

$$(\text{Aresta lateral})^2 = (\text{Altura})^2 + (\text{Raio da base})^2$$

$$a^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = h^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = x^2 = \frac{2x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = h \quad \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Então, o volume dessa pirâmide é

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{x^2 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}x^3$$

Alternativa: **A**

FRENTE 3

24 **UTFPR 2017** Uma barraca de camping foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume da barraca medem, respectivamente:

A $6\sqrt{3}\ m^2$ e $6\sqrt{3}\ m^3$.
B $3\sqrt{3}\ m^2$ e $3\sqrt{3}\ m^3$.
C $5\sqrt{3}\ m^2$ e $2\sqrt{3}\ m^3$.
D $2\sqrt{3}\ m^2$ e $5\sqrt{3}\ m^3$.
E $4\sqrt{3}\ m^2$ e $8\sqrt{3}\ m^3$

Resolução:

A área da base dessa pirâmide é:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ m^2$$

Assim, seu volume é:

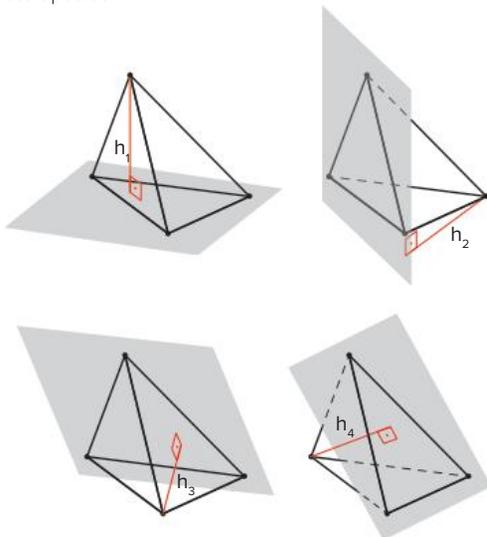
$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 3}{3} = 6\sqrt{3}\ m^3$$

Alternativa: **A**

Saiba mais

Volume do tetraedro

Os tetraedros são pirâmides cercadas por apenas quatro faces triangulares. Nesses casos, como não há face com mais do que três lados, qualquer uma delas pode ser considerada base da pirâmide.

Assim, um tetraedro é um tipo especial de pirâmide que possui quatro bases B_1, B_2, B_3 e B_4, além de quatro alturas h_1, h_2, h_3 e h_4, que são as respectivas distâncias entre os planos das bases e seus vértices opostos.

Portanto, também há quatro maneiras diferentes de se encontrar o volume de um tetraedro:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot B_2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot B_3 \cdot h_3 = \frac{1}{3} \cdot B_4 \cdot h_4$$

Elementos dos poliedros

Todos os poliedros são compostos de três entes primitivos da Geometria: os pontos, as retas e os planos. Entre os principais planos de um poliedro estão os que contêm suas faces, mas também há os que contêm suas seções. Entre as principais retas de um poliedro estão as que contêm suas arestas, mas também há as que contêm suas diagonais, por exemplo. E entre os principais pontos de um poliedro estão os seus vértices.

As faces de um poliedro são os polígonos planos que o cercam. As arestas de um poliedro são os segmentos de retas determinados pela interseção de duas faces adjacentes. Os vértices de um poliedro são os pontos determinados pela interseção de três ou mais faces adjacentes

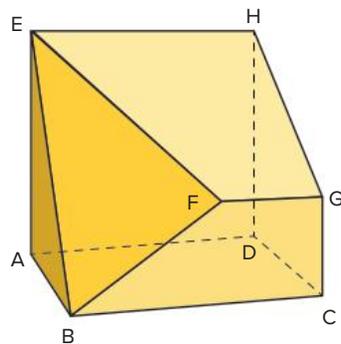
Indicamos por (F) o número de faces de um poliedro, mas, como essas faces podem ser polígonos com quantidades diferentes de lados, como triângulos, quadriláteros ou pentágonos, usamos uma notação indexada (F_i), com $i \geq 3$, para indicar as quantidades de faces de cada tipo. Então:

- F_3 indica o número de faces triangulares do poliedro.
- F_4 indica o número de faces quadrangulares do poliedro.
- F_5 indica o número de faces pentagonais do poliedro
- F_6 indica o número de faces hexagonais do poliedro.

E assim por diante

Dessa maneira, temos que:

$$F = \sum_{i=3}^{\infty} F_i = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \ldots$$

É claro que, para alguns valores de i, temos $F_i = 0$, uma vez que os poliedros fechados possuem um número finito de faces. Vejamos, por exemplo, o caso do poliedro irregular a seguir, que possui apenas faces triangulares e quadrangulares:

Observe que as faces ABE e BEF desse poliedro são triangulares e que as demais faces ABCD, CDHG, ADHE, BCGF e EFGH são todas quadrangulares. Então:

- $F_3 = 2$ significa que o poliedro possui exatamente 2 faces com 3 lados cada.
- $F_4 = 5$ significa que o poliedro possui exatamente 5 faces com 4 lados cada.

Como esse poliedro não possui outras faces, $F_i = 0$ para $i \geq 5$. Logo:

- $F_5 = 0$ significa que o poliedro não possui faces com 5 lados.
- $F_6 = 0$ quer dizer que o poliedro não possui faces com 6 lados.

E assim por diante

Portanto, nesse exemplo, temos:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \dots$$
$$F = 2 + 5 + 0 + 0 + \dots$$
$$F = 7$$

Indicamos por (A) o número de arestas de um poliedro e, como cada aresta pertence a exatamente duas faces, podemos concluir que o dobro do número de arestas de um poliedro é igual à somatória do número de lados de todas as suas faces.

$$2A = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot F_i = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + \dots$$

Aplicando essa fórmula ao exemplo anterior, temos:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 +$$
$$2A = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 +$$
$$2A = 6 + 20 + 0 + 0 + \dots$$
$$2A = 26$$
$$A = 13$$

Exercícios resolvidos

25 Determine o número de arestas de um poliedro fechado, cercado por exatamente dois octógonos e dezesseis triângulos.

Resolução:

Da relação entre o número de arestas e o conjunto de faces do poliedro, temos:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + 7 \cdot F_7 + 8 \cdot F_8 + 9 \cdot F_9 +$$
$$2A = 3 \cdot 16 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 0 +$$
$$2A = 48 + 0 + 0 + 0 + 0 + 16 + 0 + \dots$$
$$2A = 64$$
$$A = 32$$

26 Prove que não existe poliedro fechado que seja cercado por exatamente dois pentágonos, três quadriláteros e sete triângulos.

Resolução:

Da relação entre o número de arestas e o conjunto de faces do poliedro, temos:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + 7 \cdot F_7 + 8 \cdot F_8 + 9 \cdot F_9 + \dots$$
$$2A = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 +$$
$$2A = 21 + 12 + 10 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$
$$2A = 43$$

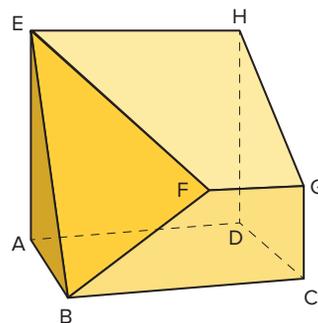
Logo, não existe poliedro com essas características, pois, como A é um número inteiro, é necessário que 2A seja um número par, mas 43 é um número ímpar

Indicamos por (V) o número de vértices de um poliedro. Como, desses vértices, podem partir quantidades diferentes de arestas – alguns podem ser triédricos (de onde partem três arestas), outros tetraédricos (de onde partem quatro arestas) e assim por diante –, utilizamos uma notação indexada (V_i), com $i \geq 3$, para indicar as quantidades de vértices de cada tipo. Então:

- V_3 indica o número de vértices triédricos do poliedro.
- V_4 indica o número de vértices tetraédricos do poliedro.
- V_5 indica o número de vértices pentaédricos do poliedro.
- V_6 indica o número vértices hexaédricos do poliedro.

E assim por diante.

Portanto, temos

$$V = \sum_{i=3}^{\infty} V_i = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 +$$

Observe que, na figura do exemplo discutido, os vértices A, C, D, F, G e H são todos triédricos, ou seja, cada um desses vértices é extremidade de exatamente três arestas. Já os vértices B e E são tetraédricos, ou seja, cada um deles é extremidade de exatamente quatro arestas. Logo:

- $V_3 = 6$ significa que o poliedro possui exatamente 6 vértices de onde partem 3 arestas
- $V_4 = 2$ significa que o poliedro possui exatamente 2 vértices de onde partem 4 arestas.

Como esse poliedro não possui outros vértices, $V_i = 0$ para $i \geq 5$. Então:

- $V_5 = 0$ quer dizer que o poliedro não possui vértices de onde partem 5 arestas.
- $V_6 = 0$ quer dizer que o poliedro não possui vértices de onde partem 5 arestas

E assim por diante

Portanto, nesse exemplo, temos:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \dots$$
$$V = 6 + 2 + 0 + 0 +$$
$$V = 8$$

O mesmo raciocínio usado para relacionar o número de arestas de um poliedro ao número de faces de cada tipo pode ser usado para relacionar o número de arestas ao número de vértices de cada tipo Assim, como cada aresta liga exatamente dois vértices, o dobro do número de ares tas de um poliedro é igual à somatória do número de arestas que partem de todos os seus vértices

$$2A = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot V_i = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 +$$

Aplicando essa fórmula ao exemplo em discussão, temos:

$$2A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 + ...$$
$$2A = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 +$$
$$2A = 18 + 8 + 0 + 0 + ...$$
$$2A = 26$$
$$A = 13$$

Exercícios resolvidos

27 Um poliedro fechado possui ao todo 24 vértices e de cada vértice partem exatamente três arestas. Quantas arestas esse poliedro possui?

Resolução:

Da relação entre o número de arestas e o conjunto dos vértices do poliedro, temos:

$$2A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 + ...$$
$$2A = 3 \cdot 24 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + ...$$
$$2A = 72 + 0 + 0 + 0 +$$
$$A = 36$$

28 Em um poliedro de 30 arestas, há dois vértices hexaédricos e os demais vértices são todos tetraédricos Quantos vértices esse poliedro possui?

Resolução:

Sendo *x* o número de vértices tetraédricos desse poliedro:

$$2A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + 6 \cdot V_6 + 7 \cdot V_7 +$$
$$2 \cdot 30 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot x + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + ...$$
$$60 = 0 + 4x + 0 + 12 + 0 + ...$$
$$48 = 4x$$
$$x = 12$$

Portanto, o poliedro possui $V = x + 2 = 12 + 2 = 14$ vértices.

A partir das relações entre os números A, V e F de arestas, vértices e faces mostrados até aqui, podemos verificar que, em todo poliedro, esses números também obedecem às seguintes relações de ordem: $\begin{cases} 2A \geq 3F \\ 2A \geq 3V \end{cases}$.

Veja a demonstração da primeira relação de ordem desse sistema:

$$2A = \sum_{i=3}^{\infty} i \cdot F_i$$
$$2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + ...$$
$$2A = 3 \cdot F_3 + 3 \cdot F_4 + 3 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 + F_4 + 2 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 +$$
$$2A = \underbrace{3 \cdot (F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + ...)}_{3F} + F_4 + 2 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 + ...$$
$$2A = 3F + F_4 + 2 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 +$$

Então, como $F_4 + 2 \cdot F_5 + 3 \cdot F_6 + ... \geq 0$, concluímos que $2A \geq 3F$.

A demonstração da relação de ordem $2A \geq 3V$ é análoga a essa.

Exercício resolvido

29 Prove que não existe poliedro fechado com exatamente 9 vértices e 13 arestas

Resolução:

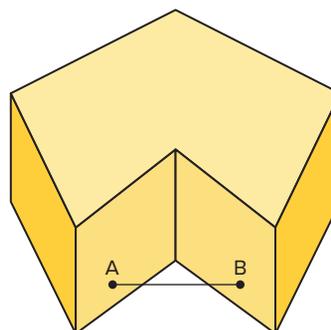
Uma condição necessária para a existência de um poliedro fechado é que seus números V e A de vértices e arestas obedeçam à relação $2A \geq 3V$, ou seja, o dobro do número de arestas deve ser maior ou igual ao triplo do número de vértices

No caso, com $A = 13$ e $V = 9$, temos $2A = 2 \cdot 13 = 26$, que é menor do que $3V = 3 \cdot 9 = 27$

Portanto, nessas condições, não existe poliedro fechado

Poliedros côncavos e convexos

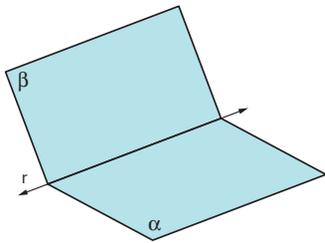
Quando um poliedro tem todos os seus pontos no mesmo semiespaço, determinado por qualquer plano que contenha uma de suas faces, ele é convexo. Mas, se existir um plano que contenha alguma face do poliedro e o secione em sólidos situados em semiespaços opostos, esse poliedro será côncavo.

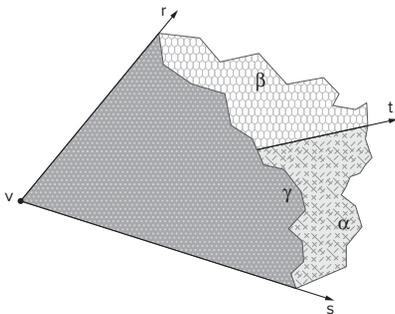
Os poliedros são côncavos quando possuem pelo menos uma concavidade. Para observá-la, basta encontrar dois pontos da superfície do poliedro tais que o segmento de reta com extremidades nesses pontos passe por fora desse sólido.

Observe, na figura apresentada, que os pontos A e B pertencem à superfície do poliedro, mas que o segmento de reta $\overline{AB}$ está situado na região exterior ao sólido, a qual é denominada concavidade do poliedro.

Se não for possível encontrar dois pontos sobre a su perfície de um poliedro, determinando um segmento que passe por fora do sólido, então ele será necessariamente convexo, ou seja, um poliedro desprovido de concavidades é um poliedro convexo

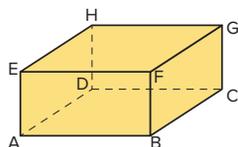
Relação de Euler

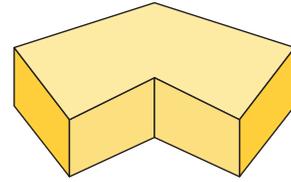
Sendo S uma superfície poliédrica tridimensional, aberta ou fechada, côncava ou convexa, define-se a característica de Euler de S como o número inteiro $\chi(S)$ tal que $\chi(S) = V - A + F$, em que **V** representa o número de vértices, **A** o número de arestas e **F** o número de faces da superfície poliédrica.

Todo diedro é uma superfície poliédrica D em que V = 0, A = 1 e F = 2. Portanto, a característica de Euler dessa superfície poliédrica é unitária.

$$\chi(D) = V - A + F = 0 - 1 + 2 = 1$$

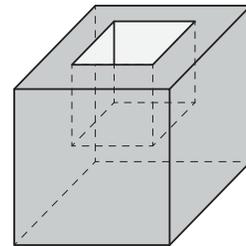
Os triedros são superfícies poliédricas em que V = 1, A = 3 e F = 3. A característica de Euler dos triedros também é unitária.

$$\chi(T) = V - A + F = 1 - 3 + 3 = 1$$

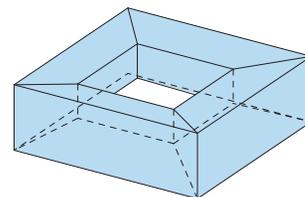
Não é coincidência que o resultado desses dois exemplos seja o mesmo. Ambos, diedros e triedros, são superfícies convexas e abertas. A característica de Euler de qualquer superfície convexa e aberta é igual a 1.

Nas superfícies de um paralelepípedo ou de um prisma quadrangular, os números de vértices, arestas e faces são: V = 8, A = 12 e F = 6. Portanto, a superfície P de um parale lepípedo tem característica de Euler igual a 2.

$$\chi(P) = V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

Quando a característica de Euler da superfície de um poliedro é igual a 2, dizemos que o poliedro é euleriano Sobre a superfície do prisma dado como exemplo de poliedro côncavo, temos V = 12, A = 18 e F = 8 Portanto, esse prisma é um poliedro euleriano.

$$\chi(P) = V \quad A + F = 12 \quad 18 + 8 = 2$$

Todos os poliedros convexos são eulerianos, mas isso não ocorre com todos os poliedros côncavos. Quando, em um poliedro, há uma ou mais faces onde o perímetro não é cercado por uma única linha contínua, a característica de Euler de suas superfícies pode não ser igual a 2.

No poliedro do exemplo a seguir, em que uma concavidade é cercada por cinco faces, a face superior tem seu perímetro cercado por dois quadrados.

$$\left.\begin{array}{l} V = 16 \\ A = 24 \\ F = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi(S) = V + A = F \quad +16 = 24 \quad 11 \quad 3$$

Quando, em um poliedro, há uma concavidade que atravessa inteiramente o sólido, a característica de Euler de sua superfície também pode não ser igual a 2 Veja o exemplo a seguir que mostra uma concavidade cercada por quatro faces:

$$\left.\begin{array}{l} V = 16 \\ A = 32 \\ F = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi(S) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

! Atenção

Embora a característica de Euler dos poliedros côncavos varie de um sólido para outro, a dos poliedros convexos é constante e igual a 2 Portanto, se um poliedro é convexo, então:

$$V - A + F = 2$$

Essa expressão é conhecida como relação ou fórmula de Euler para os poliedros convexos

Exercícios resolvidos

30 Determine o número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces e 30 arestas.

Resolução:

Da relação de Euler, temos que V – A + F = 2. Logo:

$V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 2 + 30 - 12 \quad V = 20$

Portanto, o polígono tem 20 vértices.

31 Determine o número de vértices de um poliedro con vexo cercado por exatamente dois pentágonos e dez quadriláteros

Resolução:

Da relação entre o número de arestas e o conjunto de faces do poliedro, temos:

$$\begin{aligned}
&2A = 3 \cdot F_3 + 4 \cdot F_4 + 5 \cdot F_5 + 6 \cdot F_6 + 7 \cdot F_7 + \\
&2A = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + \ldots \\
&2A = 0 + 40 + 10 + 0 + 0 + \ldots \\
&2A = 50 \\
&A = 25
\end{aligned}$$

O poliedro tem exatamente dois pentágonos e dez quadriláteros, logo possui 12 faces Da relação de Eu ler, temos:

$$V + A = F \Leftrightarrow 2 \quad V \; 25 \; 12 \; 2 \quad V \quad 15$$

Portanto, o poliedro tem 15 vértices

Aplicando a fórmula de Euler, podemos verificar que em, todo poliedro convexo, os números V, A e F de vértices, arestas e faces também estabelecem as relações de ordem: $\begin{cases} 3F \geq A + 6 \\ 3V \geq A + 6 \end{cases}$. A seguir, veja a demonstração da primeira relação de ordem.

Primeiro, isolamos o número de vértices na fórmula de Euler:

$$V \quad A + F = 2 \Leftrightarrow V = A \quad F + 2$$

Depois, substituímos a expressão de V na relação 2A ≥ 3V, que é válida para qualquer poliedro:

$$\begin{aligned}
&2A \geq 3(A + \; F \; 2) \\
&2A \geq 3A + 3F \; 6 \\
&3F \geq A + 6
\end{aligned}$$

Novamente, a demonstração da segunda relação de ordem do sistema é análoga a essa

Assim, podemos garantir que os números V, A e F de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo satisfazem as seguintes relações de ordem crescente:

$$\begin{cases} A + 6 \leq 3F \leq 2A \\ A + 6 \leq 3V \leq 2A \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

32 Determine o número de faces de um poliedro convexo que possui exatamente oito arestas.

Resolução:

Uma condição necessária para a existência de um poliedro fechado é que seus números F e A de faces e arestas obedeçam à relação A + 6 ≤ 3F ≤ 2A. Assim, com A = 8, temos:

$$\begin{aligned}
&8 + 6 \leq 3F \leq 2 \cdot 8 \\
&14 \leq 3F \leq 16
\end{aligned}$$

Como F é número inteiro, 3F deve ser, necessariamente, um número múltiplo de três Como o único múltiplo de três no intervalo de 14 a 16 é o número 15, temos que 3F = 15 ⇔ F = 5

Portanto, o poliedro possui exatamente 5 faces.

33 Prove que não existe poliedro convexo com exatamente sete arestas.

Resolução:

Com A = 7, a relação A + 6 ≤ 3F ≤ 2A fica:

$$\begin{aligned}
&7 + 6 \leq 3F \leq 2 \cdot 7 \\
&13 \leq 3F \leq 14
\end{aligned}$$

Como não há número múltiplo de três no intervalo de 13 a 14, concluímos que, nessas condições, não existe poliedro convexo.

Saiba mais

Os números V, A e F de vértices, arestas e faces dos prismas e das pirâmides podem ser expressos em função do número *n* de lados de suas bases

Nos prismas, temos necessariamente que: $\begin{cases} V = 2n \\ A = 3n \\ F = n + 2 \end{cases}$

Nas pirâmides, temos que: $\begin{cases} V = n + 1 \\ A = 2n \\ F = n + 1 \end{cases}$

Soma dos ângulos das faces

A soma das medidas em graus dos ângulos internos de qualquer polígono pode ser expressa pela fórmula $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$, em que $n \geq 3$ indica o número de lados do polígono.

Assim, considerando a sucessão (F_3, F_4, F_5, F_6, ...) dos números de faces de cada tipo que cercam um mesmo poliedro convexo, a soma das medidas em graus dos ângulos de todas essas faces pode ser expressa por:

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} S_n \cdot F_n$$

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) \cdot 180^o \cdot F_n$$

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} 180^o \cdot n \cdot F_n \quad 360^o \; F_n$$

$$S_F = \sum_{n=3}^{\infty} 180^o \cdot n \cdot F_n \quad \cdot \sum_{n=3}^{\infty} 360^o \; F_n$$

$$S_F = 180^o \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot F_n \quad \cdot 360^o \; \sum_{n=3}^{\infty} F_n$$

Lembrando que $\sum_{n=3}^{\infty} F_n = F$ e que $\sum_{n=3}^{\infty} n \cdot F_n = 2A$, temos:

$$S_F = 180^o \cdot 2A \quad \cdot 360^o \; F$$

$$S_F = 360^o \cdot (A \quad F)$$

Como a relação de Euler nos poliedros convexos V +A =F 2 implica V =2 A F, temos finalmente que a soma das medidas, em graus, dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo pode ser expressa unicamente em função do seu número de vértices:

$$S_F = (V \;\cdot 2) \; 360^o$$

Em radianos, essa relação fica expressa por:

$$S_F = (V \quad 2) \cdot 2\pi$$

! Atenção

O uso da expressão em radianos pode facilitar consideravelmente os cálculos, mas, para isso, é necessário observar que:

- a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a π radianos;
- a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 2π radianos;
- a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é igual a 3π radianos;
- a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é igual a 4π radianos

E assim por diante.

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados é igual a $(n \;\; 2)\pi$ radianos

Poliedros de Platão

Platão dedicou parte de seus estudos à busca da perfeição geométrica, analisando as características dos poliedros convexos. Assim, ele propôs que, para satisfa zer essa perfeição, independentemente das dimensões ou grandezas, um poliedro deveria admitir uma regularidade cardinal nas quantidades de elementos determinados pelos entes primitivos da Geometria.

Isso significa que o poliedro deve ter uma regularidade no número de arestas que partem de cada vértice e no número de arestas que cercam cada face. Desse modo, Platão impôs as seguintes características aos sólidos estudados:

I Todas as faces devem ter o mesmo número *x* de lados, com $x \geq 3$

II Todos os vértices devem ser extremidades do mesmo número *y* de arestas, com $y \geq 3$

III. O poliedro deve ser convexo.

Da primeira imposição, temos, na relação $F = \sum_{i=3}^{\infty} F_i$, que só há uma parcela não nula, a parcela F_x, ou seja, $F_i = 0$ para todo $i \neq x$ Portanto, nos poliedros de Platão, $F = F_x$ e:

$$\sum_{i=3}^{\infty} i \cdot F_i = 2A$$

$$0 + 0 + ... + x \cdot F_x + 0 + 0 + 0 + ... = 2A$$

$$x \cdot F_x = 2A$$

$$F_x = \frac{2A}{x} \Rightarrow F = \frac{2A}{x}$$

Analogamente, da segunda imposição, temos, da relação $V = \sum_{i=3}^{\infty} V_i$, que $V = Vy$ e, da relação $\sum_{i=3}^{\infty} i \cdot V_i = 2A$, que $V = \frac{2A}{y}$.

Então, da terceira imposição, temos V A + F = 2, na qual podemos substituir as expressões obtidas para V e F até aqui, chegando à equação:

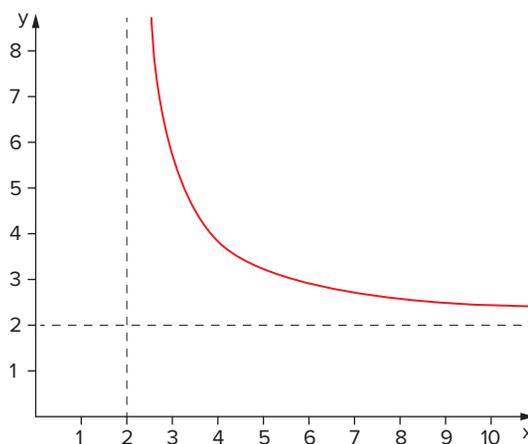
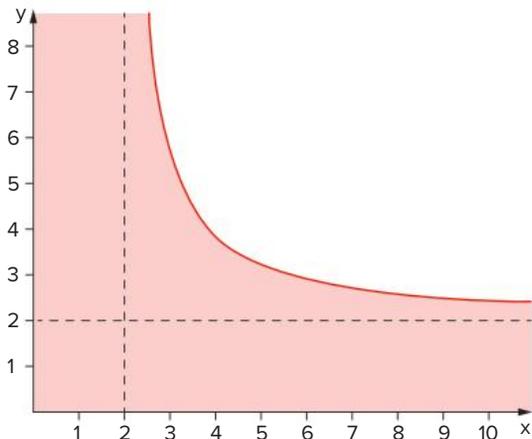
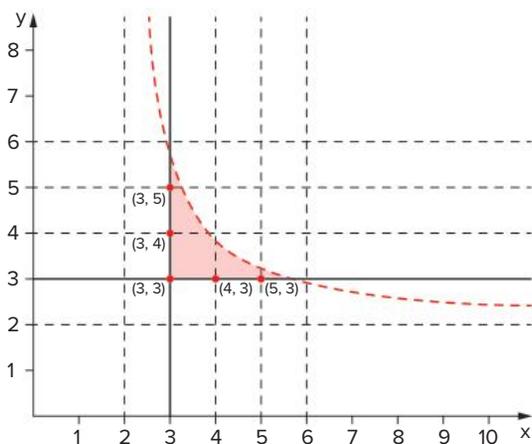
$$\frac{2A}{x} + A = \frac{2A}{y} \Rightarrow 2 + A\left(\frac{2}{x} \;\; 1 \;\; \frac{2}{y}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} - 1 + \frac{2}{y} = \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{A} + 1$$

Considerando que o valor da fração $\frac{2}{A}$ é necessariamente positivo, podemos concluir que o primeiro membro dessa última equação é maior que 1, ou seja, que os valores de *x* e *y* satisfazem a seguinte inequação:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} > 1$$

Observe o gráfico da curva de equação $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1$ no primeiro quadrante do plano cartesiano:

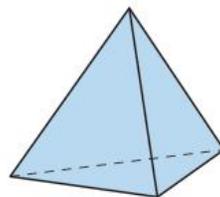
FRENTE 3

Os pontos desse quadrante que satisfazem a inequação $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}>1$ estão situados à esquerda e abaixo desse gráfico, pois, quanto maiores forem os valores de *x* e *y*, menor será o valor do primeiro membro da inequação

Lembrando que $x \geq 3$ e $y \geq 3$, a região do primeiro quadrante que contém as soluções inteiras da inequação $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}>1$ fica limitada pelas retas de equações $x=3$ e $y=3$

Nessa região, podem ser observadas as cinco únicas soluções inteiras do sistema de inequações gerado pelas imposições de Platão Essas soluções são os pares ordenados (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3) e (3, 5)

Como, nas equações $F=\frac{2A}{x}$ e $V=\frac{2A}{y}$, os números de faces e vértices desses poliedros dependem dos seus números de arestas, da equação $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{2}{A}+1$ vamos extrair uma função para obter os números de arestas de cada tipo de poliedro de Platão:

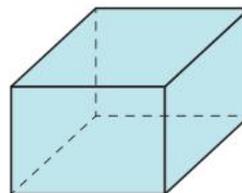
$$\frac{2}{A}+1=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\Rightarrow\frac{2}{A}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\Rightarrow\frac{1}{A}+\frac{1}{x}\ \ \frac{1}{y}\ \ \frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{A}=\frac{2x+2y\ \ xy}{2xy}\Rightarrow A=\frac{2xy}{2x+2y\ \ xy}$$

Assim, na primeira solução, temos $x = 3$ e $y = 3$ e, portanto, as faces do poliedro são triangulares, os vértices são triédricos e:

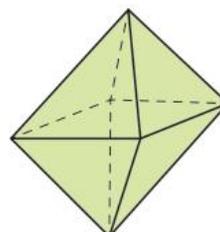
$$\begin{cases} A=\frac{2\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 3+2\cdot 3-3\cdot 3}=\frac{18}{6+6-9}=\frac{18}{3}=6 \\ V=\frac{2A}{y}=\frac{2\cdot 6}{3}=\frac{12}{3}=4 \\ F=\frac{2A}{x}=\frac{2\cdot 6}{3}=\frac{12}{3}=4 \end{cases}$$

Como o prefixo do nome do poliedro deve indicar seu número de faces, com $V = 4$, $A = 6$ e $F = 4$, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o tetraedro.

Na segunda solução do sistema, temos $x = 4$ e $y = 3$, portanto as faces do poliedro são quadrangulares, os vértices são triédricos e:

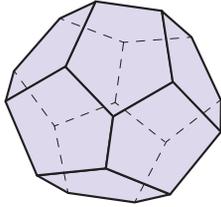
$$\begin{cases} A=\frac{2\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 4+2\cdot 3-4\cdot 3}=\frac{24}{8+6-12}=\frac{24}{2}=12 \\ V=\frac{2A}{y}=\frac{2\cdot 12}{3}=\frac{24}{3}=8 \\ F=\frac{2A}{x}=\frac{2\cdot 12}{4}=\frac{24}{4}=6 \end{cases}$$

Com $V = 8$, $A = 12$ e $\mathbf{F = 6}$, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **hexa**edro.

Na terceira solução do sistema, temos $x = 3$ e $y = 4$, portanto as faces do poliedro são triangulares, os vértices são tetraédricos e:

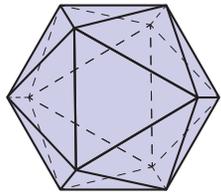
$$\begin{cases} A=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3+2\cdot 4\ \ \cdot 3\ \ 4}=\frac{24}{6+8\ \ \ 12}=\frac{24}{2}=12 \\ V=\frac{2A}{y}=\frac{2\cdot 12}{4}=\frac{24}{4}=6 \\ F=\frac{2A}{x}=\frac{2\cdot 12}{3}=\frac{24}{3}=8 \end{cases}$$

Com $V = 6$, $A = 12$ e $\mathbf{F = 8}$, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **octa**edro

Na quarta solução do sistema, temos x = 5 e y = 3, portanto as faces do poliedro são pentagonais, os vértices são triédricos e:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2\cdot5\cdot3}{2\cdot5+2\cdot3-5\cdot3} = \dfrac{30}{10+6-15} = \dfrac{30}{1} = 30 \\ V = \dfrac{2A}{y} = \dfrac{2\cdot30}{3} = \dfrac{60}{3} = 20 \\ F = \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2\cdot30}{5} = \dfrac{60}{5} = 12 \end{cases}$$

Com V = 20, A = 30 e **F = 12**, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **dodeca**edro.

Na quinta e última solução do sistema, temos x = 3 e y = 5, portanto as faces do poliedro são triangulares, os vértices são pentaédricos e:

$$\begin{cases} A = \dfrac{2\cdot3\cdot5}{2\cdot3+2\cdot5-3\cdot5} = \dfrac{30}{6+10-15} = \dfrac{30}{1} = 30 \\ V = \dfrac{2A}{y} = \dfrac{2\cdot30}{5} = \dfrac{60}{5} = 12 \\ F = \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2\cdot30}{3} = \dfrac{60}{3} = 20 \end{cases}$$

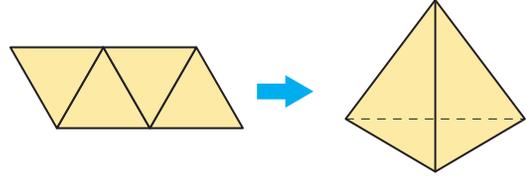
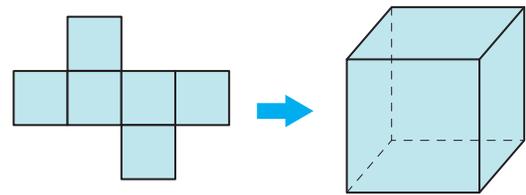
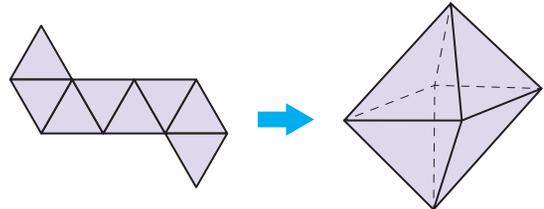
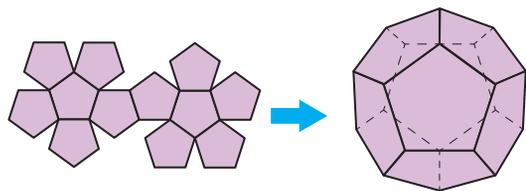
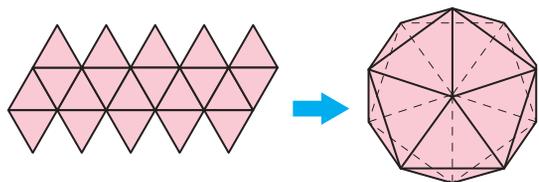
Com V = 12, A = 30 e **F = 20**, o poliedro de Platão obtido nessa solução é o **icosa**edro.

! Atenção

Veja as características dos cinco tipos de poliedros de Platão na seguinte tabela:

Nome	Faces	Arestas	Vértices
Tetraedro	4 triangulares	6	4 triédricos
Hexaedro	6 quadrangulares	12	8 triédricos
Octaedro	8 triangulares	12	6 tetraédricos
Dodecaedro	12 pentagonais	30	20 triédricos
Icosaedro	20 triangulares	30	12 pentaédricos

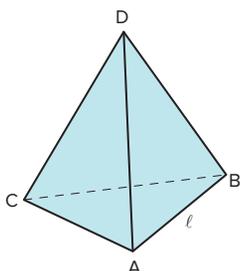
Poliedros regulares

São todos os poliedros de Platão cujas faces são polígonos regulares, ou seja, polígonos em que todos os lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos têm a mesma medida.

Assim, o tetraedro regular é cercado por quatro triângulos equiláteros.

O hexaedro regular (cubo) é cercado por seis quadrados.

O octaedro regular é cercado por oito triângulos equiláteros.

O dodecaedro regular é cercado por doze pentágonos regulares.

O icosaedro regular é cercado por vinte triângulos equiláteros.

Tetraedros regulares

São os poliedros de Platão que possuem a menor quantidade de elementos definidos pelos entes primitivos da Geometria: quatro vértices triédricos, seis arestas de mesmo comprimento e quatro faces triangulares.

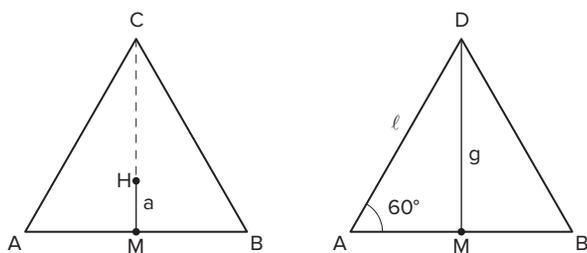
Depois dos cubos, os tetraedros provavelmente são os poliedros regulares com maior incidência nas questões de vestibulares. Por isso, é recomendável conhecer previamen te algumas relações métricas particulares desses sólidos.

Primeiramente, devemos observar que todos os ângu los internos das faces de um tetraedro medem 60°, pois essas faces são triângulos equiláteros. Depois, devemos considerar que os valores de sua área, seus apótemas, suas alturas e seu volume podem ser todos expressos em função do comprimento ℓ de suas arestas.

Na figura, os triângulos ABC, ABD, ACD e BCD são equiláteros e congruentes entre si. Portanto:

$$AB = AC = AD = BC = BD = CD = \ell$$

Como a área de um triângulo equilátero cujo lado tem comprimento ℓ é dada pela expressão $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e o tetraedro é cercado por quatro desses triângulos, sua área total é expressa por:

$$A_{total} = 4 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A_{total} = \ell^2\sqrt{3}$$

Considerando o triângulo ABC como a base desse tetraedro e tomando os pontos H e M, respectivamente, como centro da base e ponto médio da aresta $\overline{AB}$, po demos observar uma relação entre os comprimentos dos apótemas do tetraedro.

Sendo a o comprimento do apótema da base $\overline{HM}$, o teorema do baricentro do triângulo garante que os seg mentos CH e CM medem, respectivamente, o dobro e o triplo de HM Assim:

$$\begin{cases} HM = a \\ CH = 2a \\ CM = 3a \end{cases}$$

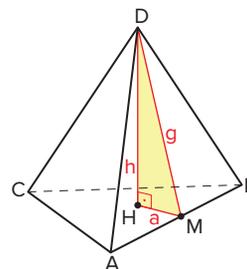
Da congruência entre os triângulos ABC e ABD, concluímos que o comprimento *g* do apótema $\overline{DM}$ do tetraedro é o mesmo da mediana $\overline{CM}$ de sua base, ou seja, DM = g = 3a

Contido na face lateral ABD, o triângulo AMD é retângulo no vértice M e seu ângulo interno de vértice A mede 60°. Assim, no triângulo AMD:

$$\text{sen}(60°) = \frac{DM}{AD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{g}{\ell} \Leftrightarrow 2g = \ell\sqrt{3} \Leftrightarrow g = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

E, da relação g = 3a, entre os apótemas do tetraedro regular, temos:

$$3a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Observando agora as posições desses apótemas no sólido espacial, podemos perceber a existência do triângulo retângulo DHM, em que $\overline{DH}$ é a altura do tetraedro.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DHM, temos:

$$a^2 + h^2 = g^2 \Leftrightarrow a^2 + h^2 = (3a)^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2 + h^2 = 9a^2 \Leftrightarrow h^2 = 8a^2$$

Substituindo $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ na última relação:

$$h^2 = 8 \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{24\ell^2}{36} \Leftrightarrow h^2 = \frac{2\ell^2}{3}$$

Assim, a altura do tetraedro regular pode ser expressa em função do comprimento das arestas:

$$h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Há também a versão racionalizada dessa expressão, que é:

$$h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$$

Porém, o uso da primeira forma, não racionalizada, torna mais simples a dedução da fórmula para o volume do tetraedro regular, que, por ser uma pirâmide, tem seu volume igual a um terço do produto da área de sua base pela medida da sua altura:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$$

Exercícios resolvidos

34 Uece 2018 Assinale a opção que corresponde à medida da altura do tetraedro regular cuja medida da aresta é igual a 3 m.

A $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m

B $\sqrt{6}$ m

C $\frac{\sqrt{6}}{2}$ m

D $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m

Resolução:

Usando a versão racionalizada da fórmula da altura do tetraedro: $h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$ m.

Alternativa: **B**

35 Uece 2015 A medida da aresta de um tetraedro regular com altura igual a cinco metros é

A $5\sqrt{2,5}$ m

B $5\sqrt{1,5}$ m

C $2\sqrt{1,5}$ m

D $3\sqrt{2,5}$ m

Resolução:

Usando a versão não racionalizada da fórmula da altura do tetraedro $h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, temos:

$$h = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 5 = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{1,5} \text{ m}$$

Alternativa: **B**

36 Fuvest 2016 Cada aresta do tetraedro regular ABCD mede 10 Por um ponto P na aresta $\overline{AC}$, passa o plano a paralelo às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ Dado que AP = 3, o quadrilátero determinado pelas interseções de a com as arestas do tetraedro tem área igual a:

A 21

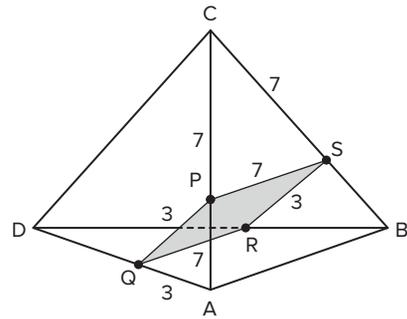
B $\frac{21\sqrt{2}}{2}$

C 30

D $\frac{30}{2}$

E $\frac{30\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos a seguinte situação:

Como as arestas $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ são ortogonais, o quadrilátero PSRQ formado é um retângulo de dimensões 3 e 7.

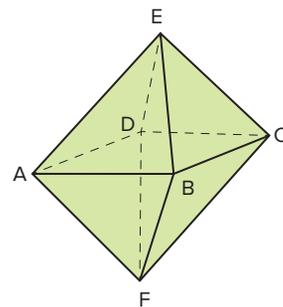
Assim, a área vale 21.

Alternativa: **A**

Octaedros regulares

São os poliedros de Platão que possuem seis vértices tetraédricos, 12 arestas de mesmo comprimento e oito faces em forma de triângulos equiláteros.

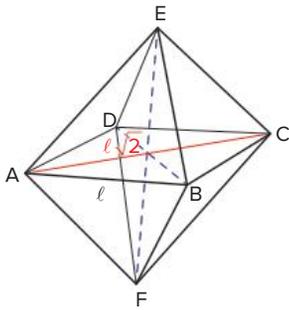
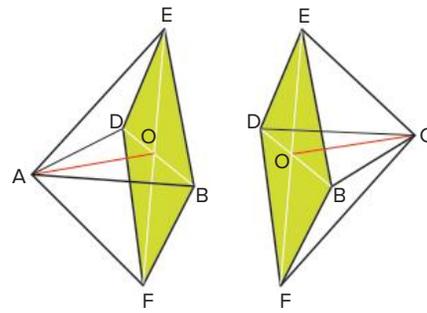
Além dos cubos e dos tetraedros, há uma incidência considerável desse tipo de poliedro entre as questões de vestibulares. Por isso, também é recomendável conhecer previamente algumas relações métricas particulares desses sólidos

Quanto aos ângulos internos das faces, novamente temos todos medindo 60°, pois as faces do octaedro regular são triângulos equiláteros. As medidas da área, das diagonais e do volume também podem ser expressas em função do comprimento ℓ de suas arestas

Na figura, os triângulos ABE, ABF, ADE, ADF, BCE, BCF, CDE e CDF são equiláteros e congruentes entre si. Portanto, AB = AD = AE = AF = BC = BE = BF = CD = CE = CF = = DE = DF = ℓ.

Como a área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada pela expressão $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e o octaedro é cercado por oito desses triângulos, sua área total é expressa por:

$$A_{total} = 8 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A_{total} = 2\ell^2\sqrt{3}$$

FRENTE 3

Ainda na figura, os quadriláteros ABCD, AECF e BEDF são quadrados congruentes. Portanto, as diagonais do octaedro medem $AC = BD = EF = \ell\sqrt{2}$.

Agora, para encontrar o volume desse sólido, basta observar que qualquer plano que contenha um dos quadrados mencionados divide-o em duas pirâmides quadrangulares regulares. A figura a seguir considera, por exemplo, o plano que contém o quadrado BEDF para dividir o octaedro nas pirâmides congruentes ABEDF e CBEDF, cujas alturas são os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{CO}$ que ligam os vértices dessas pirâmides ao centro de suas bases:

A base dessas pirâmides é o quadrado BEDF de lado ℓ, cuja área é ℓ^2.

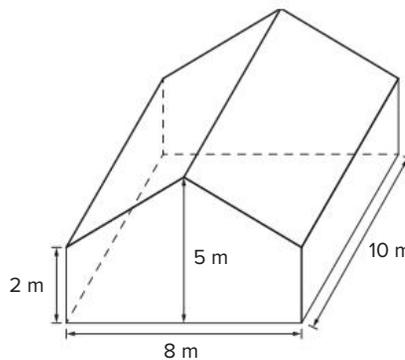
Como o centro do octaedro é o ponto médio de suas diagonais, as alturas das pirâmides obtidas pela seção medem a metade da diagonal de um quadrado de lado ℓ.

Assim, $h = AO = CO = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

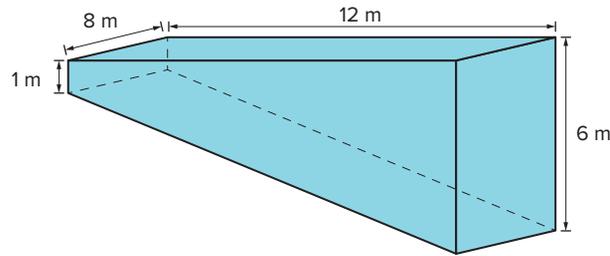
O volume do octaedro regular é igual ao dobro do volume de uma dessas pirâmides:

$$V = \frac{2}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{2}{3} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{3}$$

Revisando

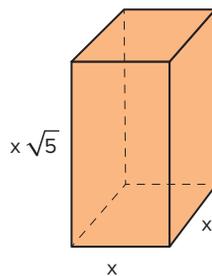
1 A figura a seguir representa o projeto de um galpão em forma de um prisma reto cuja fachada tem o formato de um pentágono irregular, o qual possui simetria bilateral, dois lados verticais com 2 m de comprimento e um lado horizontal com 8 m de comprimento.

Depois de construída, a superfície exterior do teto do galpão será pintada com uma tinta impermeável que é vendida somente em galões de 5 litros ao custo de R$ 96,00 cada galão. Sabendo que um litro dessa tinta é suficiente para pintar uma área de 8 metros quadrados, quanto será gasto na compra da tinta para a pintura do teto do galpão?

A R$ 80,00
B R$ 120,00
C R$ 144,00
D R$ 240,00
E R$ 288,00

2 A figura a seguir representa uma piscina de mergulho no formato de um prisma reto

Essa piscina tem 8 m de largura por 12 m de comprimento, e a profundidade varia de 1 m na parte rasa até 6 m na parte funda.

Sabendo que o revestimento da superfície interna dessa piscina custa R$ 20,00 o metro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor do custo total desse revestimento.

A R$ 4.500,00
B R$ 4.620,00
C R$ 4.750,00
D R$ 4.880,00
E R$ 5.000,00

3 A base de um paralelepípedo reto é um quadrado de lado *x* metros, a altura é igual a $x\sqrt{5}$ metros, e seu volume é igual a $0{,}2\ m^3$

Sabendo que para calcular o volume de um paralelepípedo basta multiplicar a área de sua base pelo valor de sua altura, pode-se concluir que o valor de *x*, em metros, é igual a:

A $\sqrt{5}$
B $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C $\sqrt[3]{5}$
D $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$
E $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$

Texto para as questões de **4** a **6**.

As peças de um jogo de tabuleiro têm a forma de uma pirâmide irregular, como mostra a figura a seguir.

A empresa que fabrica esse jogo obtém as peças efetuando dois cortes planos em um bloco sólido que tem a forma de um prisma reto cuja base é um quadrado de lado 3 cm e cuja altura mede 4 cm A figura a seguir ilustra o formato da peça:

A pirâmide GABCD é obtida a partir do prisma ABCDEFGH efetuando-se, primeiro, um corte pelo plano que passa pelos pontos A, B e G e, depois, um corte pelo plano que passa pelos pontos A, D e G.

4 O volume de cada peça desse jogo é igual a:

A 9 cm^3
B 12 cm^3
C 18 cm^3
D 24 cm^3
E 36 cm^3

5 Se o material de que é feito cada bloco pode ser derretido e reutilizado, então, a partir de duas centenas de blocos, pode-se obter até:

A 600 peças.
B 400 peças.
C 300 peças.
D 200 peças.
E 100 peças.

6 Na regra desse jogo, vence quem conseguir posicionar, na mesma casa do tabuleiro, o número mínimo de peças necessárias para montar uma pirâmide regular. Esta deve ser obtida fazendo-se coincidir faces congruentes de peças diferentes. Qual é esse número mínimo de peças?

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

7 Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular cujas arestas da base medem $2\sqrt{3}$ cm e as arestas laterais medem $2\sqrt{7}$ cm.

8 A tradicional bola de futebol é, primeiramente, construída como um poliedro de faces pentagonais (pretas) e hexagonais (brancas). Essas faces são recortadas em couro e costuradas umas nas outras ao longo de suas arestas envolvendo uma bexiga de borracha

Barcin/iStockphoto.com

Depois, ao encher a bexiga com ar, as peças de couro se deformam e o poliedro costurado em couro assume um aspecto esférico.
Sabendo que uma bola de futebol tem em sua formação 12 peças pentagonais e 20 peças hexagonais, determine o número de costuras sobre as arestas do sólido que dá forma à bola de futebol

A 100
B 90
C 80
D 70
E 60

9 Sabe-se que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. As figuras a seguir representam cada um deles:

Considerando que todos os poliedros representados por essas figuras têm suas arestas com a mesma medida, então as áreas das superfícies dos poliedros regulares que têm suas faces triangulares são diretamente proporcionais aos números:

A 2, 3 e 5.
B 2, 3 e 4.
C 1, 2 e 5.
D 1, 3 e 4.
E 1, 4 e 5.

10 Quanto mede a aresta de um tetraedro regular de altura $10\sqrt{3}$ cm?

Exercícios propostos

1 **Enem 2017** Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

Figura 1

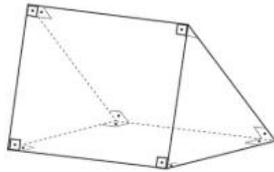
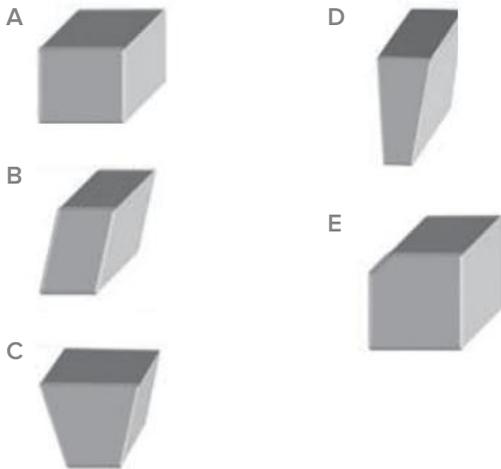
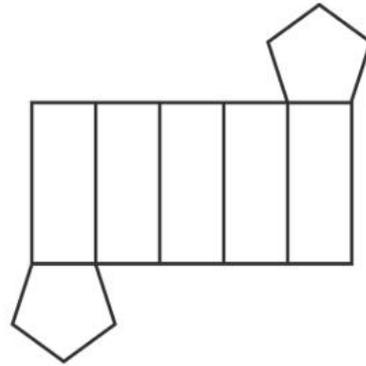



Figura 2

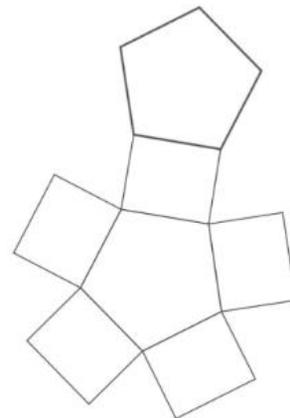
Romero, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

A tetraedro
B pirâmide retangular
C tronco de pirâmide retangular
D prisma quadrangular reto.
E prisma triangular reto.

2 **Enem** Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos.
Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

3 **Enem 2014** Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura.

Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?

A 10
B 12
C 14
D 15
E 16

4 **IFSP 2016** A figura abaixo representa a planificação de um poliedro P:

Avalie as afirmações I, II e III sobre o poliedro representado pela planificação:

I O número de arestas do poliedro P corresponde a uma vez e meia o número de vértices
II O poliedro P tem, pelo menos, duas faces paralelas
III O poliedro P pode ser classificado como pentágono.

Contém uma afirmação verdadeira:

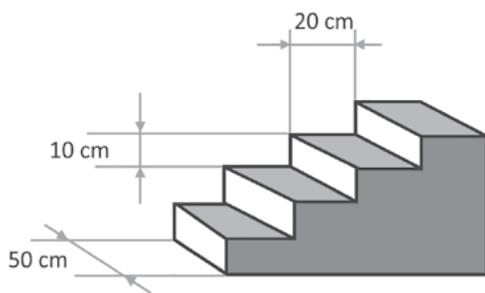
A apenas II
B apenas I e II
C apenas I e III
D apenas II e III
E I, II e III

5 **Enem 2013** As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Disponível em: www.flickr.com Acesso em: 27 mar 2012

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

A menor que 100 m^2.
B entre 100 m^2 e 300 m^2.
C entre 300 m^2 e 500 m^2
D entre 500 m^2 e 700 m^2.
E maior que 700 m^2.

6 **Fuvest 2019** A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto retângulo A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a

A 2,1 m^3.
B 2,3 m^3.
C 3,0 m^3.
D 4,2 m^3.
E 6,0 m^3.

7 **UEM 2017** Em um prisma quadrangular regular, cuja altura mede o dobro dos lados da base, inscrevem-se duas pirâmides regulares com cada base coincidindo com uma das bases do prisma, e com altura igual à metade da altura do prisma.
Então, é **correto** afirmar que:

01 As faces laterais do prisma são paralelas às faces laterais das pirâmides.
02 As arestas laterais da pirâmide são maiores que a altura do prisma.
04 Os vértices das pirâmides coincidem em um ponto equidistante das bases do prisma.
08 A soma dos volumes das pirâmides é igual a $\frac{2}{3}$ do volume do prisma.
16 O complementar das pirâmides no prisma é constituído por quatro pirâmides, cujas bases são retângulos.

Soma:

Texto para as questões **8** e **9**.

Contêiner é um equipamento utilizado para o transporte de cargas em navios e trens e consiste em uma grande caixa de metal em forma de paralelepípedo

zentilia/iStockphoto.com

As seis faces retangulares de um container são bastante espessas e, juntas, ocupam de 13% a 15% do volume do paralelepípedo A base é a de maior espessura, pois tem que sustentar a carga A face frontal, onde fica a entrada, tem espessura ligeiramente maior que a do fundo, e as duas faces laterais têm a mesma espessura. A tabela a seguir apresenta algumas das principais características de três tipos distintos de contêineres marítimos.

		Tipo I	Tipo II	Tipo III
Medidas externas (mm)	Comprimento	6058	12192	12192
	Largura	2438	2438	2438
	Altura	2591	2591	2895
Medidas internas (mm)	Comprimento	5910	12044	12032
	Largura	2340	2342	2350
	Altura	2388	2380	2695
Entradas (mm)	Largura	2326	2337	2338
	Altura	2282	2280	2585
Peso (kg)	Vazio	2080	3550	4150
	Carga máxima	21920	26930	26330
	Total	24000	30480	30330

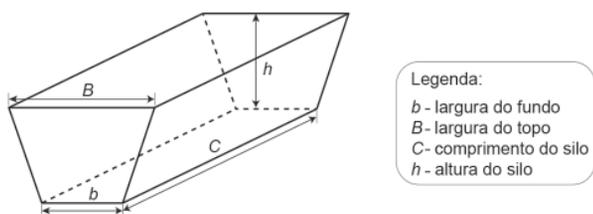
8 Entre os tipos I, II e III de contêiner, o de maior capacidade de carga, o de maior capacidade cúbica e o que tem as faces laterais de maior espessura são, respectivamente, os tipos:

A I, II e III.
B III, II e I
C III, II e II.
D II, III e I
E II, III e II.

9 As remessas periódicas de peças automotivas para o Brasil, feitas por certa montadora italiana, costumavam ser transportadas em 8 contêineres do tipo II, todos no limite de sua carga máxima.
Depois de um tempo, esses contêineres precisaram de manutenção e, como esta seria demorada, a montadora precisou alugar outras unidades para continuar fazendo suas remessas para o Brasil.
Qual é o número mínimo de contêineres do tipo I necessário para enviar uma remessa equivalente à de costume?

A 9
B 10
C 11
D 12
E 13

10 **Enem 2014** Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.

Legenda:
b - largura do fundo
B - largura do topo
C - comprimento do silo
h - altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

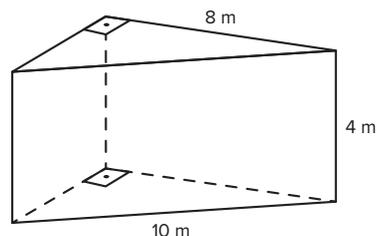
EMBRAPA Gado de corte Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

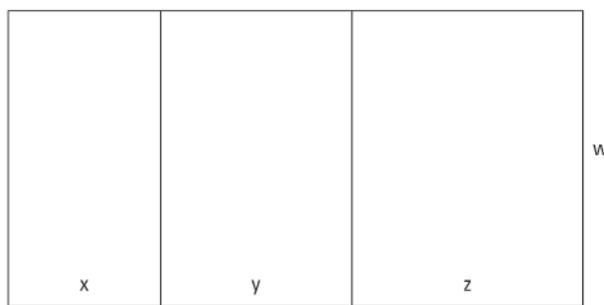
Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

A 110.
B 125.
C 130.
D 220.
E 260.

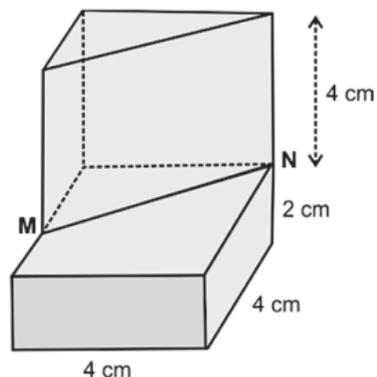
11 **UEMG 2018** Um *design* projetou um chaveiro no forma to de um prisma triangular reto com 12 cm de altura. Sabe-se que as arestas da base formam um triângulo retângulo com catetos de medidas 6 cm e 8 cm. Para cobrir todas as faces desse prisma, adquirindo a quantidade suficiente de papel adesivo, e, com isso, evitar o desperdício, será preciso saber a área total da superfície desse prisma. Fazendo os cálculos cor retos, obtém se que a área total desse prisma mede

A 336 cm^2
B 324 cm^2.
C 316 cm^2.
D 312 cm^2.

12 **UPE 2018** Qual é a capacidade, em litros, de uma cisterna que tem a forma da figura abaixo?

A $3,2 \times 10^4$
B $5,2 \times 10^3$
C $6,4 \times 10^3$
D $9,6 \times 10^4$
E $10,5 \times 10^4$

13 **ESPM-SP 2018** A figura abaixo representa a planificação da superfície lateral de um prisma triangular reto, onde as medidas x, y, z e w são números inteiros consecutivos, nessa ordem.

Se a soma das medidas de todas as arestas desse prisma é 42 cm, podemos afirmar que seu volume é de:

A 36 cm^3
B 42 cm^3
C 48 cm^3
D 54 cm^3
E 60 cm^3

14 **UPE 2016** O sólido representado a seguir foi obtido acoplando-se um prisma triangular reto de 4 cm de altura a um paralelepípedo reto de dimensões 4 cm, 4 cm e 2 cm, conforme a figura Se M é ponto médio da aresta do paralelepípedo, qual é a área total da superfície do referido sólido?
Adote $\sqrt{5} \cong 2,2$.

A 99,6 cm^2
B 103,6 cm^2
C 105,6 cm^2
D 107,6 cm^2
E 109,6 cm^2

15 **UEPG 2017** Uma caixa A tem a forma de um prisma regular triangular e uma caixa B tem a forma de um prisma hexagonal regular. Se o lado da base da caixa A tem o dobro da medida do lado da base da caixa B, assinale o que for correto.

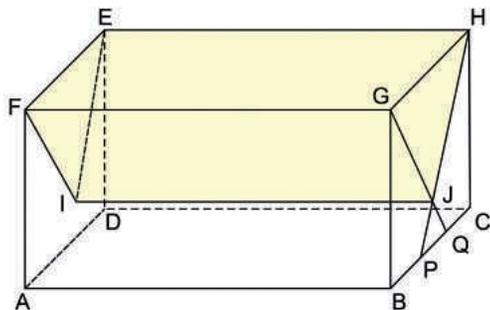
01 A razão entre as áreas da base de A e B é $\frac{2}{3}$.

02 Se a altura de A for a metade da altura de B, então, o volume de B é igual ao triplo do volume de A.

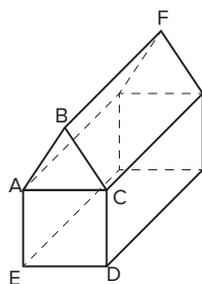
04 Para que os volumes sejam iguais, a altura de B deve ser o dobro da altura de A.

08 Se as alturas das caixas são iguais, a área lateral de B é o dobro da de A.

Soma:

16 **FGV-SP 2018** Sobre a face quadrada BCHG do paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH foram traçados $\overline{GQ}$ e $\overline{HP}$, intersectando-se em J, com P e Q dividindo $\overline{BC}$ em três segmentos congruentes tais que BP = PQ = QC. Sabe-se ainda que HE = 8 cm e que GJHEFI é um prisma reto de volume 81 cm^3.

O volume do paralelepípedo ABCDEFGH, em cm^3, é igual a

A 243.
B 216.
C 192.
D 96.
E 72.

17 Na figura a seguir, os pontos A, B e C formam um triângulo equilátero de lado 4 cm, os pontos A, C, D e E formam um quadrado e o segmento $\overline{BF}$ tem o dobro do tamanho de $\overline{CD}$.

Considerando que a figura representa um prisma reto, com os dados apresentados, verifica-se que o quadrado da distância do ponto F ao ponto E é, em cm^2:

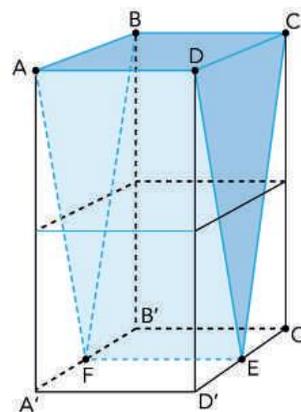
A $8\sqrt{3}$

B $8(\sqrt{3}-1)$

C $4(4+\sqrt{3})$

D $64\sqrt{3}$

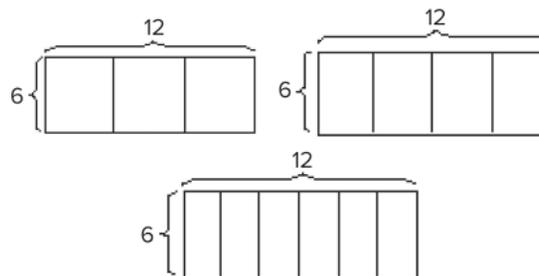
E $16(6+\sqrt{3})$

18 **Uerj 2017** Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA'B'C'D'. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios F e E das arestas A'B' e C'D', respectivamente. A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido ABCDEF, conforme indica a figura a seguir.

O volume do sólido ABCDEF, em cm^3, é igual a:

A 4
B 6
C 8
D 12

19 **Uepa 2014** A natureza é uma fonte inesgotável de comunicação de saberes necessários à sobrevivência da espécie humana, por exemplo, estudos de apicultores americanos comprovam que as abelhas constituem uma sociedade organizada e que elas sabem qual o formato do alvéolo que comporta a maior quantidade de mel.

(Texto Adaptado: "Contador", Paulo Roberto Martins. A Matemática na arte e na vida 2ª Ed rev São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.)

Um professor de matemática, durante uma aula de geometria, apresentou aos alunos 3 pedaços de cartolina, cada um medindo 6 cm de largura e 12 cm de comprimento, divididos em partes iguais, conforme figuras abaixo:

Dobrando os pedaços de cartolina nas posições indicadas, obtemos representações de prismas retos

com as mesmas áreas laterais e base triangular, qua drangular e hexagonal Sendo $\mathbf{V_3}$ o volume do prisma de base triangular, $\mathbf{V_4}$ o volume do prisma de base quadrangular e $\mathbf{V_6}$ o volume do prisma de base hexagonal, é correto afirmar que:

Adote: $\sqrt{3} = 1{,}7$.

A $V_3 < V_6 < V_4$
B $V_3 < V_4 < V_6$
C $V_4 < V_3 < V_6$
D $V_6 < V_3 < V_4$
E $V_6 < V_4 < V_3$

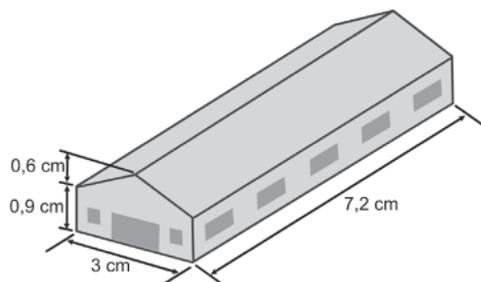
20 Considere a tabela de informações sobre dois pris mas regulares A e B, de mesmo volume:

	Base	Aresta da base	Altura
Prisma A	quadrada	30 cm	$10\sqrt{3}$ cm
Prisma B	hexagonal	20 cm	x

Nessas condições, a altura do prisma B é igual a:
A 12 cm
B 13 cm
C 14 cm
D 15 cm
E 16 cm

21 **Acafe 2018** Uma caixa d'água em formato cúbico tem a capacidade de armazenar 8000 litros de água. Devido a problemas nessa caixa d'água, foi realizada a troca por outra em formato de prisma hexagonal regular.
Sabendo que a altura e a capacidade das duas caixas não se alteraram, qual o perímetro da base desse novo reservatório?

Considere: $\sqrt[4]{12} \cong 1{,}86$.
A 4,54 metros.
B 6,44 metros.
C 8,54 metros.
D 7,44 metros.

22 **FGV 2013** A figura mostra a maquete do depósito a ser construído. A escala é 1 : 500, ou seja, 1 cm, na representação, corresponde a 500 cm na realidade.

Qual será a capacidade, em metros cúbicos, do depósito?

23 **Enem 2015** Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.
Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?
A 6
B 8
C 14
D 24
E 30

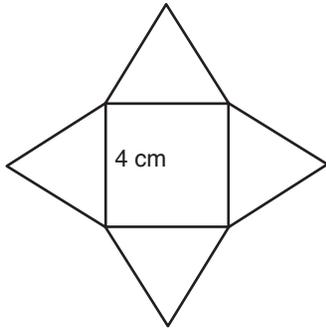
24 **UCS 2015** Aumentando-se a medida "a" da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular em 30% e diminuindo-se sua altura "h" em 30%, qual será a variação aproximada no volume da pirâmide?
A Aumentará 18%.
B Aumentará 30%.
C Diminuirá 18%.
D Diminuirá 30%.
E Não haverá variação.

25 **Enem 2016** A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.

Disponível em: www.mauroweigel.blogspot.com. Acesso em: 23 nov. 2011

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é
A 97,0.
B 136,8.
C 173,7.
D 189,3.
E 240,0.

26 Considere uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema mede 13 cm e cuja aresta da base mede 10 cm Qual o volume, em cm^3, dessa pirâmide?

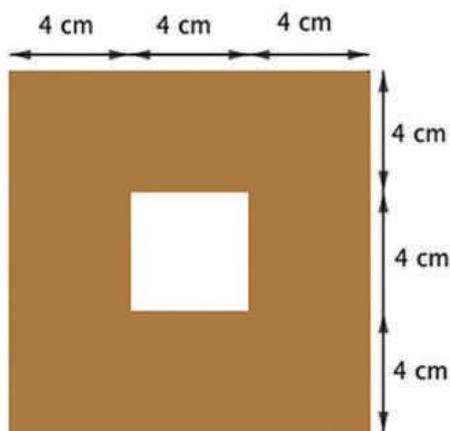
27 **UFPR 2016** Temos, abaixo, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?

A $\frac{16}{3}\sqrt{3}\ cm^3$.

B $16\sqrt{3}\ cm^3$.

C $32\ cm^3$.

D $\frac{32}{3}\sqrt{2}\ cm^3$

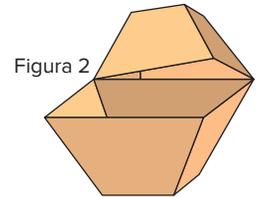
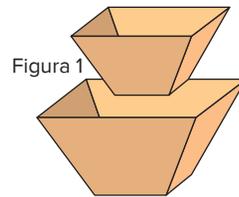
E $\frac{64}{3}\ cm^3$

28 **FICSAE 2018** Uma peça tem a forma de uma pirâmide reta, de base quadrada, com 15 cm de altura e é feita de madeira maciça. A partir da base dessa peça, foi escavado um orifício na forma de um prisma de base quadrada. A figura mostra a visão inferior da base da peça (base da pirâmide).

Esse orifício tem a maior profundidade possível, isto é, sem atravessar as faces laterais da pirâmide. O volume de madeira, em cm^3, que essa peça contém é

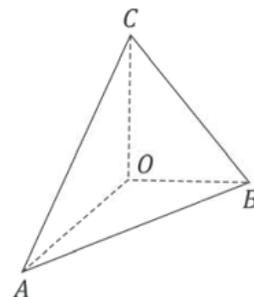
A 560.
B 590.
C 620.
D 640.

29 **FICSAE 2017** Para a feira cultural da escola, um grupo de alunos irá construir uma pirâmide reta de base quadrada. A pirâmide terá 3 m de altura e cada aresta da base medirá 2 m. A lateral da pirâmide será coberta com folhas quadradas de papel, que poderão ser cortadas para um melhor acabamento.
Se a medida do lado de cada folha é igual a 20 cm, o número mínimo dessas folhas necessárias à execução do trabalho será
Utilize $\sqrt{10} \cong 3,2$.

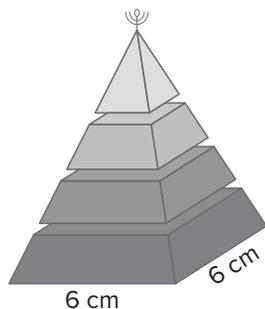
A 285
B 301
C 320
D 333

30 Uma floricultura vende vasos de flores em dois tamanhos distintos. Os vasos têm o formato de um tronco de pirâmide quadrangular e são todos semelhantes, como mostra a figura 1:

Um cliente quis estimar a razão entre seus volumes e, para isso, posicionou um vaso de cada tamanho de forma a perceber que a diagonal da abertura do vaso menor coincidia com uma das arestas da abertura do vaso maior, como mostra a figura 2.
Sendo assim, esse cliente deve concluir que o volume do vaso maior é, aproximadamente, igual ao:

A dobro do volume do vaso menor.
B triplo do volume do vaso menor.
C quádruplo do volume do vaso menor.
D quíntuplo do volume do vaso menor.
E sêxtuplo do volume do vaso menor.

31 **Fuvest 2018 (Adapt.)**
Para responder a questão considere a figura correspondente.

Num tetraedro OABC, os ângulo $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$ medem 90° Sendo a e b as medidas dos ângulos $A\hat{C}O$ e $B\hat{C}O$, respectivamente, expresse o cosseno do ângulo $A\hat{C}B$ em função de a e b

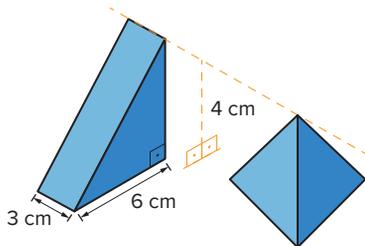
FRENTE 3

32 **Enem** Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

A 156 cm^3
B 189 cm^3
C 192 cm^3
D 216 cm^3
E 540 cm^3

33 **UFRGS 2012** Se duplicarmos a medida da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular e reduzirmos sua altura à metade, o volume desta pirâmide:

A será reduzido à quarta parte.
B será reduzido à metade.
C permanecerá inalterado.
D será duplicado.
E aumentará quatro vezes.

34 **Famerp 2018** A figura indica um prisma reto triangular e uma pirâmide regular de base quadrada. A altura desses sólidos, em relação ao plano em que ambos estão apoiados, é igual a 4 cm, como indicam as figuras.

Se os sólidos possuírem o mesmo volume, a aresta da base da pirâmide, em centímetros, será igual a

A $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C $\sqrt{3}$

D $3\sqrt{3}$

E $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

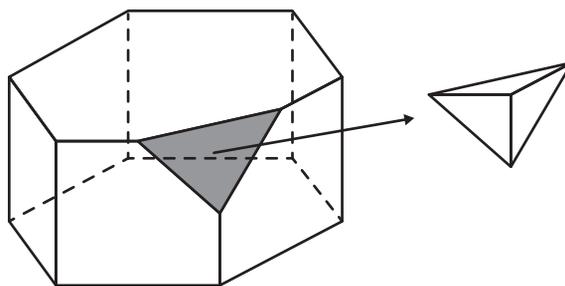
35 Qual é a medida da altura de uma pirâmide triangular regular cuja aresta da base mede 4 e cujo volume é igual ao volume de um cubo de aresta $2\sqrt{3}$?

36 **Enem 2016** É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada
Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

A Quadrados, apenas.
B Triângulos e quadrados, apenas.
C Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
D Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
E Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

37 **Uece 2018** Considere uma pirâmide regular hexagonal reta cuja medida da altura é 30 m e cuja base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 10 m. Desejando-se pintar todas as faces triangulares dessa pirâmide, a medida da área a ser pintada, em m^2, é

A $115\sqrt{39}$.
B $150\sqrt{39}$.
C $125\sqrt{39}$.
D $140\sqrt{39}$

38 **Insper 2012** De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.

O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma.

O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é
A 24.
B 20
C 18
D 16
E 12

39 **Enem 2016** Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler $V \quad A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente
Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?
A $2V \quad 4F = 4$
B $2V \quad 2F = 4$
C $2V \quad F = 4$
D $2V + F = 4$
E $2V + 5F = 4$

40 **Uece 2016** Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas desse poliedro é
A 100
B 120
C 90
D 80

41 **Enem 2016** Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

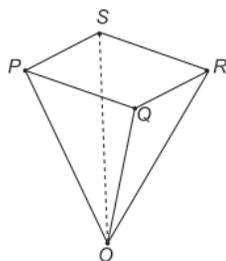



Figura 1

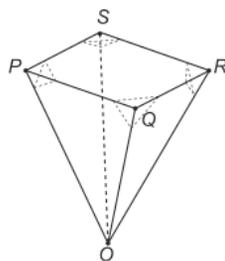



Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a
A 9, 20 e 13
B 3, 24 e 13
C 7, 15 e 12
D 10, 16 e 5.
E 11, 16 e 5

42 Uma forma geométrica obtida na lapidação de pedras preciosas consiste em um poliedro convexo com exatamente 97 faces, sendo 32 triângulos, 64 quadriláteros e 1 octógono

Frederik Christoffersen/ iStockphoto.com

Quantos vértices este poliedro possui?
A 80
B 83
C 85
D 88
E 90

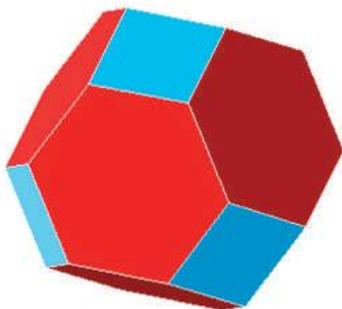
43 **Enem 2017** O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.
Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a
A 10.
B 12.
C 25.
D 42.
E 50.

44 **UEPG 2018** Dois poliedros regulares são construídos utilizando folhas de cartolina. Um desses poliedros tem faces pentagonais e o outro tem faces triangulares. Se a soma de todas as faces desses poliedros é 20, assinale o que for correto.
01 A soma dos ângulos de todas as faces do poliedro que tem faces pentagonais é 6480°.
02 O poliedro com faces triangulares tem 8 vértices a menos que o outro.
04 Os dois poliedros têm o mesmo número de arestas.
08 A soma de todas as arestas desses poliedros é maior que 40.

Soma:

45 **UFPR 2016** Um prisma possui 17 faces, incluindo as faces laterais e as bases inferior e superior. Uma pirâmide cuja base é idêntica à base do prisma possui quantas arestas?

A 26.
B 28.
C 30.
D 32.
E 24.

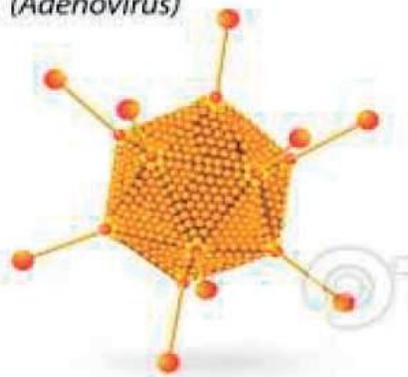
46 **UPF 2015** O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular. A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:

A 2160°
B 5760°
C 7920°
D 10080°
E 13680°

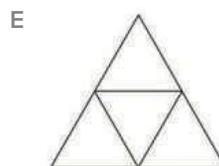
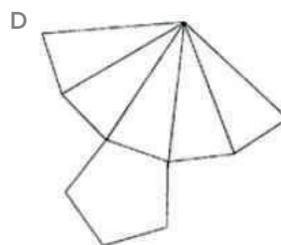
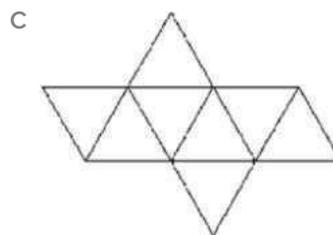
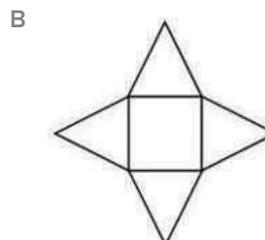
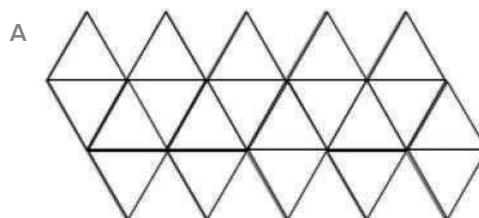
47 **Uerj 2016** Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.

Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo

A soma V + F + A é igual a:

A 102
B 106
C 110
D 112

48 **UFJF 2017** Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico.

Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

A
B
C
D
E

49 Uece 2016 Se a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide (incluindo a base) é 3600 graus, então, a base da pirâmide é um polígono com:

A 9 lados.
B 10 lados.
C 11 lados.
D 12 lados.

50 Fuvest 2013 Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é

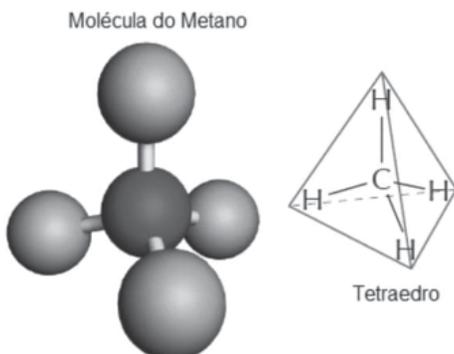
A $2\sqrt{3}$
B 4
C $3\sqrt{2}$
D $3\sqrt{3}$
E 6

51 Mackenzie 2017 A altura, em cm, de um tetraedro regular cuja área total mede $48\sqrt{3}$ cm^2 é:

A $2\sqrt{2}$
B $4\sqrt{2}$
C $2\sqrt{3}$
D $4\sqrt{3}$
E 6

52 FGV-RJ 2016 Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.
A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

A 56.
B 32.
C 30.
D 36.
E 48.

53 UEL 2015 Na molécula do Metano (CH_4), o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de hidrogênio

Considerando que as arestas ℓ do tetraedro regular medem 6 cm e que a altura mede $h = \frac{1}{3}\ell\sqrt{6}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o volume desse tetraedro.

A $3\sqrt{3}$ cm^3
B $18\sqrt{2}$ cm^3
C $18\sqrt{3}$ cm^3
D $36\sqrt{2}$ cm^3
E $54\sqrt{2}$ cm^3

54 Fuvest 2012 Em um tetraedro regular de lado a, a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a

A $a\sqrt{3}$
B $a\sqrt{2}$
C $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
D $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
E $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

55 Uern 2015 Um tetraedro regular é um tipo particular de pirâmide regular no qual qualquer uma de suas faces pode ser considerada base, haja vista ser formado por quatro regiões triangulares congruentes e equiláteras. Considerando essa informação, a área total de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm é, em cm^2:
(Considere $\sqrt{3} = 1,7$)

A 27,2
B 42,5.
C 61,2
D 83,3

56 Uepa 2015 Leia o texto para responder à questão.

A arte é uma forma de expressão da racionalidade humana. O origami é uma técnica japonesa baseada em juntar módulos individuais de papel dobrando para criar prismas e cubos, conforme ilustra a figura abaixo.

Fonte: http://noticias.br.msn.com/fotos/escocesa-explora-varia%c3%a7%c3%b5es-tonais-de-luz-sobre papel em-esculturas-de-origami-2?page=2#image=2

Todas as pirâmides ilustradas na composição artística acima são tetraedros regulares de base triangular de aresta L = 1 dm ligados uns aos outros, por meio de suas arestas e mantendo suas bases sobre um mes mo plano Nestas condições, a área total, em dm^2, de um desses tetraedros regulares é:

A $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\sqrt{3}$

D $2\sqrt{2}$

E $2\sqrt{3}$

57 **UEL 2015** Leia o texto a seguir

Originalmente os dados eram feitos de osso, marfim ou argila Há evidências da existência deles no Paquistão, Afeganistão e noroeste da Índia, datando de 3500 a.C. Os dados cúbicos de argila continham de 1 a 6 pontos, dispostos de tal maneira que a soma dos pontos de cada par de faces opostas é sete

(Adaptado de: Museu Arqueológico do Red Fort. Delhi, Índia.)

Atualmente, além dos dados em forma de cubo (hexaedro), encontram se dados em vários formatos, inclusive esféricos, como mostram as figuras a seguir

Apesar do formato esférico, ao ser lançado, o dado mostra pontos de um a seis, como se fosse um dado cúbico. Isso acontece porque no interior da esfera existe uma cavidade em forma de octaedro, na qual existe um peso (um chumbinho) que se aloja em um dos vértices do octaedro.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica.

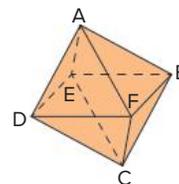
A O número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.

B O número de vértices do octaedro é diferente do número de faces do hexaedro.

C O número de arestas do octaedro é igual ao número de arestas do hexaedro.

D O número de faces do octaedro é igual ao número de vértices do hexaedro.

E O número de faces do octaedro é diferente do número de vértices do hexaedro.

58 A figura a seguir representa um octaedro regular, que é um sólido cercado por oito triângulos equiláteros

Uma barra metálica com 3 m de comprimento será cortada em pedaços idênticos, que serão soldados uns aos outros de forma a obter um octaedro regular de aresta máxima. Depois de montado o octaedro, a distância entre os dois pedaços da barra usados para formar as arestas $\overline{AF}$ e $\overline{CE}$ será de

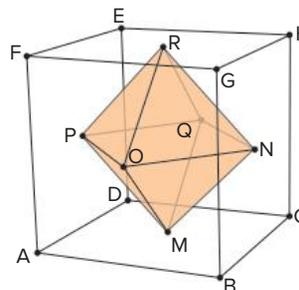
A 25 cm

B $25\sqrt{2}$ cm

C 37,5 cm

D 75 cm

E $75\sqrt{2}$ cm

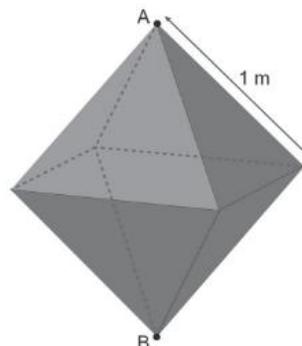
59 Um cristal de quartzo foi cortado em forma de um octaedro regular, MNOPQR, e teve seus vértices fixados nos centros das faces de uma caixa cúbica ABCDEFGH de acrílico com 12 cm de aresta, como mostra a figura:

Considerando esse cristal de quartzo, determine:

A a medida MN da aresta.

B a área da superfície total.

C a medida PN da diagonal.

D o volume.

60 **FMP 2016** A Figura mostra uma peça metálica que tem a forma de um octaedro regular, cujas arestas medem 1 metro.

A medida da distância entre os vértices A e B, em metros, é

A 1

B $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C 2

D $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E $\sqrt{2}$

Texto complementar

Topologia dos poliedros

O que é a Característica de Euler?

Todos sabemos que o número de vértices mais o número de faces dos poliedros usuais é igual ao número de arestas mais dois. Porém, será que esta relação se verifica para todo o poliedro? Tem algum tipo de aplicação ou trata-se de uma propriedade anedótica? Com a introdução de um invariante numérico básico em topologia, a característica de Euler, é possível encontrar respostas para todas estas indagações.

Em 1750, numa carta dirigida a Christian Goldbach, Leonhard Euler escreve:

"Em todo o sólido limitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de vértices excede em dois o número de arestas"

Com esta afirmação, Euler identifica três tipos de "peças" diferentes na superfície de tal sólido, de dimensões 0, 1 e 2 (vértices, arestas e faces) e estabelece a relação:

$$b_0 - b_1 + b_2 = 2$$

onde b_k designa o número de "peças k dimensionais", k = 0, 1, 2 A soma alternada b_0 b_1 + b_2 chama -se característica de Euler do poliedro (da superfície do poliedro, para sermos mais exatos) e a propriedade anterior enuncia se como "a superfície de um poliedro convexo tem característica de Euler igual a 2" Não é difícil pensar numa extensão da definição anterior: se um objeto está construído a partir de "peças" de dimensões 0, 1, ..., n, chamamos característica de Euler desse objeto à soma alternada do número de "peças" em cada dimensão

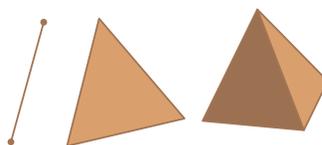



Figura 1

- Uma peça 1-dimensional com vértices A_0 e A_1 é um segmento de reta.
- Uma peça 2-dimensional com vértices A_0, A_1 e A_2 é um triângulo plano.
- Uma peça 3-dimensional com vértices A_0, A_1, A_2 e A_3 é um tetraedro sólido.

Um poliedro n-dimensional ou complexo simplicial n-dimensional é a reunião de um número finito de peças de dimensão menor ou igual a n de tal modo que duas peças diferentes têm interseção vazia ou intersectam-se ao longo de outra peça de dimensão inferior. A característica de Euler de um poliedro n-dimensional K, representada normalmente pela letra χ, é a soma alternada:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 - ... + (-1)^n \times b_k$$

onde b_k designa o número de "peças k-dimensionais", k = 0, 1, 2, ..., n.

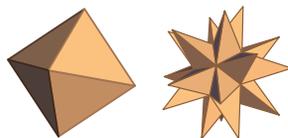



Figura 2

As superfícies do octaedro e do grande dodecaedro estrelado apresentados na figura 2 são bidimensionais com carac terística de Euler igual a 2, pois o valor de k varia de 0 até 2.

No caso da superfície do octaedro:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 = 8 - 12 + 6 = 2$$

No caso da superfície do poliedro estrelado:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 = 32 - 66 + 36 = 2.$$

Mas se consideramos, por exemplo, o octaedro sólido tridimensional com característica de Euler igual a 1, pois o valor de k agora deve variar de 0 até 3 e b_3 = 1 representa o próprio sólido:

No caso do octaedro sólido:

$$\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 8 - 12 + 6 - 1 = 1$$

A definição de poliedro bidimensional parece mais restritiva que a definição usual de poliedro, pois só consideramos como "peças bidimensionais" os triângulos e não quaisquer polígonos. Na realidade, como todo o polígono pode decompor-se em triângulos, essa restrição não faz qualquer diferença.

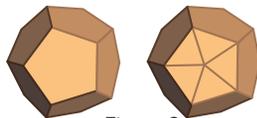



Figura 3

Além do mais, se partimos de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces poligonais e fizermos subdivisões baricêntricas nas faces, como mostra a figura 3, a característica de Euler (V – A + F) da superfície do poliedro resultante (que agora tem faces triangulares) continuará com o mesmo valor [ ]

Ao dividir baricentricamente cada polígono com n-lados em n triângulos estamos criando mais 1 vértice, n arestas e (n 1) faces a serem computados na soma alternada Como 1 n + (n 1) = 0, o resultado V A + F permanece o mesmo

As superfícies dos poliedros convexos como prismas e pirâmides têm característica de Euler igual a 2, mas há exemplos de superfícies poliédricas mais exóticas como a do cubo truncado perfurado (Figura 4)

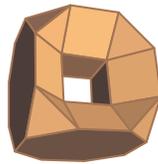



Figura 4

O cubo truncado perfurado tem 32 faces (12 quadrados, 4 octógonos e 16 triângulos), 64 arestas e 32 vértices pelo que a sua característica de Euler é 0 [ ]

A propriedade fundamental da característica de Euler (que explica, por exemplo, porque todas as superfícies poliédricas convexas têm a mesma característica) é que se trata de uma invariante topológica. Isto é, se K e K' são poliedros n-dimensionais tais que existe uma bijeção contínua entre eles com inversa também contínua, então $\chi(K) = \chi(K')$. O matemático francês Henri Poincaré provou este resultado nada trivial usando argumentos difíceis de explicar sucintamente.

Não é fácil dar uma ideia intuitiva exata do que significa uma bijeção contínua, mas costuma dizer-se que dois objetos estabelecem esse tipo de bijeção quando se pode deformar continuamente um deles até que se transforme no outro. Por exemplo, se imaginarmos as superfícies dos poliedros feitos de um material elástico, de modo que possam ser infladas, algumas dessas superfícies, com as dos poliedros regulares, prismas, e pirâmides, por exemplo, poderiam ser transformadas em superfícies esféricas; outra, como a do cubo truncado perfurado, poderiam ser transformadas na superfície de uma boia de praia, entre outras possibilidades.

O teorema de Poincaré diz que todos os poliedros que podem se deformar continuamente, até resultarem em um mesmo objeto, têm a mesma característica de Euler. [...]

Embora a demonstração geral seja difícil de resumir, é fácil apresentar um argumento bastante convincente de que todo o poliedro que pode ser deformado continuamente até assumir o formato de uma esfera tem uma superfície com característica de Euler igual a 2. Recordemos que podemos supor o poliedro formado por triângulos e imaginemos o poliedro construído em material elástico. Se o poliedro se deformar continuamente numa esfera, as suas arestas deformam-se em arcos que definem um mapa da esfera com regiões triangulares (Figura 5).

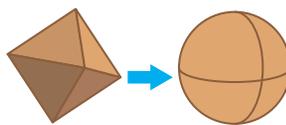



Figura 5

Estes tipos de mapas na esfera podem ser desenhados a partir de um "triângulo inicial na esfera", realizando sucessivamente alguma das operações seguintes:

(a) adicionar um novo vértice e uma nova aresta;

(b) unir dois vértices que já existem criando uma nova face.

O triângulo inicial determina na esfera um mapa com duas regiões triangulares (uma interior ao triângulo e outra exterior), 3 arestas e 3 vértices. Isto é, o mapa inicial tem característica de Euler igual a 2, de modo que as operações (a) e (b) não alteram a característica de Euler do mapa e, portanto, o mapa final também terá característica de Euler igual a 2

A característica de Euler tem inúmeras aplicações. Umas compatíveis com o estudo da matemática no ensino médio e outras vistas apenas no ensino superior. Aqui temos uma lista com algumas delas.

1. A característica de Euler permite demonstrar que existem apenas cinco tipos de poliedros regulares;
2. Coloração de mapas: o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa numa superfície depende da característica de Euler dessa superfície;
3. A característica de Euler pode ser utilizada para verificar se um grafo é ou não é plano;
4 A característica de Euler restringe a curvatura de uma superfície através do teorema de Gauss Bonnet

FERNÁNDEZ SUÁREZ, Lucía. "O que é a Característica de Euler?". *Gazeta de Matemática*, 20 ago. 2009. Disponível em: <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=251>. Acesso em: 27 fev. 2019. (Adapt.).

Resumindo

Prismas	
Volume = Área da base × altura	
Prismas oblíquos	Prismas retos
Altura = aresta lateral × seno da inclinação	Altura = aresta lateral Área lateral = Perímetro da base × altura Área total = 2 × Área da base + Área lateral

Pirâmides
Volume = $\frac{1}{3}$ × Área da base × altura
Pirâmides regulares
$(\text{altura})^2 + (\text{apótema da base})^2 = (\text{apótema da pirâmide})^2$ Área lateral = Semiperímetro da base × apótema da pirâmide Área da base = Semiperímetro da base × apótema da base Área total = Área da base + Área lateral

Poliedros		
Número de vértices $V = V_3 + V_4 + V_5 +$	Número de faces $F = F_3 + F_4 + F_5 +$	Número de arestas $2 \cdot A = 3 \cdot V_3 + 4 \cdot V_4 + 5 \cdot V_5 + ...$ $2 \quad A = 3 \quad F_3 + 4 \quad F_4 + 5 \quad F_5 +$

Poliedros convexos	
Relação de Euler: $V - A + F = 2$	Soma dos ângulos das faces: $S_F = (V - 2) \cdot 360°$

Poliedros regulares

Nome	Faces	Arestas	Vértices
Tetraedro	4 triangulares	6	4 triédricos
Hexaedro	6 quadrangulares	12	8 triédricos
Octaedro	8 triangulares	12	6 tetraédricos
Dodecaedro	12 pentagonais	30	20 triédricos
Icosaedro	20 triangulares	30	12 pentaédricos

Tetraedro regular de aresta ℓ	Octaedro regular de aresta ℓ
Apótema da base = $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ Apótema lateral = $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ Volume = $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$ Altura = $\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ Área total = $\ell^2\sqrt{3}$	Diagonais = $\ell\sqrt{2}$ Área total = $2\ell^2\sqrt{3}$ Volume = $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{3}$

Quer saber mais?

Sites

- Geometria plana e espacial: prismas
  Disponível em: <www.uel.br/projetos/matessencial/geometria/prisma/prisma.htm>.
- Geometria plana e espacial: pirâmides
  Disponível em: <www.uel.br/projetos/matessencial/geometria/piramide/piramide.htm>
- Sólido platônico
  Disponível em: <https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Sólido_platónico>.
- Construção de poliedros através de dobraduras de papel
  Disponível em: <http://blogdoprofessornovaes.blogspot.com/2012/03/construcao-de-poliedros-atraves-de html?m=1>

Exercícios complementares

1 Unesp 2016 Um cubo com aresta de medida igual a x centímetros foi seccionado, dando origem ao prisma indicado na figura 1. A figura 2 indica a vista superior desse prisma, sendo que AEB é um triângulo equilátero.

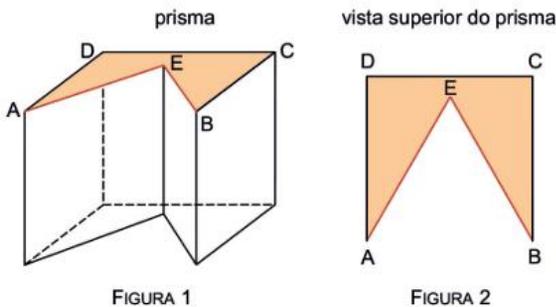
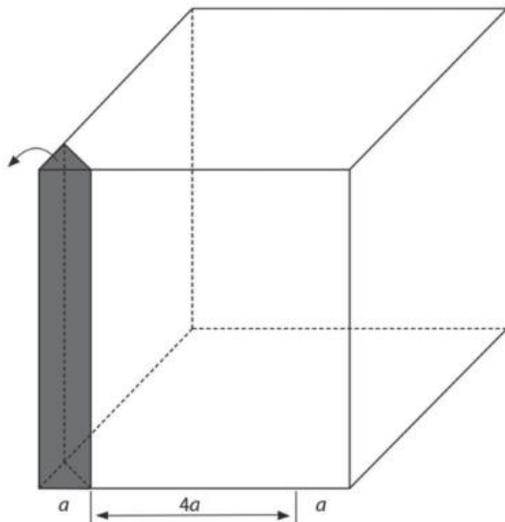



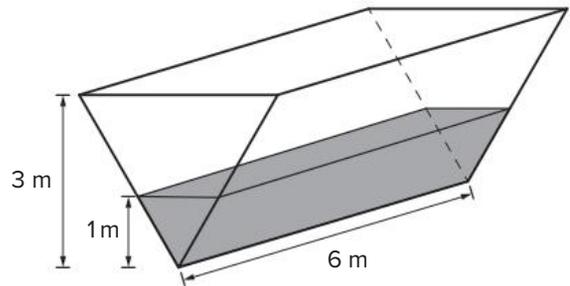
FIGURA 1

FIGURA 2

Sabendo que o volume do prisma da figura 1 é igual a $2(4-\sqrt{3})$ cm^3, x é igual a

A 2
B $\frac{7}{2}$
C 3
D $\frac{5}{2}$
E $\frac{3}{2}$

2 FGV-SP 2016 Os quatro cantos de um cubo de aresta 6a são cortados, obtendo-se um novo sólido geométrico sem os quatro prismas retos, como o prisma indicado como exemplo na figura abaixo.

A Qual é a área do sólido geométrico formado em termos de a?
B Qual é o volume do novo sólido geométrico formado em termos de a?

3 Insper 2016 Um tanque, inicialmente vazio, tem a forma de prisma triangular regular e suas paredes têm espessuras desprezíveis. Após algum tempo despejando água no tanque, um cano de vazão $3\sqrt{3}$ m^3 por minuto o encheu parcialmente, tendo a água ocupado o espaço de um prisma triangular regular, conforme indicado na figura.

Funcionando na mesma vazão, o tempo necessário para que o cano acabe de encher o tanque é de 5 minutos e t segundos, sendo que t é um número no intervalo

A [1, 12]
B [13, 24]
C [25, 36]
D [37, 48]
E [49, 59].

4 Cefet-MG 2015 Uma caixa sem tampa no formato de um cubo, cuja aresta mede 3 metros, está sobre uma superfície plana e com água até uma altura de 2 metros em relação à sua base conforme mostra a FIG. 1.

FIG. 1

FIG. 2

A caixa será inclinada de tal forma que a aresta $\overline{AB}$ ficará totalmente em contato com a superfície plana e haverá perda no volume de água, conforme a FIG. 2.
Sabendo-se que o ângulo formado, após a inclinação, entre a face ABCD e a superfície plana é de 30° e, desprezando-se a espessura das faces da caixa, a quantidade de água que sobrará na caixa, em m^3, é de:

A 9
B 18
C $4\sqrt{3}$
D $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
E $\frac{17\sqrt{3}}{4}$

5 **UPF 2018** A medida de cada aresta do cubo da Figura 1 é 2 cm, e os pontos A, B e C são pontos médios de três arestas. Seccionando o cubo por um plano que passe por ABC, podemos retirar o sólido que se forma em seu vértice. Se repetirmos esse procedimento em todos os vértices do cubo, obtemos um cubo truncado, como mostra a Figura 2.

O volume do cubo truncado, em cm^3, é

A $\frac{10}{9}$
B $\frac{16}{3}$
C $\frac{1}{6}$
D $\frac{47}{6}$
E $\frac{20}{3}$

6 **Unesp 2015** Um bloco maciço com a forma de paralelepípedo reto-retângulo tem dimensões 8 m, 12 m e 10 m. Em duas de suas faces, indicadas por A e B na figura, foram marcados retângulos, de 2 m por 3 m, centralizados com as faces do bloco e com lados paralelos às arestas do bloco. Esses retângulos foram utilizados como referência para perfurar totalmente o bloco, desde as faces A e B até as respectivas faces opostas a elas no bloco.

Calcule o volume e a área total do novo sólido, que resultou após a perfuração do bloco.

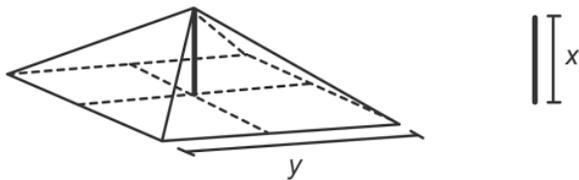
FRENTE 3

7 EBMSP 2016

Figura 1

Figura 2

Uma piscina deve ser construída, como representada na Figura 1, em um terreno retangular de dimensões 18,0 m por 15,0 m. Sabendo que a piscina foi projetada tendo cada um dos lados paralelos aos lados do terreno, como indicado na Figura 2, calcule o valor de k – distância do lado do terreno à borda da piscina – para que a capacidade máxima da piscina seja igual a 18,0 m^3.

8 Enem 2016 A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base y. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida x Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda

A área da superfície da cobertura da tenda, em função de y e x, é dada pela expressão

A $2y\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$

B $2y\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}$

C $4y\sqrt{x^2+y^2}$

D $4\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}}$

E $4\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}}$

9 Unisc 2016 Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado q Sabendo que as faces laterais dessa pirâmide são triângulos equiláteros, pode-se afirmar que o seu volume é

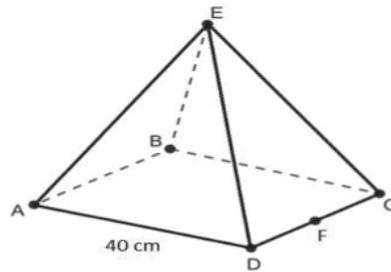
A $q^3\sqrt{2}$

B $\frac{q^3\sqrt{2}}{6}$

C $\frac{q\sqrt{2}}{2}$

D $\frac{q^3\sqrt{3}}{6}$

E $\frac{q^3\sqrt{3}}{3}$

10 UFU 2017 Um *designer* de jogos virtuais está simulando alguns deslocamentos associados com uma pirâmide quadrangular regular, em que o lado do quadrado da base mede 40 cm.

(Figura ilustrativa e sem escalas)

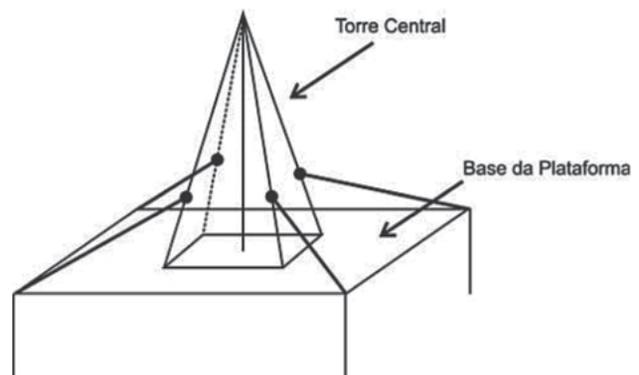
Ele simula a trajetória de um lagarto pelas faces da pirâmide Inicialmente o lagarto desloca se de A até E e, posteriormente, de E até F, em que F é o ponto médio de $\overline{CD}$ Cada um desses dois trechos da trajetória ocorre em linha reta.
A projeção perpendicular dessa trajetória em ABCD, presente no plano da base da pirâmide, descreve uma curva R, a qual é a união de dois segmentos.
Nessas condições, o comprimento de R, em cm, é igual a

A $20\sqrt{2}$

B $40\sqrt{2}$

C $40\left(1+\sqrt{2}\right)$

D $20\left(1+\sqrt{2}\right)$

11 Enem Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central
Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração

Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros,

de cada cabo será igual a

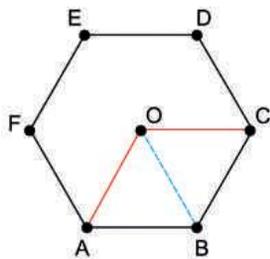
A $\sqrt{288}$

B $\sqrt{313}$

C $\sqrt{328}$

D $\sqrt{400}$

E $\sqrt{505}$

12 **FGV-SP 2016** Em uma folha de papel, desenha-se um hexágono regular ABCDEF de lado 3 cm e inscrito em uma circunferência de centro O. O hexágono é recortado, e, em seguida, faz-se um recorte no raio $\overline{OB}$. A partir do recorte no raio, o pedaço de papel será usado para formar uma pirâmide de base quadrangular e centro O. Tal pirâmide será feita com a sobreposição e a colagem dos triângulos OAB e OCD, e dos triângulos OAF e OBC.

O volume da pirâmide formada após as sobreposições e colagens, em cm^3, é igual a

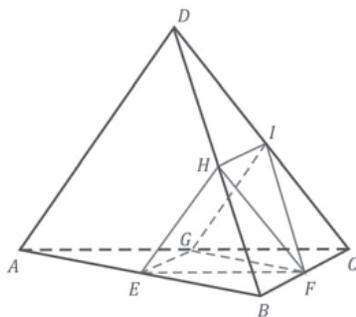
A $3\sqrt{2}$

B $3\sqrt{3}$

C $4\sqrt{2}$

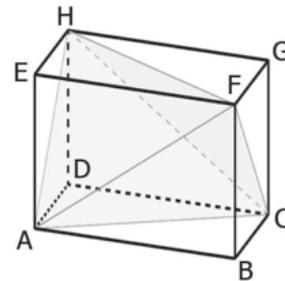
D $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

E $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

13 **Fuvest 2017** Considere um tetraedro regular ABCD cujas arestas medem 6 cm. Os pontos E, F, G, H e I são os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.

a) Determine a área do triângulo EFH.

b) Calcule a área do quadrilátero EGIH.

c) Determine o volume da pirâmide de vértices E, G, I, H e F, cuja base é o quadrilátero EGIH.

14 **UFRGS 2017 (Adapt.)** Considere ABCDEFGH paralelepípedo reto-retângulo, indicado na figura abaixo, tal que AB = 4, AE = 3 e BC = 2.

O volume do tetraedro AHFC é

A 4.

B 8

C 12.

D 16.

E 18.

15 **EBMSP 2017** Uma pesquisa realizada durante 75 anos nos Estados Unidos mostrou que não é uma carreira de sucesso, a fama ou os bens adquiridos durante a vida a fórmula da felicidade para uma jornada tranquila. Segundo o estudo, as pessoas que participam de grupos sociais, se relacionam bem com a família, com os amigos e com a comunidade são mais felizes, fisicamente mais saudáveis e vivem mais tempo do que as pessoas que têm menos relações sociais.

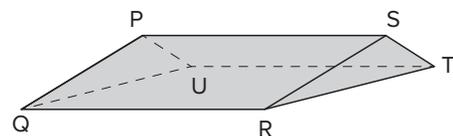



Figura 1

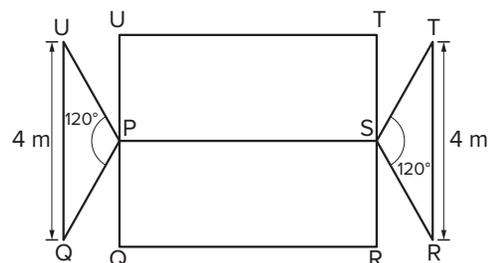
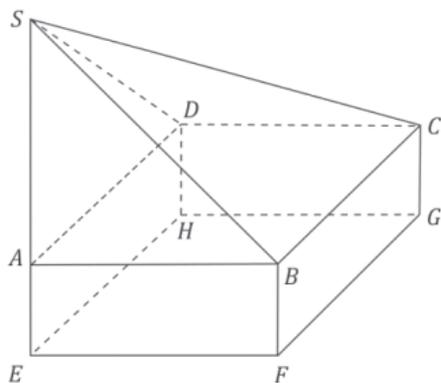



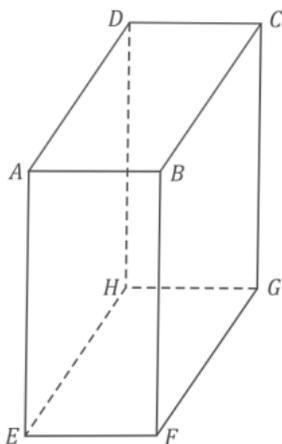
Figura 2

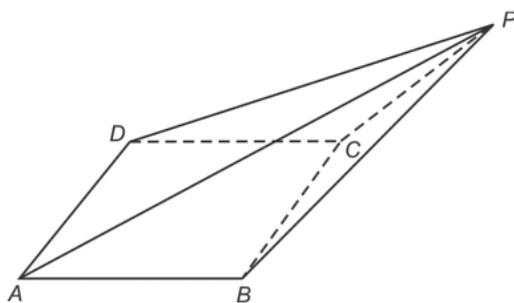
Uma pessoa para realizar um evento ao ar livre, com familiares e amigos, está planejando instalar um toldo cuja cobertura tem a forma do sólido, de volume igual a $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ m^3, representado na figura 1.

Com base nessa informação, calcule a área total da planificação dessa cobertura, constituída por dois retângulos congruentes e dois triângulos, representada na figura 2.

FRENTE 3

16 **Fuvest 2015** O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que AE = 2 cm, AD = 4 cm e AB = 5 cm. A medida do segmento que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é

A 2 cm
B 4 cm
C 6 cm
D 8 cm
E 10 cm

17 **Fuvest 2013** No paralelepípedo reto retângulo ABCDEFGH da figura, tem-se AB = 2, AD = 3 e AE = 4.

a) Qual é a área do triângulo ABD?
b) Qual é o volume do tetraedro ABDE?
c) Qual é área do triângulo BDE?
d) Sendo Q o ponto do triângulo BDE mais próximo do ponto A, quanto vale AQ?

18 **Fuvest 2012**

A base do tetraedro PABCD é o quadrado ABCD de lado ℓ, contido no plano a Sabe-se que a projeção ortogonal do vértice P no plano a está no semiplano de a determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o lado $\overline{AD}$ Além disso, a face BPC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ cuja altura forma, com o plano a, um ângulo θ, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ Sendo $PB = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$, determine, em função de ℓ e θ,

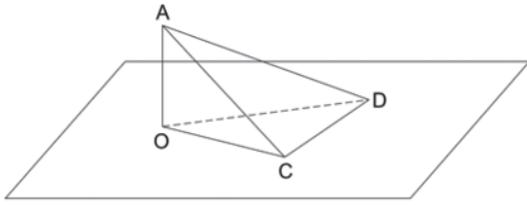
a) o volume do tetraedro PABCD;
b) a altura do triângulo APB relativa ao lado $\overline{AB}$;
c) a altura do triângulo APD relativa ao lado $\overline{AD}$.

19 **Enem** Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.
Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

A Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.
B Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.
C Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados
D O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados
E O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

20 **Fuvest** Uma pirâmide tem como base um quadrado de lado 1, e cada uma de suas faces laterais é um triângulo equilátero. Então, a área do quadrado, que tem como vértices os baricentros de cada uma das faces laterais, é igual a

A $\frac{5}{9}$
B $\frac{4}{9}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{2}{9}$
E $\frac{1}{9}$

21 **Fuvest** O triângulo ACD é isósceles de base $\overline{CD}$ e o segmento $\overline{OA}$ é perpendicular ao plano que contém o triângulo OCD, conforme a figura:

Sabendo-se que AO = 3, AC = 5 e $\operatorname{sen}O\hat{C}D = \frac{1}{3}$, então a área do triângulo OCD vale

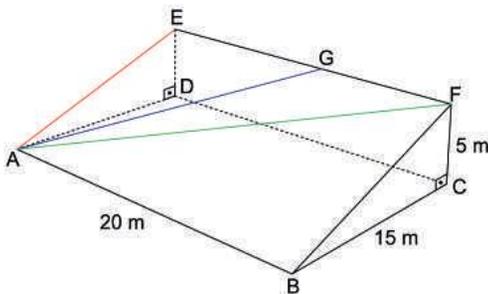
A $16\frac{\sqrt{2}}{9}$

B $32\frac{\sqrt{2}}{9}$

C $48\frac{\sqrt{2}}{9}$

D $64\frac{\sqrt{2}}{9}$

E $80\frac{\sqrt{2}}{9}$

22 **Unesp 2018** Uma rampa, com a forma de prisma reto, possui triângulos retângulos ADE e BCF nas bases do prisma, e retângulos nas demais faces. Sabe-se que AB = 20 m, BC = 15 m e CF = 5 m. Sobre a face ABFE da rampa estão marcados os caminhos retilíneos $\overline{AE}$, $\overline{AG}$ e $\overline{AF}$, com G sendo um ponto de $\overline{EF}$, como mostra a figura

a) Calcule a medida do segmento $\overline{AF}$. Em seguida, assuma que a inclinação de subida (razão entre vertical e horizontal) pelo caminho $\overline{AG}$ seja igual a $\frac{1}{4}$ e calcule a medida do segmento $\overline{EG}$.

b) Considere os seguintes dados para responder a este item:

a	7,1°	11,3°	14,0°	18,4°
tg a	0,125	0,200	0,250	0,333

Comparando-se o caminho $\overline{AF}$ com o caminho $\overline{AE}$, nota-se que o ângulo de inclinação de $\overline{AF}$ e de $\overline{AE}$, em relação ao plano que contém o retângulo ABCD, aumentou. Calcule a diferença aproximada, em graus, desses ângulos.

23 **UCPel 2017** A área de um quadrado de lado x cm aumenta em 28 cm^2 se o seu lado for aumentado em 2 cm. Considerando que a medida da aresta de um tetraedro regular é igual ao lado x deste quadrado, então a altura h deste tetraedro vale

A $2\sqrt{6}$ cm

B $2\sqrt{3}$ cm

C $2\sqrt{2}$ cm

D $3\sqrt{2}$ cm

E $4\sqrt{6}$ cm

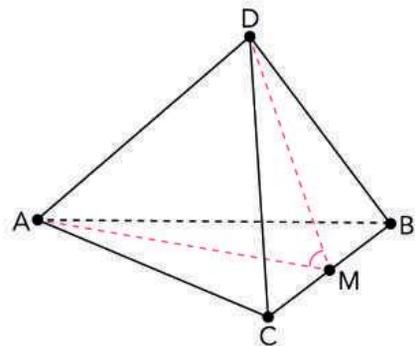
24 **Uece 2015** Se, em um tetraedro, três das faces que possuem um vértice comum V, são limitadas por triângulos retângulos e as medidas das arestas da face oposta ao vértice V são, respectivamente, 8 cm, 10 cm e 12 cm, então, as medidas, em cm, das outras três arestas são

A $3\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$

B $\sqrt{6}$, $5\sqrt{3}$, 9.

C $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{6}$, 8

D $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{3}$.

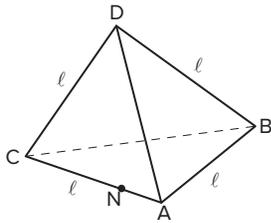
25 **Uerj 2017** Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta $\overline{BC}$ é M.

O cosseno do ângulo $A\hat{M}D$ equivale a:

A $\frac{1}{2}$

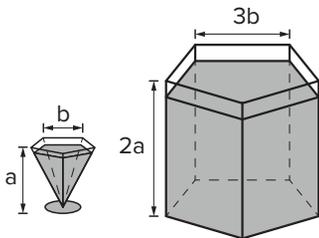
B $\frac{1}{3}$

C $\frac{2}{3}$

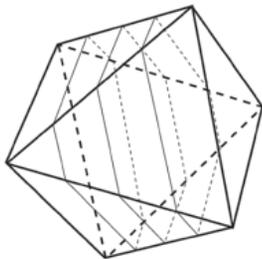
D $\frac{2}{5}$

26 **UFJF 2016 (Adapt.)** Na figura abaixo, ABCD é um tetraedro regular de lado ℓ e N é um ponto sobre a aresta AC tal que $2 \cdot AN = NC$.

a) Calcule DN

b) Calcule a área do triângulo BDN

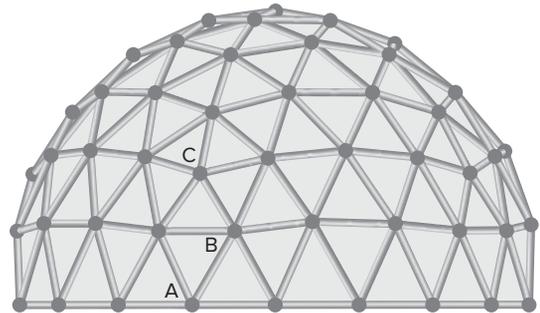
27 Uma taça de sorvete e um aquário têm as respectivas formas de uma pirâmide regular e um prisma regular, como ilustrado a seguir. A altura da pirâmide e a do prisma medem, respectivamente, **a** e **2a**, e os lados das bocas pentagonais, da taça e do aquário, medem **b** e **3b**, nesta ordem.

Um garoto quer encher o aquário que fica na sala, transportando a água da pia, que fica na cozinha, usando uma única taça. Se a cada transporte, o garoto levar a taça completamente cheia e, sem derramar uma gota no caminho, despejar toda água no aquário, então o aquário irá transbordar quando o garoto despejar a água pela:

A 19ª vez.
B 28ª vez.
C 35ª vez.
D 55ª vez.
E 71ª vez.

28 **PUC Rio 2015 (Adapt.)** O octaedro regular de aresta 4 é cortado em 4 fatias da mesma espessura por planos pa ralelos a um par de faces opostas, conforme a figura:

a) Esboce as interseções entre o sólido e cada um dos planos. Calcule suas áreas. (Não utilize valores aproximados).

b) Calcule a distância entre dois planos de corte consecutivos.

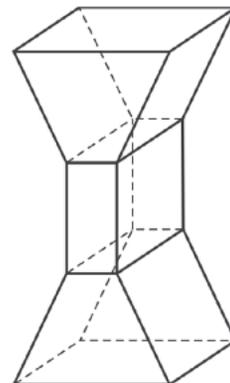
29 As cúpulas geodésicas, ou domos geodésicos, são construções que imitam calotas esféricas Essas construções, concebidas pelo arquiteto americano Richard Buckminster Fuller, apresentam extraordinária leveza e resistência Formados por barras de qualquer material, os domos geodésicos podem ser feitos em qualquer tamanho, desde que os comprimentos de suas barras sejam calculados corretamente

A figura a seguir representa uma construção geodésica que apresenta 20 pontos como A, em que estão presas quatro barras; 69 pontos como B, em que estão presas seis barras; e mais 6 pontos como C, em que estão presas cinco barras

O número total de barras necessárias para se construir um domo como esse é de:

A 262
B 323
C 464
D 524
E 646

30 **AFA 2019** Um objeto de decoração foi elaborado a partir de sólidos utilizados na rotina de estudos de um estudante de matemática.

Inicialmente, partiu-se de um cubo sólido de volume igual a 19683 cm^3.

Do interior desse cubo, retirou-se, sem perda de material, um sólido formado por dois troncos de pirâmide idênticos e um prisma reto, como mostra o esquema da figura a seguir.

Sabe-se que:

- as bases maiores dos troncos estão contidas em faces opostas do cubo;
- as bases dos troncos são quadradas;

- a diagonal da base maior de cada tronco está contida na diagonal da face do cubo que a contém e mede a sua terça parte;
- a diagonal da base menor de cada tronco mede a ter ça parte da diagonal da base maior do tronco; e
- os troncos e o prisma têm alturas iguais.

Assim, o volume do objeto de decoração obtido da di ferença entre o volume do cubo e o volume do sólido esquematizado na figura acima, em cm^3, é um número do intervalo

A [17200, 17800]
B]17800, 18400]
C]18400, 19000]
D]19000, 19600]

31 **AFA 2017** Se uma pirâmide hexagonal regular está inscrita num cone equilátero cujo volume é igual a $\frac{10\sqrt{3}}{7}\pi\ cm^3$, então o volume dessa pirâmide, em cm^3, é igual a

A $\frac{45}{7}$

B $\frac{15\sqrt{3}}{7}$

C $\frac{30\sqrt{3}}{7}$

D $\frac{135}{7}$

32 **AFA 2014** Considere uma pirâmide regular ABCDV de base ABCD. Sendo $2\sqrt{2}$ cm a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}$ cm a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de A à aresta lateral $\overline{VC}$ é

A $2\sqrt{2}$

B $2\sqrt{3}$

C 4

D $\sqrt{3}$

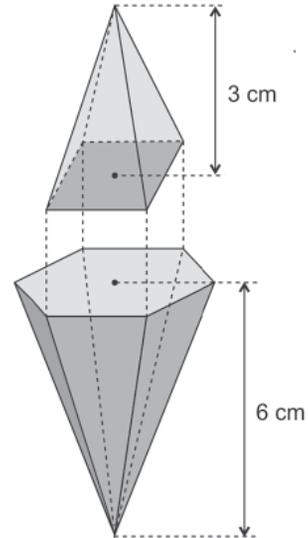
33 **AFA 2013** Uma pirâmide regular ABCV, de base trian gular ABC, é tal, que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede 3 cm. Sendo $\sqrt{5}$ cm a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de A à face BCV é igual a

A $\frac{\sqrt{30}}{2}$

B $\sqrt{7}$

C $\frac{\sqrt{26}}{2}$

D $2\sqrt{2}$

34 **AFA 2012** Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6 cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base re-tangular e altura 3 cm, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}$ cm, então, o volume do sólido obtido, em cm3, é igual a

A $15\sqrt{3}$
B $20\sqrt{3}$
C $25\sqrt{3}$
D $30\sqrt{3}$

35 Dois recipientes, I e II, congruentes em forma de pris-ma, cujas bases são triângulos equiláteros e as faces laterais são retangulares, estão completamente cheios de água quando são inclinados a 45°, despejando parte de seus conteúdos nos recipientes cilíndricos III e IV, inicialmente vazios:

Se, durante esse processo, um dos recipientes inclina-dos despeja água por uma de suas arestas, e o outro por um de seus vértices, como mostram as figuras, en-tão, ao final do processo, os respectivos volumes de água (V_3 e V_4) nos recipientes III e IV serão tais que:

A V3 = 3V4
B 3V3 = V4
C V3 = V4
D V3 = 2V4
E 2V3 = V4

36 **ITA 2018** Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

A 10.
B 12.
C 15.
D 20.
E 30.

37 **ITA 2014** Uma pirâmide de altura h = 1 cm e volume $V = 50\ cm^3$, tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam se n 3 diagonais que o decompõem em n – 2 triângulos cujas áreas S_i, i = 1, 2, ..., n – 2, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}\ cm^2$ e $S_6 = 3\ cm^2$. Então n é igual a

A 22
B 24.
C 26
D 28.
E 32

38 **ITA 2013** Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm O volume, em cm^3, do sólido VABC é

A 2.
B 4.
C $\sqrt{17}$.
D 6.
E $5\sqrt{10}$.

39 **ITA 2013** Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a 10 cm^3. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.
b) O volume e a área total da superfície do para lelepípedo.

40 **ITA 2012** As interseções das retas r: x 3y + 3 = 0, s: x + 2y – 7 = 0 e t: x + 7y – 7 = 0, duas a duas, respec tivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.
b) O volume do prisma

41 **ITA 2011** Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. Então, o raio da esfera, em cm, é igual a

A $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.
B $\frac{13}{3}$.
C $\frac{15}{4}$
D $2\sqrt{3}$
E $\frac{10}{3}$.

42 **ITA** Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

A $\frac{\sqrt{2}}{6}$
B $\frac{\sqrt{2}}{8}$
C $\frac{\sqrt{3}}{6}$
D $\frac{\sqrt{3}}{8}$
E $\frac{\sqrt{3}}{9}$

43 **ITA** A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida **a** do apótema da base.

44 **ITA 2018** Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão –5. Determine o número de vértices do poliedro.

45 **IME 2018** Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2 Sua área total é de 28 cm^2 Calcule o valor da diagonal do referido prisma

A $\sqrt{17}$ cm
B $\sqrt{19}$ cm
C $\sqrt{21}$ cm
D $2\sqrt{7}$ cm
E $\sqrt{29}$ cm

46 IME 2018 Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

47 IME 2016 Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância *d*, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de *a*, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

A $\frac{a}{2}$

B $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{a\sqrt{10}}{8}$

D $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

E $\frac{a\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2}$

48 IME 2015 Em um prisma oblíquo ABCDEFA'B'C'D'E'F', cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado a, a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta $\overline{BC}$. O volume do prisma é:

A $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

B $\frac{9}{4}a^3$

C $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

D $\frac{9}{2}a^3$

E $\frac{5}{2}a^3$

49 IME 2015 Seja um tetraedro regular ABCD de aresta *a* e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

A $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$

B $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$

C $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$

D $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

E $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

50 IME 2014 Seja SABCD uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo ABCD. A aresta $\overline{SD}$ é a altura da pirâmide. Sabe-se que $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ e $SA = SB = 7$. O volume da pirâmide é

A $\sqrt{5}$

B $\sqrt{7}$

C $\sqrt{11}$

D $\sqrt{13}$

E $\sqrt{17}$

51 IME 2014 Seja ABCDA'B'C'D' um prisma reto de base retangular ABCD. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal $\overline{AC}$, obtendo-se o ponto P Em seguida projeta se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N Sabe-se que $\left|(NA)^2 \neq (NC)^2\right| \quad k$ Determine o comprimento da menor aresta da base

52 IME 2013 Considere uma pirâmide regular de base hexagonal e altura h. Uma esfera de raio R está inscrita nesta pirâmide. O volume desta pirâmide é

A $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h \quad 2R}$

B $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$

C $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$

D $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h \quad 2R}$

E $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h \quad R}$

FRENTE 3

53 **IME 2012** Uma pirâmide regular possui como base um dodecágono de aresta *a*. As faces laterais fazem um ângulo de 15° com o plano da base. Determine o volu me desta pirâmide em função de *a*.

A $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2\ \ \sqrt{3}}}$

B $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}\ \ 2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

C $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2\ \ \sqrt{3}}}$

D $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}\ \ 2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

E $a^3\frac{\sqrt{2\ \ \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

54 **IME 2012** Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V Determine o raio da circunferência circuns crita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°

55 **IME 2011** A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base. As outras duas faces formam ângulos de 30° e 60° com a base O volume da pirâmide é:

A $\frac{S\sqrt{S}}{3}$

B $\frac{S\sqrt{S}}{6}$

C $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$

D $\frac{2S\sqrt{S}}{5}$

E $\frac{2S^2}{3}$

56 **IME 2011** A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral $\overline{AA_1}$. Sabendo que α é o ângulo $A\hat{C}B$ e β é o ângulo $D\hat{C}A$, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

57 **IME** Os centros das faces de um tetraedro regular são os vértices de um tetraedro interno. Se a razão entre os volumes dos tetraedros interno e original vale $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos primos entre si, o valor de m + n é

A 20
B 24
C 28
D 30
E 32

58 **IME** A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular SABCD é duas vezes maior do que a área de sua base ABCD. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas $\overline{AQ}$ e $\overline{DP}$. Calcule o ângulo entre estas medianas.

59 **IME** Seja um cubo de base ABCD com aresta *a* No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide VABCD. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide VABCD, em função de *a*, sabendo-se que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2, sendo k um número primo.
Obs.: as arestas laterais da pirâmide são $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$ e $\overline{VD}$

60 **IME** O volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de volume V é:

A $\frac{V}{2}$

B $\frac{V}{4}$

C $\frac{V}{8}$

D $V\frac{\sqrt{2}}{2}$

E $V\frac{\sqrt{3}}{2}$

Gabarito

Frente 1

Capítulo 9 – Funções circulares

Revisando

1. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

2 $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\operatorname{sen} x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

3. $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sec x = \;\; 3$

$\operatorname{cossec} x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$

$\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

4.

a) $\operatorname{cotg} x$

b) $\operatorname{tg} x$

c) $(\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2$

5. Demonstração.

Exercícios propostos

1. A
2. Soma: 01 + 02 + 04 = 07
3. D 4. A 5. B 6. C
7 Demonstração

8 C	12 C	16 D
9. B	13. E	17. A
10. B	14. C	18. E
11. E	15. B	19. A

20. $-\frac{3}{8}$

21. 2

22. $\{0; \pi\}$

23. E

24. 1

25. $V = \left\{-\frac{17}{15}; \frac{1}{3}\right\}$

26. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

27.

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{55}}{8}$

b) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$

28. A

29. 10

30. Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29

31. B	33. D	35. C
32. D	34. D	36. D

37. Demonstração.

38. D

39. $\operatorname{sen} x = \pm\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$; $\cos x = \pm\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$

e $\operatorname{cotg} x = \frac{b}{a}$

40. B

41. D

Exercícios complementares

1. $\operatorname{sen} x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

2 C

3

a) –sen x

b) 1

c) 1

d) 1

4 Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

5 Demonstração

6. $\cos^2 x$

7. E

8. $\frac{43\sqrt{5}}{128}$

9 D

10. $\frac{a^2+1}{2}$

11. D

12

a) 120 cm

b) $10\sqrt{401}$ cm

13. A

14. $H = \frac{h(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\beta}$

15. 3 + 2 (sen x + cos x)

16. D

17. C

18. Soma: 01 + 04 = 05

19. C

20. $\pm\frac{m^2 \quad 1}{2m}$

21.

a) $\frac{m^2 \quad 1}{2}$

b) $\frac{-m^3+3m}{2}$

c) $\frac{+m^4 \quad +2m^2 \quad 1}{2}$

d) $\frac{-m^5+5m}{4}$

22 Demonstração

23. Demonstração.

24. Demonstração.

25. Demonstração.

26. Demonstração.

27 Demonstração

Capítulo 10 – Adição e subtração de arcos

Revisando

1. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
2. $\frac{56}{65}$
3. $\text{sen}^2 a$
4. Demonstração.
5. Demonstração.

Exercícios propostos

1. A
2. C
3. E
4.

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

5. A	8. B	11. E	14. D
6 C	9 C	12 D	15. C
7. B	10. C	13 C	16. B

17. $\frac{2\pi}{2}=\pi$

18.

a) $8+\text{sen}\,x\cdot\cos x$

b) Valor mínimo: $\frac{15}{2}$

c) Valor máximo: $\frac{17}{2}$

19. B

20. $\cos 2x\cdot\cos 4x=\frac{1}{2}\cdot\cos 6x+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x$

21. Demonstração.

22.

a) $2\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

b) $2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $2\text{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

e) $4\text{sen}\,3a\cdot\cos^2 a$

Exercícios complementares

1.

a) Demonstração.

b) $2\leq m\leq 2$

2 A	4 D	6 B	8 B
3. D	5. C	7. B	9. B

10. D
11. A
12. Demonstração.
13 B
14. D
15. B
16. E
17. $\text{tg}\,x+\text{tg}\,y=4$

18. D	19. A	20. D	21. B

22. Demonstração.
23. O determinante é zero; a matriz não é inversível.
24. 4
25 $\sqrt{3}$
26. $1+2b=a^2$
27. E
28. C
29. $y=\frac{2(m^2-1)}{m(3\quad m^2)}$
30. 0
31 A
32 4
33. $\frac{1}{4}$
34. D
35. $\frac{2ab}{a^2+b^2}$
36. $\text{sen}\,2a=\frac{1}{2}$

37. D	39. B
38. C	40. A

41. Demonstração.

Capítulo 11 – Equações e inequações trigonométricas

Revisando

1. $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$
2. $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi\right.$ $\left.\text{e } x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
3. $S=\left\{0;\frac{2\pi}{3}\right\}$
4. $-\sqrt{2}\leq m\leq\sqrt{2}$

Exercícios propostos

1. $S=\left\{0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$

2. E	5. A	8. E
3. D	6. B	9. C
4. A	7. C	10. D

11. D
12 D
13.

a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=k\pi\text{ ou }x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\text{ ou }\right.$ $\left.x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=k\pi\text{ ou }x=\frac{3\pi}{4}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=2k\pi\text{ ou }x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

14.

a) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$

b) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right\}$

c) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{3}+k\pi\right\}$

d) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2}+k\pi < x < \pi+k\pi\right\}$

e) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{18} \text{ ou } \frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{\pi}{4}+2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6}+k\pi < x < \frac{\pi}{6}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

i) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{2\pi}{3}+k\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

j) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{7\pi}{3}+2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

15. E

Exercícios complementares

1. $S=\left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

2. $\theta=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

3. C

4. A

5 $x=47$

6. $S=\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

7 D

8. C

9.

a) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

b) $|m| \leq \sqrt{2}$

10. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

11. $S=\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right\}$

12 $S=\left\{\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right\}$

13.

a) Demonstração

b) $\operatorname{sen}\theta=0$ ou $\operatorname{sen}\theta=\frac{4}{5}$

14 $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ ou } x=k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

15. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \text{ ou } x=k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

16. $S=\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

17.

a) $\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{55}}{8}$

b) $\operatorname{sen}x=\frac{1}{3}$

18. A

19. B

20 C

21. A

22 B

23. A

24. $S=\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

25. D

26. A

27. C

28.

a) Demonstração

b) $x=\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{3\pi}{4}$ ou $x=\frac{5\pi}{4}$ ou $x=\frac{7\pi}{4}$

29. A

30. C

31. C

32. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

33 $S=\varnothing$

34 C

35. B

36. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{11\pi}{12}+k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

37. $S=\left\{0; \frac{\pi}{4}; \pi; \frac{3\pi}{4}; 2\pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

38. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\pi(2+4k),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

39. C

40. B

41. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

42. $S=\varnothing$

43. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

44. $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

45. $|S|=4$

46. A

47. B

48. $S=\varnothing$

49. E

50. C

51. $D_f=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

52 Demonstração

53. D

54. D

55. D

56 $S=\left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$

Capítulo 12 – Análise combinatória

Revisando

1. $S = \{4\}$
2 $n + 2$
3. 24
4. 256
5. 120
6. 840 números.
7 Número de subconjuntos $= C_{4,\,2} = 6$
{a; b} {a; c} {a; d} {b; c} {b; d} {c; d}

Exercícios propostos

1.

a) $\frac{1}{132}$

b) 252

2 $\frac{1}{n!} \quad \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{n+1-1}{(n+1)n!} = \frac{n}{(n+1)!}$

3 $2^n \cdot n!$

4. $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$

5. $S = \{7\}$

6. $n = 5$

7

a) n

b) $n(n + 1)$

8. $\frac{n!}{(n-2)!}$

9. $n + 3$

10.

a) $\frac{1}{n+1}$

b) $(n + 1) \cdot n$

c) $(n + 4)\,(n + 3)$

d) $\frac{1}{(n-3)(n-4)}$

e) $\frac{1}{(n\quad p)(n\quad p\quad 1)}$

f) $(n - p + 1)\,(n - p)\,(n - p - 1)\,(n - p - 2)$

g) $\frac{1}{(m-n+1)(m-n)}$

h) $(2n + 3)\,(2n + 2)$

i) $\frac{n-p}{n+1}$

j) $\frac{(2n+1) \cdot 2n}{(n-p+1)(n-p)}$

k) $\frac{(n+2)(n+1)n}{n(n+1)} = n+2$

l) $\frac{(n\quad 1)(n\quad 2)}{(n\quad 1)(n\quad 2) \cdot n} = \frac{1}{n}$

11.

a) $V = \{5\}$

b) $V = \{0, 1, 3\}$

c) $V = \{0, 1\}$

d) $V = \varnothing$

e) $V = \{5\}$

f) $V = \{7\}$

g) $V = \{81\}$

h) $V = \{5\}$

12.

a) $\frac{n+2}{(n+1)!}$

b) $-\frac{n}{(n+1)!}$

c) $\frac{n(n\quad 1)}{(n-5)!}$

13 B

14. C   15 B   16 E   17 A

18.

a) 3 360

b) 480

19. C

20 Soma: 01 + 02 = 03

21 192 bandeiras de três cores.

22. E   24. B   26. B

23. D   25. D   27. E

28. E

29.

a) 5 040

b) 720

c) 24

d) 2 160

e) 1 440

f) 24

g) 720

30.

a) 725 760

b) 241 920

c) 725 760

d) 80 640

e) 483 840

31 420°

32. 1 554

33. 144

34. 90°

35. 60

36. 12

37 362 880

38. 3 999 960

39. $A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,3} \cdot A_{4,\,3} = 172\,800$

40. C   41. A   42. E

43.

a) 385; R$ 0,50   b) 130

44.

a) 1 287

b) $\frac{1}{143}$

45. B   47 D   49. E   51 C

46. B   48. B   50 C   52 B

53. C

54. A

55. Soma: 02 + 04 + 08 + 16 = 30

56. D

57 E   58 B   59 D   60 D

61

a) $C_{52,\,10} - C_{48,\,10}$

b) $C_{4,1} \cdot C_{48,9}$
c) $C_{52,10} - C_{48,10} - 4C_{48,9}$
d) $C_{4,2} \cdot C_{48,8}$
62. 43 200
63 3 024
64. 2 598 960
65. 10
66. 6 720
67.
a) 271
b) 27
c) 181
d) 9
e) 36
f) 54

Exercícios complementares

1. 5 000 placas.
2. $8 \cdot 10^6$
3. B
4. E
5 $x = 40$
6 40
7. $2 \cdot 9!$
8. $4 \cdot 5!$
9. $4! \cdot 12!$
10. Ele ocupa a 95ª posição.
11 Posição nº 58.
12 Dois a dois: 12 elementos
Três a três: 24 elementos.
13.
a) a) 30
b) 24
c) 1680
14 3
15.
a) $n = 12$
b) $x = 2$
16.
a) $x = 5$
b) $x = 18$
17 20
18. 24 números.
19. 224.
20. 720.
21. $3 \cdot 4!$
22 24 números
23 $n = 3$
24. 848
25. 21 soluções.
26. 240 maneiras.
27. 48 formas.
28. 8 maneiras.
29. 15 formas
30. 100 números.
31. $2 \cdot 4!$
32.
a) a) 7!
b) 6!
c) $4 \cdot 7!$
d) $4 \cdot 7!$
e) 6!
f) $3! \cdot 6!$
33. 8!
34. E
35. E
36. 66
37. 10 retas.
38. $\binom{20}{2} - \binom{6}{2} + 1$
39. 210 triângulos.

40. C	41. E	42. D	43. B

44.
a) $x = 21$
b) $x = 11$

45. C	46. D	47 B	48. B

49. 196
50. D
51. B
52. A
53. 17 325
54. 360 modos
55 $\frac{n!}{3!(n-3)!}$
56. $n + 1$ é múltiplo de 3.
57. $P = 2$ e $n = 13$
58. C
59. 220 paralelepípedos.

60. D	63. E	66 D	69. D
61 D	64. C	67. E	70. C
62. B	65. C	68. E	71. D

72. A
73.
a) 6
b) 48 sequências
74. B
75. A
76. A
77. 21 maneiras.
78
a) $\binom{15}{10}$
b) $\binom{15}{5}$
c) $5 \cdot \binom{15}{9}$
d) $\binom{20}{10} - \binom{15}{10}$
79. A
80. 5 760 configurações.
81. 10 920
82 $(A_{K,r}) \cdot (A_{m-K,n-r}) \cdot (n - r + 1)$

Frente 2

Capítulo 7 – Noções de estatística

Revisando

1. C
2. D
3. A
4. D
5. D
6.
a) 10
b) 72%
c) Md = 6
7. A
8.
a) $\overline{X} = 19$
b) Md = 19
c) Mo = 21
d) $\sigma^2 = 2,8$
e) $\sigma \cong 1,67$
9. E
10. D

Exercícios propostos

1. C
2. C
3.
a) $\overline{X} = 8,5$ e Md = 8,75
b) R$ 8,25
4. E
5. C
6. A
7. B
8 C
9 D
10. E
11. B
12. A
13. E
14. B
15. C
16. A
17. B
18. B
19. C
20 A

Exercícios complementares

1. D
2.
a) N = 3
b) É correta
3.
a) 12
b) y = 14
4. D
5 B
6
a) Entre 2011 e 2012.
b) Aproximadamente 8,03%.
c) Aproximadamente 13.
d) $P = \frac{5}{17}$
7. Soma: 01 + 02 + 04 + 16 = 23
8. C
9. A
10.
a) $\overline{x} = 19,5$; Mo = 16, 17, 18 e 22; Md = 19, a maior taxa entre março e abril.
b) $\frac{31}{13}$
11 D
12.
a) $n = 1 \to 9$ e $\frac{3}{10}$; $n = 2 \to 5$ e $\frac{1}{6}$;
$n = 3 \to 4$ e $\frac{2}{15}$; $n = 4 \to 5$ e $\frac{1}{6}$.
b) Deverá cair na malha fina
13 D
14. A
15.
a) $f(x) = 0,01 \cdot x + 1,75$ e $g(x) = -0,09 \cdot x + 1,49$
b) 2017 e 2018
16
a) $4^{\underline{o}}$ dia
b) 1500%
c) Aproximadamente 7452,2%.
17. E
18. Soma: 01 + 02 + 04 = 07
19. 77,5 km/h
20 D

Capítulo 8 – Números complexos

Revisando

1. $S = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$
2.
a) $z + w = 6 - 2i$
b) $z \quad w = 2 \quad 4i$
c) $z \cdot w = 11 - 2i$
d) $z^2 = 7 - 24i$
e) $w \cdot \overline{w} = 5$
f) $\frac{z}{w} = 1 - 2i$
3. E
4. D
5.
a) $\alpha = -1$
b) $\alpha = 1$
6.
a) $Re(z) = \frac{1}{2}$ e $Im(z) = 1$
b) $w = 6 - 2i$ ou $w = -6 + 2i$
7. $z = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i \cdot \text{sen} 45^\circ\right) =$
$\sqrt{2}, 45^\circ$ e

$w = 2\sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i \cdot \text{sen} 135^\circ\right) =$
$= \left(2\sqrt{2}, 135^\circ\right)$

8.

a) $z \cdot w = -4$

b) $\frac{z}{w} = \frac{1}{2}i$

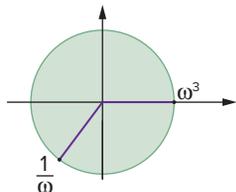
c) $z^5 + w^3 = 12 + 12i$

d) $\frac{z^5}{w^3} = -\frac{1}{4}$

9. $n = 3$

10.

a) $Re\left(\omega^3\right) = 1$ e $Im\left(\omega^3\right) = 0$

b)

c) $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

e $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Exercícios propostos

1. D
2. B
3. E
4. D
5. E
6. B
7. A
8. E
9. D
10. A
11. D
12. B
13. C
14 B
15. D
16. E
17. C
18. A
19. E
20. C
21 A
22. B
23. A
24. E
25. C
26. D
27 B
28. E
29. B
30. D
31. B
32. A
33. A
34. C
35. D
36. E
37. E
38. B
39. D
40. D
41 D
42 B
43. A
44. A
45. A
46. D
47 E
48 A
49. C
50. B
51. B
52. D
53. D
54. C
55. A
56. A
57. A
58. B
59. D
60. C
61. C
62. B
63. C
64. C
65. B
66. E
67. D
68. C
69. D
70. D
71. B
72 C
73. D
74. E
75. D
76 C
77 A
78. D
79. D
80. C

Exercícios complementares

1. $n = 6$

2.

a) $n = 3$

b) $\left(z_3\right)^{100} = \left(1^{100}, 240^\circ\right) = z_3$

3.

a) $|z| = 1 ; z = (1, 30^{\circ})$

b) $z^{27} + z^{24} + 1 = 2 + i$

4. Soma: $01 + 04 = 05$

5. Soma: $01 + 04 + 16 = 21$

6. Soma: $01 + 02 = 03$

7. $2a + b = 11$

8

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

e $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

b) $n = 8$

c) $P(x) = x^8 + 256$

9 $z_1 + = \quad 2\sqrt{2} \quad = 2i\sqrt{2}$ e $z_2 \quad 2\sqrt{2} \quad 2i\sqrt{2}$

10.

a) $Re(z) = 2$ e $Im(z) = 1$

b) $a = 2$ e $b = -2$

11 $S = 18\left(2\sqrt{3} \quad 3\right)$

12. Circunferência.

13.

a) $S = 36$

b) A'(0, 3), B'(–6, 0), C'(0, –3) e D'(6, 0)

c) i

14.

a) $x = 0, x = 2$ ou $x = -2$

b) $|z| = a^4$

15. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}, r = \frac{2\sqrt{5}}{3} 9\left(a^2 + b^2 + r^2\right) = 40$

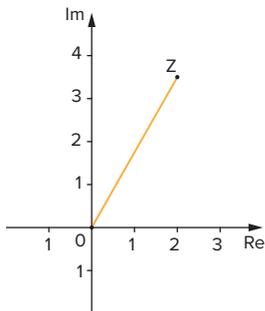
16.

a) $|z| = 1$

b) $z^4 + w^4 = -1$

17 $t = -\sqrt{3} - i$

18. D

19. $|z| = 4, \theta = 60^{\circ}$

20. $a = 3$

21.

a) $z = \left(a^3 \quad 3a\right) + \left(3a^2 \quad 1\right)i$

b) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

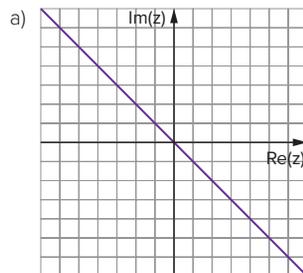
22. $z = 2i$ ou $z = -2$

23.

a) Demonstração.

b) Demonstração.

24.

a)

b) Circunferência.

c) $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

25. A

26 C

27 A

28. A

29. C

30. D

31. C

32 C

33 A

34. $z = \sqrt{3} + i$

35. E

36. $z_0 = 12 + 16i$

37 D

38. D

39. B

40. B

41 C

42. E

43. A

44.

a) $|z + i|_{máx.} = \sqrt{5} + 1$

b) $z_0 = \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}i$

45. B

46. B

47. E

48. B

49. C

50. E

51. $\frac{n \quad 1}{2}$

52. E

53. C

54. E

55. B

56. $-2i, 2i, -\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} - i$

57. A

58 $S = 50\left(6 \quad \pi\right)$ u.a

59. C

60. $Z = 2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)i$

61 A

62. $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

63 C

64. a = 1, b = 4 e c = 52

65. 1

66. D

67 z é um número real ou está em uma circunferência

68. D

69. Zero

70. D

71 $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p^2}{4q}$

72. B

73. $|z| = \sqrt[6]{18}$

74. $|z \quad = 7 \quad 9i| \quad 3\sqrt{2}$

75. E

76

a) $U = \{1, -1, \omega, 1 + \omega, -\omega, -1 - \omega\}$

b) $1 + 2\omega$ e $-1 - 2\omega$

77. A

78. Demonstração.

79 B

80. $S = 1 + \left(\frac{1 - i}{2}\right)n$

Frente 3

Capítulo 10 – Cônicas

Revisando

1. D
2. B
3. D
4. 9
5 B
6. $\frac{y^2}{20} = \frac{x^2}{25} \quad 1$

7

a) $\frac{(x-9)^2}{16} - \frac{(y-7)^2}{4} = 1$

b) $y - 7 = \pm\frac{1}{2}(x - 9)$

8. C

9.

a) $x = \frac{1}{14}y^2 + \frac{4}{7}y \quad \frac{23}{14}$

b) $V\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

10.

a) $V(2, -2)$

b) $F\left(2, \frac{15}{8}\right)$

c) $8y + 17 = 0$

d) $x - 2 = 0$

11. Gráfico.

12. Gráfico.

13 Gráfico

Exercícios propostos

1 C

2. A

3 D

4. $\frac{(x \quad 2)^2}{4} + \frac{(y \quad 3)^2}{9} = 1$

5. B

6 D

7. C

8 E

9. B

10. D

11. C

12 E

13. C

14. $2x^2 - 2y^2 - 9 = 0$

15. E

16. 1

17 C

18. $\frac{(y+2)^2}{3} - \frac{(x-1)^2}{1} = 1$

19. D

20.

a) V(3, 4)

b) F(5, 4)

c) $x - 1 = 0$

d) $y \quad 4 = 0$

21. A

22 D

23. B

24. E

25. D

26 A

27

a) Gráfico.

b) Gráfico.

28.

a) Gráfico.

b) Gráfico.

29.

a) Gráfico.

b) Gráfico.

30. Gráfico.

31. Gráfico.

32 Gráfico.

33

a) Gráfico.

b) Gráfico.

34. Gráfico.

35. Gráfico.

36. Gráfico.

37 Gráfico.

38. Gráfico.

39. Gráfico.

40. Gráfico.

Exercícios complementares

1. C
2 D
3
a) $\frac{12}{5}$
b) $A_{\Delta PQR} = 12$
4. C
5.
a) $\alpha^{\frac{3}{2}} = 3\,650$
b) $P = 12{,}736$ dias.
6. E
7. $L^2 = \frac{4a^2b^2}{b^2 + a^2}$
8. D
9 C
10. $b = \sqrt{2};\ (1, 1)$ e $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$
11. C
12. Demonstração.
13.
a) A'(10, 0)
b) $b = 2\sqrt{5}$
c) $5(x-6)^2 - 4y^2 = 80$
d) (0, 5) e (0,   5)
14.
a) $\left(-2+\sqrt{5},\ 2+\sqrt{5}\right)$ e $\left(-2-\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}\right)$
b) Não existem pontos de interseção.
c) $m = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
15. $3x \pm y \mp 7 \quad 0$
16. A
17. C
18. 10
19. Gráfico.
20. $x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2 = b^2$ (circunferência) e

$$\frac{x^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{7}}\right)^2} - \frac{\left(y \quad \frac{\sqrt{3}b}{14}\right)^2}{\left(\frac{b}{7}\right)^2} = 1 \text{ (hipérbole).}$$

21. $(-1, 0)$ e $(-1, 4);\ y_P = 2 + 2\sqrt{2}$
22.
a) $\left(\sqrt{3}, 1\right), \left(-\sqrt{3}, 1\right)$ e $(0, 4)$.
b) Gráfico.
23. A
24. $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$
25.
a) $d(P, S_1) = 1$ e $d(Q, S_1) = \sqrt{13}$.
b) $\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} + 1, \text{ se } x \in [-2, 2] \\ y = |x|, \text{ se } x \notin [-2, 2] \end{cases}$
26. $2p\left(3 + \sqrt{3}\right)$
27 Gráfico.
28 Gráfico.
29. Gráfico.
30. Gráfico.
31. Gráfico.
32. Gráfico.
33 Gráfico.
34. Gráfico.
35. Gráfico.
36. Gráfico.
37.
a) Gráfico.
b) $40\ m^3$
c) (16, 20)
38. A
39. E
40. Gráfico.

Capítulo 11 – Posições relativas no espaço

Revisando

1
a) Zero.
b) Uma.
c) Duas.
d) Três.
2 D
3 E
4 C
5 E
6. Paralelos e coincidentes, $\alpha \cap \beta = \alpha$ ou $\alpha \cap \beta = \beta$.
Paralelos distintos, $\alpha \cap \beta = \varnothing$.
Secantes, oblíquos ou perpendiculares, $\alpha \cap \beta = r$.
7. B
8. E
9. $20° < \gamma < 60°$
10. C

Exercícios propostos

1. E
2. B
3 B
4 B
5. E
6. C
7. D
8. A
9 D
10. D
11. A
12. E
13. B
14. E
15 E
16 C
17. A
18. A

Exercícios complementares

1. Soma: 02 + 04 + 16 = 22
2 D
3. C
4. A
5. B
6. D
7. D
8 B
9. B
10. E
11. A
12. C
13.
a) Coplanares, concorrentes e oblíquas.
b) Reversas e ortogonais.
c) Reversas e oblíquas.
d) Coplanares e paralelas distintas.
14. $\cos\theta = \frac{1}{3}$
15. x = 90°, y = 60° e z = 45°
16. E
17. C
18. $x = \sqrt{19}$, $y = \sqrt{6}$ e $z = \sqrt{30}$

Capítulo 12 – Paralelepípedos

Revisando

1. E
2 D
3. E
4. C
5. B
6. D
7.
a)

b) 1600 cm^2
c) 4000 cm^3 = 4 litros
d) 30 cm
8. B
9. D
10. C

Exercícios propostos

1. E
2. A
3. A
4. C
5 C
6. B
7. A
8. B
9. D
10. A
11. E
12. E
13 C
14. B
15. A
16. A
17. B
18. D
19. C
20. A

Exercícios complementares

1. D
2 C
3 B
4. C
5. C
6. D
7. D
8 D
9 A
10. Soma: 02 + 04 = 06
11.
a) $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
b) M = 50 cm^2
12. C
13. C
14. B
15. C
16. C
17.
a) $10\sqrt{2}$ cm × $8\sqrt{2}$ cm × $4\sqrt{2}$ cm
b) S_C = 64 cm^2
c) V = $0{,}64\sqrt{2}$ L
18. E
19. C
20.
a) $V_{sólido} = 48\sqrt{2}\ cm^3$
b) CD = $6\sqrt{10}$ cm

Capítulo 13 – Poliedros

Revisando

1 E
2. D
3. B
4. B
5. A
6 C
7 $V_{pirâmide} = 24\sqrt{3}\ cm^3$
8. B
9. C
10. $L = 15\sqrt{2}$ cm

Exercícios propostos

1. E
2 C
3 D
4. B
5. E
6. A
7. Soma: 04 + 16 = 20
8 D
9 B
10. A
11. A
12. D
13. A
14. C
15. Soma: 01 + 02 = 03
16. B
17. E
18. C
19. B
20 D
21. D
22. 3240 m^3
23. C
24. A
25. B
26 400 cm^3
27 D
28. A
29. C
30. B
31 $\cos\left(A\hat{C}B\right) = \cos\alpha \cdot \cos\beta$
32. B
33. D
34. D
35. h = 18
36. E
37 B
38. B
39. C
40. C
41. A
42 C
43 B
44. Soma: 01 + 08 = 09
45. C
46. C
47. D
48 A
49. C
50. A
51. B
52. D
53. B
54. D
55. C
56. C
57. A
58 A
59.
a) $MN = 6\sqrt{2}$ cm
b) $A = 144\sqrt{3}$ cm^2
c) PN = 12 cm
d) $V = 288$ cm^3
60 E

Exercícios complementares

1. A
2
a) $A_{total} = \left(164 + 24\sqrt{2}\right)a^2$
b) $V = 204a^3$
3. B
4 D
5 E
6. O volume é 840 m^3 e a área total é 756 m^2.
7. k = 6
8. A
9. B
10. D
11 D
12. D
13.
a) $A_{\Delta EFH} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2
b) $A_{EGIH} = 9$ cm^2
c) $V_{pirâmide} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm^3
14. B
15. $A_{total} = 16\sqrt{3}$ m^2
16. E
17.
a) $A_{\Delta ABD} = 3$
b) $V_{tetraedro} = 4$
c) $A_{\Delta BDE} = \sqrt{61}$
d) $AQ = \frac{12\sqrt{61}}{61}$
18.
a) $V_{tetraedro} = \frac{\ell^3 sen\theta}{6}$
b) $PQ = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{2 \quad \theta cos^2}$
c) $MP = \frac{\ell}{2}\sqrt{5 + 4\cos\theta}$
19. C
20. D
21. B
22
a) $EG = 5\sqrt{7}$ m
b) 7,1°
23. A
24. A
25. B
26.
a) $DN = \frac{\ell\sqrt{7}}{3}$
b) $A_{\Delta BDN} = \frac{\ell^2\sqrt{19}}{12}$
27 D
28.
a) $A_A = A_C = \frac{11\sqrt{3}}{2}$ u.a. e $A_B = 6\sqrt{3}$ u.a
b) $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$
29. A
30. C
31 A
32. B
33. A
34. B
35. E
36. D
37 C
38. A
39.
a) 3 cm, 4 cm e 5 cm.
b) $V = 60$ cm^3 e $A_{total} = 94$ cm^2.
40.
a) $A_{total} = 2 \cdot \left(5 + \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{50}\right)$ u.a
b) V = 10 unidades de volume
41. E
42. B
43. $V = \frac{16\left(\sqrt{2} - 1\right)}{3} \cdot a^3$
44. 6 vértices.
45. C
46. $\frac{11}{52}$
47. D
48. D
49. C
50. B
51. $\sqrt{k}$
52. A
53. A
54. $R = \sqrt[6]{72\left(3\sqrt{3} - 5\right) \cdot V^2}$
55. A
56. $A_{lateral} = 2x^2 \cdot sen2\beta \cdot \left(1 + \cos\alpha\right)$
57. C
58. $\theta = 2 \cdot arcsen\left(\frac{\sqrt{65}}{13}\right)$
59. $h = \frac{a}{2}$ ou $h = \frac{a}{6}$; ou $h = \frac{a}{6} \cdot \left(2 + \sqrt{7}\right)$;
ou $h = \frac{a}{6} \cdot \left(2 + \sqrt{13}\right)$
60. A